INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO - UNIVERSIDADE DE LISBOA

**ESTATÍSTICA I – 2.º Ano/GES FIN – 2.º Semestre 2019/20 – Exame - Época Recurso - Parte A**

**NOME:** ______________________________________________

**ASSINATURA:**__________________________________________ **N.º:**________

**Atenção:** Nas perguntas com alternativas, uma resposta certa vale 1.4 valores. Note que nestas perguntas apenas uma resposta está correta.

---

**1.** Uma empresa possui 4 meios de transporte $T_1$, $T_2$, $T_3$ e $T_4$ para colocar os seus produtos num determinado supermercado. A probabilidade destes transportes se atrasarem são, respetivamente, 0.1, 0.22 e 0.15 e 0.2. Estes meios de transporte são empregues com probabilidades 0.3, 0.2, 0.4 e 0.1 respetivamente. Sabendo que os produtos chegaram com atraso ao supermercado num dia escolhido ao acaso, a probabilidade (arredondada a 4 casas decimais) dos mesmos terem sido transportados por $T_1$ é...

**a)** 0.1948. ☒
**b)** 0.2857. ☐
**c)** 0.3896. ☐
**d)** 0.1299. ☐
**e)** Nenhuma das alternativas anteriores. ☐

**Resposta:** Considere os acontecimentos A-chega atrasado, $T_i-$ transporte $T_i$ foi empregue. $P(A) = P(A|T_1)P(T_1) + P(A|T_2)P(T_2) + P(A|T_3)P(T_3) = 0.1 \times 0.3 + 0.22 \times 0.2 + 0.15 \times 0.4 + 0.2 \times 0.1 = 0.154$.
Logo pelo teorema de Bayes $P(T_1|A) = \frac{P(A|T_1)P(T_1)}{P(A)} = \frac{0.1\times 0.3}{0.154} = 0.1948$.

**2.** Sejam $X$ e $Y$ duas variáveis aleatórias discretas com função de probabilidade conjunta dada por:

| | $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $Y$ | | | | |
| 1 | | 1/9 | 1/9 | 1/18 |
| 2 | | 1/9 | 1/18 | 1/6 |
| 3 | | 1/9 | 2/9 | 1/18 |

O valor de $E(X|Y=1)$ é dado por...

**a)** 16/7. ☐
**b)** 13/6. ☐
**c)** 13/7. ☐
**d)** 9/5. ☒
**e)** Nenhuma das alternativas anteriores. ☐

**Resposta:** $P(Y=1) = P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=1) + P(X=3, Y=1)$
$= 1/9 + 1/9 + 1/18 = \frac{5}{18}$
$E(X|Y=1) = 1\frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)} + 2\frac{P(X=2,Y=1)}{P(Y=1)} + 3\frac{P(X=3,Y=1)}{P(Y=1)} =$
$= 1 \times \frac{1/9}{\frac{5}{18}} + 2 \times \frac{1/9}{\frac{5}{18}} + 3 \times \frac{1/18}{\frac{5}{18}} = \frac{9}{5}$

**3.** Considere uma variável aleatória $X$ com se seguinte função probabilidade:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_X(x)$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.3 | 0.1 |

Seja $Y = 6X - 8$. O valor de $E(Y)$ é igual a...

**a)** 4.2. ☐
**b)** 5.3. ☐
**c)** 10.6. ☒
**d)** 16.6. ☐
**e)** Nenhuma das alternativas anteriores. ☐

**Resposta:** $E[Y] = E[6X-8] = 6E[X] - 8 = 6 \times \left(\sum_{i=1}^{5} x_i f(x_i)\right) - 8 = 6 \times 3.1 - 8 = 10.6$

**4.** Seja $X$ uma variável aleatória com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. O valor de $P(|X - \mu| < \sigma)$ é aproximadamente...

**a)** 0.5398. ☐
**b)** 0.5762. ☐
**c)** 0.6826. ☐
**d)** 0.8664. ☒
**e)** 0.6318. ☐

**Resposta:** Para calcularmos a probabilidade pedida devemos notar que

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

Assim

$$\begin{aligned} P(|X-\mu| < \sigma) &= P(|Z| < 1) = P(-1 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826 \end{aligned}$$

**5.** O João e a Maria compraram, em conjunto, 5 livros que decidiram dividir inicialmente pelos dois de forma aleatória. Seja $X$ a variável aleatória que representa o número de livros que o João tem em sua casa e assuma que a função probabilidade de $X$ é dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = 0, 1, \cdots, 5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

O número de livros que a Maria tem em sua casa é representado por $5 - X$. Sabendo que a Maria tem mais do que um livro em sua casa, a probabilidade de o João ter mais do que dois livros na casa dele é igual a...

**a)** 1/2. ☐
**b)** 3/4. ☐
**c)** 1/5. ☐
**d)** 3/10. ☐
**e)** 1/4. ☒

**Resposta:** A probabilidade pedida é dada por

$$P(X > 2 \,|\, 5 - X > 1) = P(X > 2 \,|\, X < 4) = \frac{P(X = 3)}{P(X \leq 3))} = \frac{1/6}{4/6} = \frac{1}{4}.$$

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO - UNIVERSIDADE DE LISBOA

**ESTATÍSTICA I – 2.º Ano/GES FIN – 2.º Semestre 2019/20 – Exame - Época Recurso - Parte B**

**NOME:** ______________________________________________

**ASSINATURA:**_________________________________________ **N.º:**________

**Atenção:** Nas perguntas com alternativas, uma resposta certa vale 1.75 valores. Note que nestas perguntas apenas uma resposta está correta.

---

**1.** Duas Empresas **A** e **B** fazem a abertura de furos de captação de água numa dada região. A empresa **A** cobra 3000 € por furo, independentemente da sua profundidade. A empresa **B** cobra, por furo, 1060.2 € mais 25 € por cada metro de profundidade do furo. Na região em questão, a profundidade dos furos segue uma distribuição normal com média 75 m e desvio padrão 12 m e a profundidade dos furos é independente de furo para furo. Supondo que a empresa **B** abriu 25 furos num dado mês, a probabilidade de o preço de abertura desses furos ter sido inferior ao valor que a empresa **A** cobraria se fosse ela a abrir os furos arredondada a 4 casas decimais é igual a...

- **a)** 0.9515. ☐
- **b)** 0.7611. ☐
- **c)** 0.6368. ☐
- **d)** 0.8599. ☒
- **e)** Nenhuma das alternativas anteriores. ☐

**Resposta:** Seja $Y_i$ a profundidade de cada furo. A empresa B cobra $25 \times 1060.2 + 25 \sum_{i=1}^{25} Y_i$ euros. A empresa A cobra $3000 \times 25 = 75000$ euros. Nós queremos calcular

$$\begin{aligned}
& P\left(25 \times 1060.2 + 25 \sum_{i=1}^{25} Y_i < 75000.0\right) \\
= \; & P\left(\sum_{i=1}^{25} Y_i < \frac{75000.0 - 25 \times 1060.2}{25}\right) \\
= \; & P\left(\sum_{i=1}^{25} Y_i < 1939.8\right) \\
= \; & P\left(\frac{\sum_{i=1}^{25} Y_i - 75 \times 25}{\sqrt{25} \times 12} < \frac{1939.8 - 75 \times 25}{\sqrt{25} \times 12}\right) \\
= \; & \Phi(1.08) = 0.8599.
\end{aligned}$$

**2.** Para avaliar a qualidade de dois métodos de ensino diferentes, formou-se, de forma aleatória, dois grupos independentes de 15 alunos que serão ensinados com um dos dois métodos. Assuma-se que $X_1$ e $X_2$ são variáveis aleatórias independentes que representam respetivamente as notas de um aluno do grupo 1 e de um aluno do grupo 2 e que são tais que

$$X_1 \sim N(\mu, 6) \quad \text{e} \quad X_2 \sim N(15, 9).$$

Tendo em conta que a probabilidade de que a média das notas dos alunos do grupo 1 exceda em mais de 1 valor a média das notas dos alunos do grupo 2 é igual a 0.4, qual o valor de $\mu$?

**a)** 15.158. ☐

**b)** 15.476. ☐

**c)** 15.747. ☒

**d)** 16.000. ☐

**e)** Nenhuma das alternativas anteriores. ☐

**Resposta:** Seja $(X_{i,1}, \cdots, X_{i,15})$ a amostra aleatória que representa a notas dos alunos do grupo $i = 1, 2$. Assim $X_{i,j}$ é independente e identicamente distribuida a $X_i$ com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, \cdots, 15$. A probabilidade descrita pode ser formalizada como

$$0.4 = P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 1) = P\left(\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu - 15)}{\sqrt{\frac{6}{15} + \frac{9}{15}}} > \frac{1 - (\mu - 15)}{\sqrt{\frac{6}{15} + \frac{9}{15}}}\right)$$

Tendo em conta que

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu - 15)}{\sqrt{\frac{6}{15} + \frac{9}{15}}} \sim N(0, 1),$$

obtemos

$$0.4 = P(Z > 16 - \mu).$$

Assim, pela Tabela 5 do livro, temos que

$$16 - \mu = 0.253 \Leftrightarrow \mu = 15.747$$

**3.** Admita que foram lançados simultaneamente 3 dados regulares. Qual a probabilidade de a soma das pontuações obtidas nos 3 dados ser 10 sabendo que foram obtidas pontuações diferentes nos 3 dados?

**a)** 5%. ☐

**b)** 10%. ☐

**c)** 15% . ☒

**d)** 20%. ☐

**e)** Nenhuma das alternativas anteriores. ☐

**Resposta:** A: Acontecimento em que a soma das pontuaç■es obtidas nos 3 dados é 10
B: Acontecimento em que são obtidas pontuações diferentes nos 3 dados

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(B) = \frac{\#\text{favoráveis}}{\#\text{possíveis}} = \frac{6 \times 5 \times 4}{6 \times 6 \times 6}$

Existem apenas 3 combinações de pontuações diferentes que somam 10 - $(1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 3, 5)$ - e que podem aparecer em qualquer ordem. Assim:

$P(A \cap B) = \frac{\#\text{favoráveis}}{\#\text{possíveis}} = \frac{3 \times 3!}{6 \times 6 \times 6}$. Logo

$$P(A|B) = \frac{\frac{3 \times 3!}{6 \times 6 \times 6}}{\frac{6 \times 5 \times 4}{6 \times 6 \times 6}} = 0.15$$

**4.** Seja $X$ uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} c(x + \sqrt{x}) & \text{, se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases},$$

em que $c$ é uma constante. Seja $F_Y(y)$ a função distribuição de $Y = 1/X$. A expressão de $F_Y(y)$, para $0 < y < 1$, é dada por...

**a)** $1 - \frac{3}{7}\frac{1}{y} - \frac{4}{7}\frac{1}{y^{3/4}}$. ☐

**b)** $1 - \frac{3}{7}\frac{1}{y^2} - \frac{4}{7}\frac{1}{y\sqrt{y}}$. ☒

**c)** $1 - \frac{3}{7}\frac{1}{y^4} - \frac{4}{7}\frac{1}{y^3}$. ☐

**d)** $1 - \frac{3}{7}\frac{1}{y^{2/3}} - \frac{4}{7}\frac{1}{\sqrt{y}}$. ☐

**e)** Nenhuma das alternativas anteriores.☐

**Resposta:** Se $f(x)$ é a função densidade de probabilidade da variavel aleatória $X$ então verifica:

$$\int_0^1 f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 [c(x+\sqrt{x})]dx \Leftrightarrow c\left[\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 \Leftrightarrow c = \frac{6}{7}$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{1}{X} \leq y\right) = P\left(X \geq \frac{1}{y}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{1}{y}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$F_X(x) = \int_0^x f(u)du = \int_0^x \left[\frac{6}{7}(u+\sqrt{u})\right]du = \frac{6}{7}\left[\frac{u^2}{2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^x = \frac{6}{7}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^{3/2}\right]$$

Logo,

$$F_Y(y) = 1 - \frac{6}{7}\left[\frac{1}{2y^2} + \frac{2}{3}\frac{1}{y\sqrt{y}}\right] = 1 - \frac{3}{7}\frac{1}{y^2} - \frac{4}{7}\frac{1}{y\sqrt{y}}$$

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO - UNIVERSIDADE DE LISBOA

**ESTATÍSTICA I – 2.º Ano/GES FIN – 2.º Semestre 2019/20 – Exame - Época Recurso - Parte C**

**NOME:** ______________________________________________

**ASSINATURA:**________________________________________ **N.º:**________

**Atenção:** Nas perguntas com alternativas, uma resposta certa vale 2 valores. Note que nestas perguntas apenas uma resposta está correta.

---

**1.** Sejam $X_1$ e $X_2$ duas variáveis aleatórias independentes, ambas com distribuição exponencial com parâmetro 2. Defina $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2\}$ e $X_{(2)} = \max\{X_1, X_2\}$. O valor esperado da variável aleatória $Z = X_{(1)} - 2X_{(2)}$ é dado por...

**a)** $-5/6$. ☐

**b)** $-5/2$. ☐

**c)** $-5/8$. ☐

**d)** $-5/4$. ☒

**e)** Nenhuma das alternativas anteriores. ☐

**Resposta:** Note que $Z = X_{(1)} - 2X_{(2)} = X_{(1)} - 2X_{(2)} - 2X_{(1)} + 2X_{(1)} = 3X_{(1)} - 2(X_{(1)} + X_{(2)}) = 3X_{(1)} - 2(X_1 + X_2)$, porque $X_{(1)} + X_{(2)} = X_1 + X_2$. Pelas propriedades da variável aleatória exponencial $X_{(1)} \sim \exp(4)$. Logo $E(Z) = 3E(X_{(1)}) - 2 \times (E(X_1) + E(X_2)) = \frac{3}{4} - 2 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$.

**2.** Seja $(X, Y)$ uma variável aleatória bidimensional tal que

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 3x, & 0 < x < 1,\, 0 < y < x \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

O valor de $P(Y < 1 - X)$ é ...

**a)** $3/64$. ☐

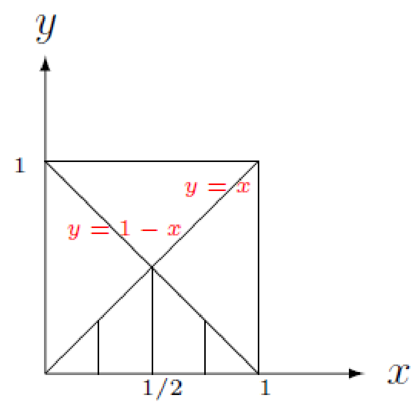
**b)** $3/8$. ☒

**c)** $1/9$. ☐

**d)** $1/72$. ☐

**e)** Nenhuma das alternativas anteriores. ☐

**Resposta:** Para calcularmos a probabilidade pedida, temos que integrar a função densidade conjunta no domínio em causa. Note-se que o domínio de integração pode ser representado da seguinte forma:



Assim,

$$P(Y < 1 - X) = \int_0^{1/2}\int_0^{x} 3xdydx + \int_{1/2}^{1}\int_0^{1-x} 3xdydx$$
$$= \int_0^{1/2} 3x^2dx + \int_{1/2}^{1} 3x(1-x)dx = \frac{3}{8}$$

**3.** Um grupo de 8 indivíduos entra simultaneamente num elevador no piso 0 de determinado edifício. Cada indivíduo escolhe aleatoriamente um dos 8 pisos que existem para sair, sendo que as escolhas dos indivíduos são independentes. O elevador só pára em determinado piso se pelo menos um indivíduo pretender sair nesse piso e não admite a entrada de mais indivíduos. O valor esperado do número de paragens do elevador arredondado a 4 casas decimais é dado por...

**a)** 5.2511. ☒
**b)** 6.3626. ☐
**c)** 4.2410. ☐
**d)** 7.1856. ☐
**e)** Nenhuma das alternativas anteriores. ☐

**Resposta:** $X$ : variável aleatória que representa o número de pisos em que o elevador não pára. $X_j$ : variável aleatória que assume o valor 1 se o elevador não pára no piso $j$ com $j = 1, \ldots, 8$ (Bernoulli). $X = \sum_{j=1}^{8} X_j$. $P(X_j = 1) = \left(\frac{8-1}{8}\right)^8$ e $E[X_j] = 1 \times P(X_j = 1) = \left(\frac{8-1}{8}\right)^8$. $E[X] = E\left[\sum_{j=1}^{8} X_j\right] = \sum_{j=1}^{8} E[X_j] = 8\left(\frac{8-1}{8}\right)^8$. $Y = 8 - X$ variável aleatória que representa o número de paragens do elevador. $E[Y] = E[8 - X] = 8\left(1 - \left(\frac{8-1}{8}\right)^8\right) = 5.2511$.