Diferenciabilidade

Exercício 1. Calcule as funções derivadas parciais de 1^a ordem das seguintes funções, indicando o respectivo domínio:

a. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x} & se \quad x \neq 0; \\ y^2 - y & se \quad x = 0. \end{cases}$ **b.** $g(x,y) = \begin{cases} x^2 - yx & se \quad x \neq y; \\ x & se \quad x = y. \end{cases}$

Exercício 2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Verifique que a função admite derivadas parciais em todo o seu domínio mas que não é contínua na origem.

Exercício 3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & se \quad xy = 0; \\ \sqrt{x^2+y^2} & se \quad xy \neq 0. \end{cases}$$

a. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b. Prove que não existe $f_v'(0,0)$, qualquer que seja o vector $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $v_1 v_2 \neq 0$.

c. O que pode concluir sobre a diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$?

Exercício 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Estude a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$.

b. Mostre que $f(tx,ty) = tf(x,y)$ para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e todo o $t \in \mathbb{R}$.

c. Utilize a alínea anterior para provar que $f_v'(0,0) = f(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

d. Utilize a alínea anterior para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

e. Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$.

Exercício 5. Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2} & se \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & se \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a. Estude a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$.
b. Calcule o gradiente de f no ponto $(1,1)$.
c. Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$.

Exercício 6. Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & se \quad (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & se \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
b. Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ e mostre que são descontínuas em $(0,0)$.
c. Verifique que f é diferenciável na origem.

Exercício 7. Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(x-y)}{x+y} & se \quad x+y\neq 0;\\ 0 & se \quad x+y=0.\end{cases}$$

a. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
b. Existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ nos pontos da forma $(a,-a)$ com $a\neq 0$?
c. Calcule uma expressão para a função derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e estude a sua continuidade.
d. Calcule $f'_{(1,-1)}(2,3)$.
e. Estude a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$.
f. Estude a diferenciabilidade de f em $\mathbb{R}^2$.
g) Calcule $\nabla f(1,0)$.
h) Calcule $f'_{(1,1)}(0,0)$ e $f'_{(1,1)}(1,0)$.

Exercício 8. Seja h uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e f a função definida pela expressão

$$f(x,y)=\tan(x)h(x+\cos y).$$

Mostre que para todo o ponto $(x,y)\in D_f$ se tem

$$\sin(y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f(x,y)\frac{\sin(y)}{\cos^2 x}.$$

Exercício 9. Seja $f\in C^2(\mathbb{R})$ e g a função definida por $g(x,y)=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.
Mostre que para todo o ponto $(x,y)\in D_g$, se tem

$$x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)+y\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y)=-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y).$$

Exercício 10. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e g a função definida pela expressão

$$g(x, y) = \cos^2(x) f(y + \tan(x)).$$

Prove que para todo o ponto $(x, y) \in D_g$ se tem

$$\frac{1}{\cos^2(x)} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2 \tan(x) g(x, y).$$

Exercício 11. Usando a regra da derivada da função composta, calcule $\dfrac{dw}{dt}$ sabendo que

$$w = xyf(z),\ x = t^2,\ y = e^t \text{ e } z = \ln(t^2),$$

onde f é uma função real de variável real diferenciável.

Exercício 12. Seja F uma função real de variável real diferenciável e $z = xy + xF\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Mostre que para todo o $x \neq 0$ se tem

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

Exercício 13. Sejam ϕ, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções de classe C^2 e $z = x\phi(x + y) + y\psi(x + y)$. Mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Exercício 14. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $v(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$. Mostre que $\phi = u \circ v$ é verifica

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Exercício 15. Considere as funções $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y, z) = (e^{x^2+y^2+z^2}, 1 - xyz^2)$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, uma função cuja matriz jacobiana no ponto $(e^3, 2)$ é dada por

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz jacobiana de $f \circ g$ no ponto $(1, -1, 1)$.

Exercício 16. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(1) = f'(1) = 2$ e $f(2) = f'(2) = 1$. Considere $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(x, y, z) = (f(x^2) + f(x^2 + y^2), f(xyz)).$$

a. Calcule a matriz jacobiana de g.

b. Sendo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = e^{3-x^2+yx}$, justifique que $h \circ g$ é diferenciável no ponto $(1, 1, 2)$ e calcule a matriz jacobiana de $h \circ g$ nesse ponto.

Exercício 17. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{5/3}y^2}{(x^2+y^2)^{4/3}} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $g(t) = (t,t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Considere ainda a função $F = f \circ g$.

a. Indique o valor de $F(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

b. Calcule o valor de $F'(0)$ de duas formas:
i) utilizando a expressão de $F(t)$ obtida na alínea anterior;
ii) através da regra da derivação da função composta, admitindo que f é diferenciável.

c. O que pode concluir do facto de ter obtido diferentes resultados nas alíneas i) e ii)?

Exercício 18. Determine os extremantes e correspondentes extremos da função f, nos seguintes casos:
a. $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)e^y$;
b. $f(x,y) = x^2 + 4xy - y^2 - 8x - 6y$;
c. $f(x,y,z) = xy + xz$;
d. $f(x,y) = x\sin(y)$;
e. $f(x,y) = x^2 - 3xy^2 + 2y^4$.

Exercício 19. Averigue se o ponto $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$ é extremante da função definida por

$$f(x,y,z) = x^2 + 2xy^2 + y^4 + z^2.$$

Exercício 20. Determine, em função do parâmetro $\beta \in \mathbb{R}$, os extremantes da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y,z) = xy + xz - x^3 - y^2 - \beta x.$$

Exercício 21. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = e^{xy+xy^2+x^2}.$$

Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

Exercício 22. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = (x-y)^2 - x^4 - y^4$.

a. Prove que os pontos críticos de f são $(1,-1)$, $(-1,1)$ e $(0,0)$.

b. Indique, justificando, se os pontos $(1,-1)$ e $(-1,1)$ são extremantes da função f e, caso o sejam, determine os valores extremos de f.

c. Prove que o ponto $(0,0)$ não é extremante da função f.