Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão

2º Semestre 2019/2020

Processos Estocásticos e Aplicações

EXAME ÉPOCA NORMAL

22 de Junho 2020

Duração: 90min

SOLUÇÃO

Parte I

Considere uma cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ no espaço de estados $\{1,2,3,4,5\}$ com matriz de transição

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) (3 valores) Determine a decomposição do espaço de estados em classes de comunicação, classifique os respectivos estados (recorrente/transiente) e determine o seu período.

Solução: $1 \to 5 \to 3 \to 5 \to 1$, $2 \to 4 \to 2$ e $\{2,4\}$ é um conjunto fechado. Assim, $C(1) = \{1,3,5\}$ e $C(2) = \{2,4\}$. Como S é finito, os estados de $C(2)$ são recorrentes positivos. Como $C(1)$ é aberto, todos os estados de $C(1)$ são transientes. Decomposição do espaço de estados: $S = \{1,3,5\} \cup \{2,4\}$. Relativamente ao período, segue de $P_{2,2} > 0$ que $\mathrm{Per}(2) = \mathrm{Per}(4) = 1$ uma vez que o período é invariante na classe de comunicação. Logo, os estados de $C(2)$ são ergódicos. Como $P^n_{1,1} > 0$ sse n é par, concluí-se também que $\mathrm{Per}(1) = \mathrm{Per}(3) = \mathrm{Per}(5) = 2$.

(2) (3 valores) Determine as distribuições estacionárias da cadeia.

Solução: Como S é finito, existe pelo menos um estado recorrente positivo, e todos os estados recorrentes comunicam entre si, concluí-se que existe uma única distribuição estacionária π. Como 1,3 e 5 são transientes, temos que $\pi_1 = \pi_3 = \pi_5 = 0$. Assim, resta calcular π_2 e π_4. Restringindo na sub-cadeia $C(2) = \{2,4\}$ temos que

$$\begin{cases} \pi_2 = \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_4 \\ \pi_4 = \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_4 \end{cases}$$

Com a condição $\pi_2 + \pi_4 = 1$, o sistema tem uma única solução $\pi_2 = \frac{3}{7}$ e $\pi_4 = \frac{4}{7}$. Portanto,

$$\pi = \left(0, \frac{3}{7}, 0, \frac{4}{7}, 0\right).$$

(3) (2 valores) Calcule $\lim_{n\to+\infty} P_{5,5}^{(n)}$.

Solução: Como 5 é transiente, segue que $\sum_{n=0}^{\infty} P_{5,5}^{(n)} < \infty$, o que implica $\lim_{n\to\infty} P_{5,5}^{(n)} = 0$.

Parte II

(1) (2 valores) Seja $N(t)$ um processo de Poisson com intensidade $\lambda > 0$. Calcule:

$$\mathbb{P}(W_2 > 1 | N(3) = 4)$$

Solução: Da igualdade de eventos $\{W_2 > 1\} = \{N(1) < 2\}$ segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W_2 > 1|N(3) = 4) &= \mathbb{P}(N(1) < 2|N(3) = 4) \\
&= \mathbb{P}(N(1) = 0|N(3) = 4) + \mathbb{P}(N(1) = 1|N(3) = 4) \\
&= C_0^4 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 + C_1^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\
&= \frac{16}{27}
\end{aligned}$$

(2) (4 valores) Sejam $\lambda, \mu > 0$ e considere um processo de nascimento e morte $\{X(t)\colon t \geq 0\}$ com taxa de nascimento $\lambda_n = \lambda$, $n \geq 0$ e taxa de morte $\mu_n = n\mu$, $n \geq 1$. Calcule:

$$\lim_{t\to+\infty} E(X(t))$$

Solução: Primeiro calculamos a distribuição estacionária π do processo. Como

$$\theta_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} = \frac{\lambda\lambda \cdots \lambda}{1\mu 2\mu \cdots n\mu} = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n},$$

vem que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} = e^{\lambda/\mu}$$

Então,

$$\pi_n = \frac{\theta_n}{\sum_n \theta_n} = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} e^{-\lambda/\mu}$$

Note-se que π é a distribuição de Poisson com parâmetro λ/μ. Como o processo tem uma distribuição estacionária e é irredutível, concluí-se que a distribuição limite é igual à distribuição estacionária. Portanto,

$$\lim_{t\to+\infty} E(X(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Parte III

(1) Considere um processo de Bernoulli $(X_n)_{n\geq 1}$ iid onde $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ e $\mathbb{P}(X_n = 0) = q$ com $p+q=1$ e $p,q>0$. Seja

$$T = \min\{n \geq 1\colon X_n = 1\}.$$

(a) (3 valores) Mostre que $Z_n = q^{-n}\chi_{\{T>n\}}$, $n \geq 1$ é uma martingala.
(b) (1 valor) Calcule $E(Z_n)$.

Solução:
(a)

- Z_n é integrável, uma vez que

$$E(|Z_n|) = E(|q^{-n}\chi_{\{T>n\}}|) = E(q^{-n}\chi_{\{T>n\}}) = q^{-n}\mathbb{P}(T>n) < \infty.$$

- Relativamente à propriedade de martingala, observamos primeiro que

$$\chi_{\{T>n+1\}} = \chi_{\{T>n\}}\chi_{\{X_{n+1}=0\}},$$

uma vez que

$$\{T > n+1\} = \{X_1 = 0, \ldots, X_n = 0, X_{n+1} = 0\} = \{T > n, X_{n+1} = 0\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
E(Z_{n+1}|Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) &= E(q^{-n-1}\chi_{\{T>n+1\}}|Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) \\
&= q^{-1}E(q^{-n}\chi_{\{T>n\}}\chi_{\{X_{n+1}=0\}}|Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) \\
&= q^{-1}E(Z_n\chi_{\{X_{n+1}=0\}}|Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) \\
&= q^{-1}z_nE(\chi_{\{X_{n+1}=0\}}|Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) \\
&= q^{-1}z_nE(\chi_{\{X_{n+1}=0\}}|X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \\
&= q^{-1}z_nE(\chi_{\{X_{n+1}=0\}}) \\
&= q^{-1}z_n\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\
&= q^{-1}z_nq \\
&= z_n
\end{aligned}$$

(b) Uma martingala tem valor esperado constante. Logo, $E(Z_n) = E(Z_1) = q^{-1}\mathbb{P}(X_1 = 0) = q^{-1}q = 1$.

(2) (2 valores) Sejam $\{B_1(t)\}_{t\geq 0}$ e $\{B_2(t)\}_{t\geq 0}$ movimentos Brownianos independentes. Determine os valores de α e β tal que

$$X(t) = \alpha B_1(t) + \beta B_2(t)$$

é um movimento Browniano.

Solução:

- $X(0) = \alpha B_1(0) + \beta B_2(0) = 0$.
- Os incrementos $X(t) - X(s)$ tem distribuição normal com média zero e variância $(\alpha^2+\beta^2)(t-s)$, i.e., $X(t) - X(s) \sim \mathcal{N}(0, (\alpha^2 - \beta^2)(t-s))$. De facto,

$$\begin{aligned}
X(t) - X(s) &= \alpha(B_1(t) - B_1(s)) + \beta(B_2(t) - B_2(s)) \\
&= \alpha U_1(s,t) + \beta U_2(s,t)
\end{aligned}$$

onde $U_i(s,t) = B_i(t) - B_i(s)$, $i = 1, 2$, é Gaussiana com distribuição $\mathcal{N}(0, t-s)$. Como $U_1(s,t)$ é independente de $U_2(s,t)$, segue que $X(t) - X(s)$ é também Gaussiana com

$$E(X(t) - X(s)) = \alpha E(U_1(s,t)) + \beta E(U_2(s,t)) = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0$$

e

$V(X(t) - X(s)) = \alpha^2 V(U_1(s,t)) + \beta^2 V(U_2(s,t)) = \alpha^2 (t-s) + \beta^2 (t-s)$

Assim, concluímos que $X(t)$ tem incrementos estacionários e Gaussianos com média zero e variância $t-s$ sse $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

- Queremos mostrar que os incrementos de $X(t)$ são independentes, ou seja, para quaisquer instantes $t_1 < \cdots < t_n$, os incrementos

  $$X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1}) \quad \text{são independentes.}$$

  Como os incrementos tem distribuição normal com média zero, basta verificar que para quaisquer $s < t < u < v$,

  $$E\left[(X(t) - X(s))(X(v) - X(u))\right] = 0.$$

  Assim,

$$\begin{aligned} E\left[(X(t) - X(s))(X(v) - X(u))\right] &= E\left[(X(t) - X(s))(X(v) - X(u))\right] \\ &= E\left[(\alpha U_1(s,t) + \beta U_2(s,t))\left(\alpha U_1(u,v) + \beta U_2(u,v)\right)\right] \\ &= \alpha^2 E\left[U_1(s,t) U_1(u,v)\right] + \alpha\beta E\left[U_1(s,t) U_2(u,v)\right] \\ &+ \alpha\beta E\left[U_2(s,t) U_1(u,v)\right] + \beta^2 E\left[U_2(s,t) U_2(u,v)\right] \end{aligned}$$

  Segue da independência dos incrementos que

  $$E\left[U_1(s,t) U_1(u,v)\right] = E\left[U_2(s,t) U_2(u,v)\right] = 0$$

  e da independência de B_1 e B_2 que

  $$E\left[U_1(s,t) U_2(u,v)\right] = E\left[U_2(s,t) U_1(u,v)\right] = 0$$

- Finalmente, uma vez que $X(t)$ é uma combinação linear (função contínua) de funções contínuas, concluímos que tem trajetórias contínuas qtp.

Conclusão: o processo estocástico $X(t)$ é um movimento Browniano sse $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.