Análise Complexa

Exercício 1. Resolva em $\mathbb{C}$ as seguintes equações

$$\textbf{a.}\ z^3 + iz^2 - iz + 1 = 0; \qquad \textbf{b.}\ z^7 + z^4 - 16z^3 - 16 = 0.$$

Exercício 2. Mostre que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$.

Apresente uma condição necessária e suficiente sobre z para que se tenha a igualdade.

Exercício 3. Represente graficamente os seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}$ e diga se são abertos, fechados e limitados.

a. $\{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} = 16\}$; **b.** $\{z \in \mathbb{C} : z + \overline{z} = 4\}$; **c.** $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| > |z-1+i|\}$

d. $\{z \in \mathbb{C} : |Re(z)| + |Im(z)| \leq 1\}$; **e.** $\left\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2 \wedge |Arg z| < \frac{\pi}{4}\right\}$; **f.** $\{z \in \mathbb{C} : Re(z^2) > 0\}$.

Exercício 4. Determine a parte real e a parte imaginária das funções definidas por:

$$\textbf{a.}\ f(z) = \frac{z+2}{z-1}; \qquad \textbf{b.}\ f(z) = 3i\overline{z} + 4(i+z).$$

Exercício 5. Resolva em $\mathbb{C}$ as seguintes equações:

$$\textbf{a.}\ e^z = 1+i \qquad \textbf{b.}\ e^z = -1 \qquad \textbf{c.}\ \cos z = 2 \qquad \textbf{d.}\ e^z = e^{iz}.$$

Exercício 6. Considerando $z = x + iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, calcule os seguintes limites:

$$\textbf{a.}\ \lim_{z \to -1+2i} \left(3xy + i\,(x-y)^2\right) \qquad \textbf{b.}\ \lim_{z \to 1+i} \frac{z^2-5}{iz} \qquad \textbf{c.}\ \lim_{z \to i} \frac{z(z^2+1)}{z-i} \qquad \textbf{d.}\ \lim_{z \to 0} \frac{1-\cos z}{sen(z^2)}$$

Exercício 7. Mostre que f é contínua no ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ se e só se $\overline{f}$ é contínua nesse ponto.

Exercício 8. Verifique se as seguintes funções podem ser prolongadas por continuidade à origem:

$$\textbf{a. } f(z) = \frac{Re(z)}{z} \qquad \textbf{b. } g(z) = \frac{z}{|z|}$$

Exercício 9. Considere a função definida em $\mathbb{C}$ por

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z|^4} & se \quad z \neq 0 \\ 0 \quad se & z = 0 \end{cases}.$$

Prove que:

a. Não existe $\lim\limits_{z \to 0} \frac{f(z)}{z}$.

b. Sendo $u = Re(f)$ e $v = Im(f)$, mostre que para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $u(x, 0) = x$ e $v(0, y) = y$.

Exercício 10. Seja, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + iy) = (x^2 + 2y) + i(x^2 + y^2)$. Determine em que pontos $z_0 = x_0 + iy_0$ existe $f'(z_0)$.

Exercício 11. Considere uma função inteira $f(x + iy) = x^2 - xy - y^2 + iv(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Determine $f(z)$ e $f'(z)$.

Exercício 12. Mostre que a parte real de uma função inteira não pode ser dada por

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercício 13. Obtenha as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares.

Exercício 14. Determine o maior subconjunto de $\mathbb{C}$ onde as seguintes funções são diferenciáveis:

$$\textbf{a. } f(x + iy) = -\left(e^y - e^{-y}\right)\cos(x) + i\left(e^y + e^{-y}\right)\sin(x) \qquad \textbf{b. } f(z) = \frac{\overline{z}}{|z^2|}$$

Exercício 15. Determine $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de modo a que a função f definida em $\mathbb{C}$ por

$$f(x + iy) = u(x, y) + i(x^3 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

seja uma função inteira e $f(0) = 0$.

Exercício 16. Sejam $u_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (com $k \in \mathbb{N}_0$) as funções definidas por $u(x, y) = x^k - y^k$. Calcule os valores de k para os quais existem funções f_k holomorfas tais que $Re(f_k) = u_k$ e determine-as.

Exercício 17. Determine as funções harmónicas conjugadas da função w definida em $\mathbb{R}^2$ por $w(x, y) = x^2 - 3x - y^2$.

Exercício 18. Considere a função u definida em $\mathbb{R}^2$ por $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$.

a. Mostre que u é uma função harmónica.

b. Determine a função holomorfa f tal que $Re(f) = u$ e $f(0) = 2i$.

Exercício 19.

a. Prove que a função u definida em $\mathbb{R}^2$ por $u(x,y) = e^{-x}\left(x\sin(y) - y\cos(y)\right)$ é harmónica.
b. Determine v tal que $f = u + iv$ seja inteira.
c. Obtenha uma expressão para $f(z)$ e calcule $f'(2+i)$.

Exercício 20. Seja f uma função complexa de variável complexa, holomorfa no aberto Ω, e seja $\overline{\Omega} = \{\overline{z} : z \in \Omega\}$. Seja $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ a função definida por $g(z) = \overline{f\left(\overline{z}\right)}$. Prove que g é holomorfa.