Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão

2º Semestre 2019/2020

Processos Estocásticos e Aplicações

EXAME ÉPOCA RECURSO

6 de Julho 2020

Duração: 90min

Parte I

Considere uma cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ no espaço de estados $\{1,2,3,4,5\}$ com matriz de transição

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) (3 valores) Determine a decomposição do espaço de estados em classes de comunicação, classifique os respectivos estados (recorrente/transiente) e determine o seu período.

Soluçao: $C(1) = \{1,5\}$, $C(2) = \{2,4\}$, $C(3) = \{3\}$. As classes $C(1)$ e $C(3)$ são fechadas. A classe $C(2)$ é aberta. Como S é finito, concluímos que os estados de $C(1)$ e $C(3)$ são recorrentes positivos, enquanto que os estados de $C(2)$ são transientes. Temos a decomposição: $S = \{2,4\} \cup \{1,5\} \cup \{3\}$. Em relação ao período temos que $\mathrm{Per}(1) = \mathrm{Per}(5) = 1$, $\mathrm{Per}(2) = \mathrm{Per}(4) = 2$ e $\mathrm{Per}(3) = 1$.

(2) (3 valores) Determine as distribuições estacionárias da cadeia.

Soluçao: A subcadeia formada pelos estados $\{1,5\}$ tem distribuição estacionária $\nu = (2/3, 0, 0, 0, 1/3)$, e a subcadeia formada pelo estado absorvente $\{3\}$ tem distribuição estacionária $\mu = (0,0,1,0,0)$. Logo,

$$\pi = \lambda\nu + (1-\lambda)\mu, \quad \lambda \in [0,1].$$

(3) (2 valores) Sabendo que $X_0 = 2$, calcule a probabilidade de a cadeia ser absorvida no estado 3.

Soluçao: Como $h_1 = h_5 = 0$ e $h_3 = 1$, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} h_2 = \frac{1}{4}h_2 + \frac{1}{4}h_3 + \frac{1}{2}h_4 \\ h_4 = \frac{1}{2}h_2 + \frac{1}{2}h_5 \end{cases}$$

obtemos que $h_2 = \frac{1}{3}$.

Parte II

(1) (2 valores) Considere um processo de Poisson $N(t)$ com intensidade $\lambda > 0$. Seja W_n o tempo de ocorrência do n-ésimo evento e $t > 0$.
Calcule:

$$E(W_3 | W_2 = t)$$

Soluçao: Sabemos que $W_3 = W_2 + T_3$ onde T_3 é independente de W_2 e tem distribuição exponencial com parâmetro λ. Logo,

$$E(W_3|W_2 = t) = E(W_2 + T_3|W_2 = t) = E(t + T_3|W_2 = t) = t + E(T_3) = t + \frac{1}{\lambda}$$

(2) Seja $X(t)$ uma cadeia de Markov a tempo contínuo no espaço de estados $S = \{1, 2, 3\}$ com matriz de intensidades

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) (2 valores) Escreva a equação progressiva de Kolmogorov para $p'_{1,1}(t)$ e calcule $p_{1,2}(t)$ sabendo que $p_{1,1}(t) = \frac{e^{-3t}}{6} + \frac{e^{-t}}{2} + \frac{1}{3}$.

Soluçao: De $P' = PQ$ obtemos

$$p'_{1,1}(t) = -p_{1,1}(t) + p_{1,2}(t)$$

Assim,

$$p_{1,2}(t) = p'_{1,1}(t) + p_{1,1}(t) = \frac{1}{3} - \frac{e^{-3t}}{3}$$

(b) (2 valores) Calcule

$$\lim_{t\to+\infty} E(X(t))$$

Soluçao: A cadeia e irredutível e admite uma distribuição estacionaria

$$\pi Q = 0 \Leftrightarrow \pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Logo, a distribuição limite é igual à distribuição estacionária. Assim

$$\lim_{t\to+\infty} E(X(t)) = \pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 = 2.$$

Parte III

(1) Seja $(\xi_n)_{n\geq 1}$ uma sequência iid tal que $\mathbb{P}(\xi_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Considere o passeio aleatório

$$X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Define-se, para $a > 0$,

$$Z_n = e^{-aX_n} 2^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) (3 valores) Determine o valor de a para o qual $(Z_n)_{n\geq 1}$ é uma martingala.

Soluçao:

- $E(|Z_n|) \leq 2^{-n} e^{an} < \infty$

•

$$
\begin{aligned}
E(Z_{n+1}|Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) &= E(e^{-aX_{n+1}}2^{-n-1}|Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) \\
&= 2^{-1}E(e^{-aX_n}2^{-n}e^{-a\xi_{n+1}}|Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) \\
&= 2^{-1}E(Z_n e^{-a\xi_{n+1}}|Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) \\
&= z_n 2^{-1}E(e^{-a\xi_{n+1}}|Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) \\
&= z_n 2^{-1}E(e^{-a\xi_{n+1}}) \\
&= z_n 2^{-1}\left(\frac{e^{-a}}{2} + \frac{e^{a}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Portanto, a tem que satisfazer a equação $e^{-a} + e^a = 4$. Ou seja, $(e^a)^2 - 4e^a + 1 = 0$. Resolvendo, $e^a = 2 \pm \sqrt{3}$. Como $a > 0$ temos que $e^a > 1$, logo $a = \log(2 + \sqrt{3})$.

Conclusão: Z_n é uma martingala quando $a = \log(2 + \sqrt{3})$.

(b) (1 valor) Calcule $E(2^{-\tau})$ onde

$$\tau = \min\{n \geq 1 \colon X_n = -1\}.$$

Soluçao: Como os estados do passeio aleatório simétrico são recorrentes, temos que $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$. Por outro lado, $|Z_n^\tau| \leq 2^{-n}e^a \leq e^a$, é uniformemente integrável. Para $a = \log(2+\sqrt{3})$, podemos aplicar o teorema da paragem opcional e concluir que $E(Z_\tau) = E(Z_1)$. Mas $E(Z_\tau) = E(e^{-aX_\tau}2^{-\tau}) = e^a E(2^{-\tau})$ e $E(Z_1) = 2^{-1}E(e^{-a\xi_1}) = 1$. Logo, $E(2^{-\tau}) = e^{-a} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

(2) (2 valores) Sejam $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ um movimento Browniano, $s > 0$ e

$$X(t) = B(t+s) - B(s), \quad t \geq 0.$$

Mostre que $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ é um movimento Browniano.

Soluçao:

- $X(0) = B(0+s) - B(s) = 0$
- Para $t > u$ temos que

$$X(t) - X(u) = B(t+s) - B(s) - B(u+s) + B(s) = B(t+s) - B(u+s)$$

Portanto, os incrementos de $X(t)$ são os mesmos de $B(t)$ transladados por s. Logo, $X(t)$ tem incrementos independentes.

- Relativamente à distribuição dos incrementos,

$$X(t) - X(u) \sim B(t+s) - B(u+s) \sim \mathcal{N}(0, t-u)$$

- Como $t \mapsto B(t+s)$ tem trajetórias contínuas, concluímos que $X(t)$ tem trajetórias contínuas.