LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Departamento de Matemática
Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão
Matemática II - 2º Semestre - 2018/2019

Época de Recurso: 3 de julho de 2019 - Tópicos de Resolução
Duração: 2h

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Calcule os valores próprios da matriz A e respetivas multiplicidades algébricas.

Resolução: λ é valor próprio de A se e só se $|A - \lambda I| = 0$. Como
$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda) - 4] = (\alpha - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda)$, obtemos

$$|A - \lambda I| = 0 \ \text{ sse } \ \lambda = \alpha \vee \lambda = 0 \vee \lambda = 5.$$

Assim, se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 5$, A tem 3 valores próprios distintos $\alpha, 0$ e 5, cada um deles com multiplicidade algébrica (m.a.) 1. Nos restantes casos A tem 2 valores próprios 0 e 5: se $\alpha = 0$, $m.a(0) = 2$ e $m.a(5) = 1$; se $\alpha = 5$, $m.a(0) = 1$ e $m.a(5) = 2$.

   (b) Considere $\alpha = 5$ e calcule o conjunto dos vetores próprios associados ao valor próprio 5.

Resolução: Os vetores próprios, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, associados ao valor próprio 5 são as soluções não nulas do sistema $(A - 5I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Como
$(A - 5I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -4v_1 + 2v_2 = 0 \\ 2v_1 - v_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 2v_1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$,
obtemos que as soluções do sistema são os vetores $\mathbf{v}$ da forma $\mathbf{v} = (v_1, 2v_1, v_3)$, $v_1, v_3 \in \mathbb{R}$.
Logo o conjunto dos vetores próprios associados ao valor próprio 5 é

$$\{a(1,2,0) + b(0,0,1) : a, b \in \mathbb{R}, \text{ a, b não simultaneamente nulos}\}.$$

2. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{y - x^2}}{\ln(2 - y)}.$$

   (a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

Resolução:
$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 \geq 0 \wedge 2 - y > 0 \wedge ln(2-y) \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 \wedge y < 2 \wedge y \neq 1\}$.

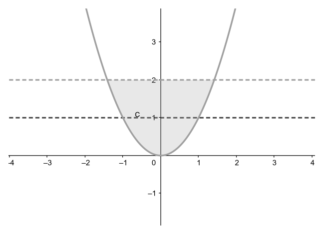

Figura 1: Gráfico do exercício 2a)

(b) Defina analiticamente o interior e a fronteira do conjunto D_f.

Resolução:
$int(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 \wedge y < 2 \wedge y \neq 1\}$;
$fr(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 \wedge y \leq 2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2 \wedge y \geq x^2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 \wedge y \geq x^2\}$.

3. Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|\sin(y-1)}{|x|+|y-1|} & \text{se } (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,1) \end{cases}$.

(a) Mostre que a função f é contínua no ponto $(0,1)$.

Resolução:
A função f será contínua no ponto $(0,1)$ se e só se

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = f(0,1).$$

Assim, para provar a continuidade de f em $(0,1)$ basta provar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{|x|\sin(y-1)}{|x|+|y-1|} = 0.$$

Por enquadramento,

$$0 \leq \left| \frac{|x|\sin(y-1)}{|x|+|y-1|} - 0 \right| \leq \frac{(|x|+|y-1|)|\sin(y-1)|}{|x|+|y-1|} = |\sin(y-1)|,$$

e como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} |\sin(y-1)| = 0$, fica provado que a função f é contínua em $(0,1)$.

(b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$.

Resolução:
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h,1)-f(0,1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = 0$;
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,1+h)-f(0,1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = 0$;

(c) Prove que a função f não é diferenciável no ponto $(0,1)$.

Resolução: A função f será diferenciável no ponto $(0,1)$ se e só se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,1+k) - f(0,1) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Pelos resultados da alínea anterior o limite acima fica

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,1+k) - 0 - 0.h - 0.k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{|h|\sin(k)}{|h|+|k|}}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Se o limite existisse e fosse 0 o limite relativo a qualquer subconjunto teria que ser também 0. Considerando agora o conjunto $B = \{(h,k) : k = h\}$ e notando que $(0,0) \in adB$, obtemos

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\(h,k)\in B}} \frac{\frac{|h|\sin(k)}{|h|+|k|}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|\sin h}{2|h|\sqrt{2h^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|\sin h}{2|h|^2\sqrt{2}} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{2|h|\sqrt{2}} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\sin h}{2h\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\sin h}{2(-h)\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Assim concluímos que a função não é diferenciável no ponto $(0,1)$.

4. Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para calcular o ponto que tem maior ordenada do conjunto dos pontos $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y+1)^2 = 4\}$.

Resolução:
Pretendemos calcular o maximizante absoluto da função $f(x,y) = y$ no conjunto M, sendo

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y+1)^2 = 4\}.$$

Como f é de classe C^1 e a matriz jacobiana do conjunto das restrições de igualdade é $J_g = [2x \;\; 2(y+1)]$, que tem característica máxima no conjunto M (visto que $(0,-1) \notin M$), sabemos que qualquer extremante local de f em M será ponto crítico da função lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = y - \lambda(x^2 + (y+1)^2 - 4).$$

Ora os pontos críticos de $\mathcal{L}$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda(y+1) = 0 \\ x^2 + (y+1)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \vee x = 0 \\ 1 - 2\lambda(y+1) = 0 \\ x^2 + (y+1)^2 = 4 \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$ obtemos na 2ª equação $1 = 0$ e portanto concluímos que não podemos ter $\lambda = 0$.
Se $x = 0$ obtemos $(y+1)^2 = 4$, isto é, $y = 1$ ($\lambda = \frac{1}{4}$) ou $y = -3$ ($\lambda = -\frac{1}{4}$).
Como a função f é contínua no conjunto M compacto, pelo teorema de Weierstrass, f tem em M máximo e mínimo absoluto. Pelo que foi observado atrás, qualquer extremante de $f_{|M}$ estará entre os pontos críticos de $\mathcal{L}$, e assim, para descobrirmos o maximizante absoluto de f em M basta -nos observar que $f(0,1) = 1$ e $f(0,-3) = -3$ e concluir que o ponto do conjunto M que tem maior ordenada é o ponto $(0,1)$.

5. Considere a função real de variável vectorial definida por $f(x,y) = \dfrac{e^{\frac{y}{x}}}{x}$.

   (a) Sendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \leq -3x \wedge y \geq x^2 \wedge x \leq -1\}$, calcule $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)dxdy$.

Resolução:
$\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_{-3}^{-1}\int_{x^2}^{-3x} \frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}dydx = \int_{-3}^{-1}\left[e^{\frac{y}{x}}\right]_{y=x^2}^{y=-3x}dx = \int_{-3}^{-1}(e^{-3} - e^x)dx = \left[e^{-3}x - e^x\right]_{-3}^{-1}$
$= 3e^{-3} - e^{-1}$.

   (b) Escreva a expressão do polinómio de Taylor de 1ª ordem da função f no ponto $(1,1)$.

Resolução: A expressão do polinómio de Taylor de 1ª ordem de f no ponto $(1,1)$ é dada por

$$f(1,1) + Df(1,1)(h_1,h_2).$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{(y+x)e^{\frac{y}{x}}}{x^3}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{e^{\frac{y}{x}}}{x^2}$, o diferencial de 1ª ordem no ponto $(1,1)$ é

$$Df(1,1)(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)h_2 = -2eh_1 + eh_2$$

e visto que $f(1,1) = e$, a expressão do polinómio de Taylor é dada por

$$e - 2eh_1 + eh_2.$$

6. Resolva o seguinte problema de valores iniciais: $\begin{cases} y'' + y = 5e^{2x} \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

Resolução:
Começamos por resolver a equação homogénea associada $y''+y=0$. A equação característica, $D^2+1=0$, tem 2 raízes complexas (conjugadas): $0 \pm i$. Desta forma a solução geral da equação homogénea é $y_h(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Como o 2º menbro é uma função exponencial vamos procurar uma solução particular do mesmo tipo, sto é, $y_p(x) = ke^{2x}$. Substituindo na equação dada, $y'' + y = 5e^{2x}$, obtemos

$$4ke^{2x} + ke^{2x} = 5e^{2x} \Leftrightarrow 5k = 5 \Leftrightarrow k = 1$$

Desta forma obtemos a solução particular $y_p(x) = e^{2x}$ e portanto a solução geral da equação é

$$y_g(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + e^{2x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Resta então determinar a solução particular que verifica $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 + e^0 = 1 \\ C_1 \cos 0 - C_2 \sin 0 + 2e^0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = -2 \end{cases}$$

e concluímos que a solução do problema proposto é

$$y(x) = -2 \sin x + e^{2x}.$$

7. Seja f uma função real de variável real, $f \in C^2(\mathbb{R})$, tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Considere a função definida por

$$g(x, y) = xf(y + y^2), \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Calcule e classifique todos os pontos críticos de g.

Resolução:
Os pontos críticos de g são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y + y^2) = 0 \\ x(1 + 2y)f'(y + y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + y^2 = 0 \ (*) \\ x = 0 \vee 1 + 2y = 0 \ (**) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

(*) - note que, como f é estritamente crescente e $f(0) = 0$ a única solução de $f(x) = 0$ é $x = 0$:
(**) - por hipotese, f' nunca se anula;
Donde os únicos pontos críticos de g são os pontos $(0, 0)$ e $(0, -1)$.
Como f é de classe C^2, podemos afirmar que g também é de classe C^2 (produto e composição de funções de classe C^2) e a sua matriz hessiana num ponto genérico (x, y) é

$$H_g(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & (1 + 2y)f'(y + y^2) \\ (1 + 2y)f'(y + y^2) & 2xf'(y + y^2) + x(1 + 2y)^2 f''(y + y^2) \end{bmatrix}.$$

Logo $H_g(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & f'(0) \\ f'(0) & 0 \end{bmatrix}$ e $H_g(0, -1) = \begin{bmatrix} 0 & -f'(0) \\ -f'(0) & 0 \end{bmatrix}$. Para ambas as matrizes temos $\Delta_1 = 0$ e $\Delta_2 = -f'(0)^2 < 0$, donde $H_g(0, 0)$ e $H_g(0, -1)$ são matrizes indefenidas e os pontos $(0, 0)$ e $(0, -1)$ são pontos de sela.

Cotações:

1a)	1b)	2a)	2b)	3a)	3b)	3c)	4	5a)	5b)	6	7
1,5	1,5	1,0	1,5	1,5	1,0	1,5	2,0	2,5	1,0	2,5	2,5