INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO - UNIVERSIDADE DE LISBOA

ESTATÍSTICA I – 2.º Ano/GES FIN – 2.º Semestre 2019/20 – Exame - Época Normal - Parte A

Atenção: Uma resposta certa vale 1.4 valores Note que apenas <u>uma</u> resposta está correta.
Duração: 30 minutos

---

1. Seja X uma variável aleatória com função distribuição dado por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{4}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{3}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{x}{6} + \frac{1}{2}, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}.$$

O valor de $P(X = 1)$ é...
☐ **i)** 1/3. ☐ **ii)** 1/6.
☒ **iii)** 1/12. ☐ **iv)** 5/6.
☐ **v)** 0.

Resposta: $(X = 1) = F_X(1) - F_X(1^-) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

2. Uma doença muito grave foi encontrada em 0.1% de uma determinada população. Foi desenvolvido um teste que será positivo para 98% dos portadores da doença e positivo para apenas 3% dos não portadores da doença. A probabilidade de uma pessoa não ter a doença, dado que o resultado do teste foi positivo (arredondada a 6 casas decimais) é dada por...
☒ **i)** 0.968336. ☐ **ii)** 0.675768.
☐ **iii)** 0.489691. ☐ **iv)** 0.863103.
☐ **v)** Nenhuma das alternativas anteriores.

Resposta: Considere os acontecimentos $D-$a pessoa tem a doença e $p-$o teste é positivo. Nós temos a seguinte informação $P(D) = 0.001$, $P(p|D) = 0.98$, $P(p|\bar{D}) = 0.03$. Nós queremos $P\left(\bar{D}|p\right)$. Pelo teorema de Bayes

$$\begin{aligned} P\left(\bar{D}|p\right) &= \frac{P(\bar{D})P(p|\bar{D})}{P(D)P(p|D) + P(\bar{D})P(p|\bar{D})} \\ &= \frac{0.999 \times 0.03}{0.001 \times 0.98 + 0.999 \times 0.03} \\ &= 0.968336. \end{aligned}$$

3. O atraso diário com que um trabalhador se apresenta ao seu trabalho, em minutos, tem distribuição uniforme no intervalo $(0, 120)$. Qual a probabilidade do trabalhador se apresentar ao trabalho com menos de 15 minutos de atraso num dia escolhido aleatoriamente?
☒ **i)** 0.125. ☐ **ii)** 0.375.
☐ **iii)** 0.75. ☐ **iv)** 0.625.
☐ **v)** Nenhuma das alternativas anteriores.

Resposta: Seja X a variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $(0, 120)$. Nós queremos $F_X(15) = 15/120 = 0.125$

4. A função probabilidade da variável aleatória X é dada na seguinte tabela:

x	-3	-2	-1	0	1	3
$f_X(x)$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$3/8$	$1/8$

Qual é o valor do coeficiente de assimetria (skewness) de X arredondado a 5 casas decimais?
☐ **i)** -0.92367. ☐ **ii)** 0.46875.
☐ **iii)** 0.10867. ☒ **iv)** -0.12801.
☐ **v)** Nenhuma das alternativas anteriores.

Resposta: O coeficiente de assimentria é igual a $\gamma_1 = E\left[(X-\mu)^3\right]/\sigma^3$, em que $\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right]$. Note-se que $\mu = (1/8)\times(-3)+(1/8)\times(-2)+(1/8)\times(-1)+(1/8)\times(0)+(3/8)\times(1)+(1/8)\times(3) = 0$ (em todas as variantes desta pergunta $\mu = 0$), logo $\gamma_1 = E[X^3]/\sigma^3$, em que $\sigma^2 = E[X^2]$. Notem que
$E[X^2] = (1/8)\times(-3)^2+(1/8)\times(-2)^2+(1/8)\times(-1)^2+(1/8)\times(0)^2+(3/8)\times(1)^2+(1/8)\times(3)^2 = \frac{13}{4}$,
$E[X^3] = (1/8)\times(-3)^3+(1/8)\times(-2)^3+(1/8)\times(-1)^3+(1/8)\times(0)^3+(3/8)\times(1)^3+(1/8)\times(3)^3 = -\frac{3}{4}$.
Logo $\gamma_1 = \left(-\frac{3}{4}\right)/\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} = -0.128\,01$.

5. Uma fábrica produz um determinado produto, que é suscetível de ter dois tipos de falhas, as falhas do tipo A e do tipo B. O departamento de controlo de qualidade da fábrica analisa todos dias a qualidade dos produtos produzidos da seguinte forma: numa primeira fase os produtos são testados para a existência de falhas do tipo A e, posteriormente, serão testados para a existência de falhas do tipo B. Em 5% dos produtos são encontradas falhas do tipo A e destes, 24% têm falhas do tipo B. Dos que não têm falhas do tipo A, 4% têm falhas do tipo B. Num dia em que o departamento de controlo e qualidade analise 10 unidades, qual a probabilidade (arredondada a 4 casas decimais) de que apenas 3 tenham falhas do tipo B?
☐ **i)** 0.0137. ☐ **ii)** 0.0746
☒ **iii)** 0.0105. ☐ **iv)** 0.0500.
☐ **v)** Nenhuma das alternativas anteriores.

Resposta: Nós temos a seguinte informação $P(A) = 0.05$, $P(B|A) = 0.24$, $P(B|\bar{A}) = 0.04$, logo pelo teorema da probabilidade total $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0.05\times0.24+(1-0.05)\times 0.04 = 0.05$. Seja Y o número de unidades com falhas do tipo B em 10. Y tem distribuição Binomial com $n = 10$ e $theta = P(B) = 0.05$. Logo $P(Y = 3) = 0.0105$ utilizando a Tabela 1A.

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO - UNIVERSIDADE DE LISBOA

ESTATÍSTICA I – 2.º Ano/GES FIN – 2.º Semestre 2019/20 – Exame - Época Normal - Parte B

Atenção: Nas perguntas com alternativas, uma resposta certa vale 1.75 valores. Note que nestas perguntas apenas <u>uma</u> resposta está correta.

---

1. Assuma que os clientes de uma determinada loja chegam de acordo com um processo de Poisson. Em média chegam 3 clientes numa hora. Qual a probabilidade (arredondada a 4 casas decimais) que o primeiro cliente chegue depois de 30 minutos de abertura da loja sabendo que não havia clientes nos primeiros 15 minutos?
   ☐ **i)** 0.2231. ☒ **ii)** 0.4724.
   ☐ **iii)** 0.1494. ☐ **iv)** 0.3679.
   ☐ **v)** Nenhuma das alternativas anteriores.

Resposta: Uma vez que os clientes de uma determinada loja chegam de acordo com um processo de Poisson com parâmetro 3, o tempo de espera pelo primeiro cliente é uma variável aleatória T, com distribuição exponencial com parâmetro 3, logo

$$P(T > \frac{30}{60} | T > \frac{15}{60}) = \frac{P(T > 0.5)}{P(T > 0.25)} = \frac{e^{-3\times 0.5}}{e^{-3\times 0.25}} = 0.4724.$$

2. O comprimento das hastes de metal produzidas por um determinado processo industrial tem distribuição normal com média 196 mm e um desvio padrão de 5 mm. A dimensão mínima da amostra a retirar da população de hastes de metal de modo a que a probabilidade da média amostral se situe entre 192 mm e 200 mm com probabilidade maior ou igual a 0.99 é igual a...
   ☒ **i)** 11. ☐ **ii)** 48.
   ☐ **iii)** 25. ☐ **iv)** 17.
   ☐ **v)** Nenhuma das alternativas anteriores.

Resposta: Nós queremos determinar o valor mínimo de n tal que $P\left(192 < \bar{X} < 200\right) \geq 0.99$. Notem que

$$\begin{aligned}
P\left(192 < \bar{X} < 200\right) &= P\left(\frac{192-196}{\frac{5}{\sqrt{n}}} < \frac{\bar{X}-196}{\frac{5}{\sqrt{n}}} < \frac{200-196}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{200-196}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{192-196}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right) = \Phi\left(\frac{4}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{-4}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{4}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{4}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right)\right] = 2\Phi\left(\frac{4}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right) - 1
\end{aligned}$$

Logo nós queremos determinar o menor valor de n tal que

$$\begin{aligned}
2\Phi\left(\frac{4}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right) - 1 &\geq 0.99, \\
\Phi\left(\frac{4}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right) &\geq 0.995\,, \\
\frac{4}{\frac{5}{\sqrt{n}}} &\geq 2.576
\end{aligned}$$

Utilizando a tabela 5 e o facto da função $\Phi(x)$ ser crescente. Consequentemente

$$\sqrt{n} \geq \frac{2.576 \times 5}{4} = 3.22$$

e $n \geq (3.\,22)^2 = 10.3684$. Logo $n = 11$.

3. Suponha que existe uma probabilidade de 10% de ser fiscalizado pelas finanças o imposto de selo exigido nos contratos de compra de ações. Um investidor planeia celebrar 700 contratos independentes de compra de ações num ano. Admita ainda que este investidor nunca paga o imposto de selo que é devido às finanças. Seja $\mathbf{M}$ a multa **por contrato** a impor a este investidor pelas finanças por não pagamento do imposto de selo. O investidor só tem de pagar esta multa quando um contrato for fiscalizado e não paga nada se o contrato não for fiscalizado. O imposto de selo é fixo e igual a 2 euros por contrato. Se as finanças pretenderem que o investidor tenha uma probabilidade de 80% de gastar mais no total de multas do que no pagamento do imposto de selo em todos os contratos, qual deve ser o valor de $\mathbf{M}$ (arredondado a 1 casa decimal)? (Utilize o teorema de De Moivre-Laplace)
   ☐ **i)** 11.7. ☐ **ii)** 18.4.
   ☐ **iii)** 15.9. ☒ **iv)** 22.1.
   ☐ **v)** Nenhuma das alternativas anteriores.

Resposta: Seja X_i uma variável aleatória que é igual a 1 se um contrato é ficalizado e 0 caso contrário. X_i é uma variável aleatória de Bernoulli com $\theta = 0.1$. O total de multas a pagar pelo investidor é $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M} X_i$. Se o investidor pagar o imposto de selo em todos os contratos tem de pagar $2 \times 700 = 1400$ euros. Nós queremos calcular o valor de $\mathbf{M}$ tal que

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M} X_i > 1400\right) = 0.8.$$

Logo

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M} X_i > 1400\right) &= P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > \frac{1400}{\mathbf{M}}\right) \\ &= P\left(\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{700} - 0.1}{\sqrt{\frac{0.1 \times 0.9}{700}}} > \frac{\frac{\frac{1400}{\mathbf{M}}}{700} - 0.1}{\sqrt{\frac{0.1 \times 0.9}{700}}}\right) = 0.8 \end{aligned}$$

Pelo teorema de De Moivre-Laplace

$$\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{700} - 0.1}{\sqrt{\frac{0.1 \times 0.9}{700}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

Logo pela tabela 5

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\frac{1400}{\mathbf{M}}}{700} - 0.1}{\sqrt{\frac{0.1 \times 0.9}{700}}} &\simeq -0.842, \\ \mathbf{M} &\simeq \frac{1400}{-0.842 \times 700 \times \sqrt{\frac{0.1 \times 0.9}{700}} + 70} \\ &\simeq 22.1 \end{aligned}$$

4. Seja (X, Y) uma variável aleatória bivariada com função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} & \text{, se } 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases} .$$

O valor de $E(X)$ é dado por...

☐ **i)** 13/9. ☒ **ii)** 19/36.
☐ **iii)** 7/12. ☐ **iv)** 4/3.
☐ **v)** Nenhuma das alternativas anteriores.

Resposta:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 \int_0^2 x\left(\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3}\right) dydx = \int_0^1 \int_0^2 \left(\frac{x^3}{6} + \frac{xy^2}{3}\right) dydx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^3 y}{6} + \frac{xy^3}{9}\right]_{y=0}^{y=2} dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{2x^3}{6} + \frac{8x}{9}\right) dx \\
&= \left[\frac{2x^4}{24} + \frac{8x^2}{18}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{2}{24} + \frac{8}{18} \\
&= \frac{19}{36}.
\end{aligned}$$

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO - UNIVERSIDADE DE LISBOA

ESTATÍSTICA I – 2.º Ano/GES FIN – 2.º Semestre 2019/20 – Exame - Época Normal - Parte C

Atenção: Nas perguntas com alternativas, uma resposta certa vale 2 valores. Note que nestas perguntas apenas <u>uma</u> resposta está correta.

---

1. Seja X uma variável aleatória com distribuição Poisson e valor esperado λ e seja $g(X)$ é uma função qualquer de X. Assumindo que existem todos os valores esperados envolvidos, $E\left[\lambda g(X+1) - Xg(X)\right]$ é igual a...
   ☒ **i)** 0. ☐ **ii)** $-E[g(X)]$.
   ☐ **iii)** $E[g(X)]$. ☐ **iv)** $-E[Xg(X)]$.
   ☐ **v)** Nenhuma das alternativas anteriores.

Resposta: Utilizando a definição de valor esperado e uma vez que se assumiu que existem todos os valores esperados envolvidos

$$
\begin{aligned}
E\left[\lambda g(X+1) - Xg(X)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\lambda g(k+1) - g(k)k\right] \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\lambda g(k+1) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} - g(k)k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[g(k+1)\,(k+1)\,\frac{\lambda^{k+1} e^{-\lambda}}{(k+1)!} - g(k)k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\right] \\
&= g(1)\,(1)\,\frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} - g(0)\,(0)\,\frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} \\
&\quad + g(2)\,(2)\,\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} - g(1)\,(1)\,\frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} \\
&\quad + g(3)\,(3)\,\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} - g(2)\,(2)\,\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} \\
&\quad + \ldots - g(3)\,(3)\,\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} + \ldots \\
&= g(1)\,(1)\,\frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} - g(1)\,(1)\,\frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} \\
&\quad + g(2)\,(2)\,\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} - g(2)\,(2)\,\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} \\
&\quad + g(3)\,(3)\,\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} - g(3)\,(3)\,\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} + \ldots \\
&= 0
\end{aligned}
$$

2. Considere a variável aleatória bidimensional (X, Y) que verifica

$$E(X|Y=y) = 2y, \quad Var(Y) = 5.$$

   Então, o valor de $Cov(X, Y)$ é...
   ☐ **i)** 8. ☐ **ii)** 9.
   ☒ **iii)** 10. ☐ **iv)** 11.
   ☐ **v)** 12.

Resposta: Utilizando a lei das expectativas iteradas $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(E(XY|Y)) - E(E(X|Y))E(Y) = E(YE(X|Y)) - E(E(X|Y))E(Y) = E(Y2Y) - E(2Y)E(Y) = 2\left[E(Y^2) - E(Y)^2\right] = 2Var(Y) = 2 \times 5 = 10$.

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bivariada com função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{25}\left(\frac{20-x}{x}\right) & \text{, se } 10 < x < 20, \frac{x}{2} < y < x \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}.$$

O valor de $P(Y \geq 8|X = 12)$ é igual a ...

☐ **i)** 1/2. ☒ **ii)** 2/3.
☐ **iii)** 3/4. ☐ **iv)** 1/3.
☐ **v)** Nenhuma das alternativas anteriores.

Resposta: Por definição $P(Y \geq 8|X = 12) = \int_8^{+\infty} f_{Y|X=12}(y)dy$. Note que $f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$ com x fixo e $f_X(x) = \int_{x/2}^{x} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{x/2}^{x} \frac{1}{25}\left(\frac{20-x}{x}\right)dy = \left[\frac{y}{25}\left(\frac{20-x}{x}\right)dy\right]_{y=x/2}^{y=x} = \frac{x}{25}\left(\frac{20-x}{x}\right) - \frac{x}{50}\left(\frac{20-x}{x}\right) = \frac{x}{50}\left(\frac{20-x}{x}\right) = \frac{20-x}{50}$, se $10 < x < 20$. Logo

$$\begin{aligned} f_{Y|X=12}(y) &= \begin{cases} \frac{\frac{1}{25}\left(\frac{20-12}{12}\right)}{\frac{20-12}{50}} & se\ \frac{12}{2} < y < 12 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{6} & se\ 6 < y < 12 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \end{aligned}$$

$P(Y \geq 8|X = 12) = \int_8^{12} \frac{1}{6}dy = \left[\frac{y}{6}\right]_{y=8}^{y=12} = \frac{12}{6} - \frac{8}{6} = \frac{2}{3}$