Exercícios de Álgebra Linear

Subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$

Exercício 1.
Considere o vetor $v = (2, 4, -3)$. Determine se v pertence aos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

(a) $V_1 = \text{span}\ \{(1, 2, 0), (0, 0, 1)\}$;

(b) $V_2 = \text{span}\ \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$;

(c) $V_3 = \text{span}\ \{(2, 0, 0), (1, 3, 0), (1, 1, 1)\}$;

(d) $V_4 = \text{span}\ \{(1, 1, 1), (2, 0, 2), (3, 1, 3)\}$.

Exercício 2.
Averigue se as seguintes famílias de vetores são linearmente independentes:

(a) $\underline{a} = \{(-2, 4), (1, -2)\}$;

(b) $\underline{b} = \{(2, 1), (-6, -3)\}$;

(c) $\underline{c} = \{(2, 3), (3, 2)\}$;

(d) $\underline{d} = \{(0, 0, 3), (0, 1, 1), (2, 0, 1\}$;

(e) $\underline{e} = \{(2, 0, 0, 0), (1, 3, 0, 0), (4, 2, 1, 0), (2, 1, 2, 1)\}$;

(f) $\underline{f} = \{(1, 1, 1, 1), (0, -2, 3, 5), (3, 3, 3, 3), (1, 2, 2, -7)\}$.

Exercício 3.
Seja $\underline{u} = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ uma família de p vetores de $\mathbb{R}^n$ não nulos e dois a dois ortogonais.

(a) Mostre que a família $\underline{u}$ é linearmente independente.

(b) Aplicação: mostre que a família $\underline{u} = \{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (-3, 0, 3, 0)\}$ é linearmente independente.

Exercício 4.
Discuta, em função do parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$, a independência linear das seguintes famílias de vetores:

(a) $\underline{u} = \{(3, -1), (1, 1 + \lambda)\}$;

(b) $\underline{v} = \{(1, 2, 3), (-2, \lambda, -6)\}$.

Exercício 5.
Considere uma família $\underline{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ de vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^n$. Mostre que a família formada pelos vetores $v_1 = 2u_1$, $v_2 = u_1 + u_2$ e $v_3 = u_1 + 3u_3$ é também linearmente independente.

Exercício 6.
Mostre que os seguintes conjuntos são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$ e determine uma base e a dimensão da cada um:

(a) $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = y\}$;

(b) $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 3x = 2z\}$;

(c) $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = 2y = 3z\}$;

(d) $V_4 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x = y \wedge z = -w\}$;

(e) $V_5 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x = y = z\}$;

(f) $V_6 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x = z \wedge w = 0\}$.

Exercício 7.
Seja $\mathbf{0}$ o vetor nulo de $\mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^n$.

(a) Mostre que se V for um espaço vetorial se tem necessariamente $\mathbf{0} \in V$.

(b) O conjunto $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x = 3y \wedge 2z = 1 + w\}$ é um espaço vetorial? Justifique.

Exercício 8.
Considere os vetores $u_1 = (3, 5)$ e $u_2 = (1, 1)$.

(a) Mostre que $\{u_1, u_2\}$ é uma família linearmente independente.

(b) Justifique que $\{u_1, u_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

(c) Determine as coordenadas do vetor $v = (-2, 1)$ na base $\{u_1, u_2\}$.

Exercício 9.
Averígue quais das seguintes famílias formam bases de $\mathbb{R}^3$ e calcule as coordenadas do vetor $v = (1, 1, 1)$ nessas bases.

(a) $\underline{a} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$;

(b) $\underline{b} = \{(2, 0, 0), (4, 1, 0), (2, -2, 2)\}$;

(c) $\underline{c} = \{(1, 3, 0), (4, 2, 1)\}$;

(d) $\underline{d} = \{(1, 3, 0), (2, 6, 0), (0, 0, 1)\}$;

(e) $\underline{e} = \{(1, 3, 0), (4, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 1, 1)\}$;

(f) $\underline{h} = \{(3, 1, 0), (0, 0, 1), (3, 1, 2)\}$;

(g) $\underline{i} = \{(0, 2, 2), (1, 2, 0), (1, -1, 1)\}$.

Matrizes

Exercício 10.
Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Indique quais das seguintes operações estão definidas e calcule, se for o caso, a matriz resultante:

(a) $3A$

(b) $A + B$

(c) $B + C$

(d) $4C - 2D$

(e) AB

(f) $(CD)^T$

(g) $(2A)(5C)$

(h) A^2

(i) $(AC)^2$

(j) $(2A - BD)$

(k) $A^T A$

(l) $BC - CB$.

Exercício 11.
Determine os valores do parâmetro real α para os quais a matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha & \alpha^2 - 1 & -3 \\ \alpha + 1 & 2 & \alpha^2 + 4 \\ -3 & 4\alpha & -1 \end{bmatrix}$$

é simétrica.

Exercício 12.
Sejam A, B e C matrizes quadradas de mesma dimensão. Indique quais das seguintes proposições são necessariamente verdadeiras e forneça um contra-exemplo para as restantes.

(a) $A = B \Rightarrow AC = BC$.

(b) $AB = BA$.

(c) $AC = BC \Rightarrow A = B$.

(d) $AB = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$.

(e) $A + C = B + C \Rightarrow A = B$.

(f) $A^2 = I \Rightarrow A = \pm I$.

Exercício 13.
Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Explicite as dimensões das seguintes matrizes:

(a) A^T

(b) AA^T

(c) $A^T A$.

Exercício 14.
Seja A uma matriz quadrada tal que $A^T = 4A$. Mostre que A é a matriz nula.

Exercício 15.
Sejam $(L_i)_{1\leq i\leq n}$ e $(C_j)_{1\leq j\leq m}$ as famílias dos vetores linha e dos vetores coluna de uma dada matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$.
Mostre que se estas famílias forem ambas linearmente independentes, A é uma matriz quadrada.

Exercício 16.
Determine a característica das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -6 & -12 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & 0 & 0 \\ -2 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 3 & 6 & -6 & 19 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & -12 & 20 \\ 3 & -9 & 15 \\ 2 & -6 & 10 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Exercício 17.
Determine uma base do espaço vetorial gerado pelos vetores coluna das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 13 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 19 \end{bmatrix}$

Exercício 18.
Discuta a característica das seguintes matrizes em função do parâmetro $t \in \mathbb{R}$:

(a) $\begin{bmatrix} t & 0 & t^2-2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & t & t-1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} t+3 & 5 & 6 \\ -1 & t-3 & -6 \\ 1 & 1 & t+4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} t & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-t \end{bmatrix}$

Exercício 19.
Determine uma base dos seguintes espaços vetoriais:

(a) $V_1 = \text{span }\{(1,2,4),(2,3,5),(1,1,1)\}$.

(b) $V_2 = \text{span }\{(1,2,4,5,1),(2,3,5,7,1),(3,5,9,12,2),(1,0,1,0,1)\}$.

(c) $V_3 = \text{span }\{(1,-2,3,4,5),(2,-3,4,5,6),(-1,0,1,2,3)\}$.

Inversão de matrizes

Exercício 20. Considere, para $a, b \in \mathbb{R}$, as matrizes

$$A = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 16 & -8 & -8 \\ a & 2 & b \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sabe-se que $B = A^{-1}$. Determine os valores de a e de b.

Exercício 21.
Mostre que as seguintes matrizes são invertíveis e calcule a respetiva matriz inversa:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Exercício 22.
Mostre que uma matriz diagonal é invertível se e só se nenhum elemento da diagonal for nulo.

Exercício 23.
Seja A uma matriz quadrada tal que $5AA^T + 2A + 5I = 0$.
Mostre que A é invertível.

Exercício 24.
Para cada matriz A, efetue o cáculo indicado. Deduza que A é invertível e explicite A^{-1}.

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A^2 + A$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $A^3 - A$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $A^2 - 6A + 9I$.

Determinantes

Exercício 25. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule A^{-1} e B^{-1}.

(b) Calcule o determinante das matrizes A, B, A^T, B^T, $2A$, $3B$, AB, BA, A^{-1}, B^{-1} e $A^{-1}B$. Identifique as propriedades do determinante que estes cálculos ilustram.

Exercício 26.
Seja A uma matriz quadrada de ordem 4 com $\det(A) = 2$. Calcule

(a) $\det(A^2)$
(b) $\det(3A)$
(c) $\det(-A^{-1})$
(d) $\det(2A^T)$
(e) $\det(AA^TA^{-1})$
(f) $\det\left(\frac{1}{2}A^4\right)$.

Exercício 27.
Considere uma matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ invertível. Mostre que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Exercício 28.
Considere a matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -a & a & a & a \\ b & b & b & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, onde a e b são dois parâmetros reais.

Sabe-se que $\det(C) = 5$. Calcule o determinante da matriz $D = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ -2a & 2a & 2a & 2a \\ 7b & 7b & 7b & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Exercício 29.
Calcule os determinantes das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$
(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$
(f) $\begin{bmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
(g) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Exercício 30.
Calcule os determinantes das seguintes matrizes em função dos parâmetros reais a, b e c:

(a) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ b & 0 & a & a \\ 0 & b & a & a \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{bmatrix}$

Exercício 31.
Determine para que valores do parâmetro real λ as seguintes matrizes são invertíveis:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Sistemas Lineares

Exercício 32.
Para cada um dos seguintes sistemas lineares:

(1) Explicite a matriz ampliada correspondente e reduza-a a uma matriz em escada;
(2) Classifique o sistema e determine, se pertinente, o respetivo número de graus de liberdade;
(3) Resolva explicitamente o sistema.

(a) $\begin{cases} -2x - 3y + z = 3 \\ 4x + 6y - 2z = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ y + 2z = 1 \\ 2x + y + 4z = 2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x - y + 2z + w = 1 \\ 2x + y - z + 3w = 3 \\ x + 5y - 8z + w = 1 \\ 4x + 5y - 7z + 7w = 7 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + 3y + 2z + 4w = 0 \\ 2x + y - w = 1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x + y - z + w = 2 \\ 2x - y + z - 3w = 1. \end{cases}$

Exercício 33.
Classifique os sistemas seguintes em função dos parâmetros reais a e b:

(a) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ 2x - 2y + az = 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + y = a \\ x + 2y = a^2 \\ x + 3y = a^3 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} ax + z = 2 \\ x + y + z = 2 \\ 3x + y + 3z = 6 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ z - y + 2z = a \\ 2x + bz = 2 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} 2x + y = b \\ 3x + 2y + z = 0 \\ x + ay + z = 2 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} by + az = 1 \\ y + az = 0 \\ x + by = 0 \end{cases}$

Exercício 34.
Seja A uma matriz quadrada.

(a) Mostre que $\ker(A) \subset \ker(A^2)$.

(b) Deduza que $\mathrm{c}(A^2) \leq \mathrm{c}(A)$.

Exercício 35.
Mostre que as famílias seguintes formam uma base de V e explicite as coordenadas do vetor v nessa mesma base.

(a) $\underline{d} = \{(1,1,1),(0,3,5),(2,1,-1)\}$, $V = \mathbb{R}^3$, $v = (7,-2,-12)$.

(b) $\underline{e} = \{(1,2,1),(3,5,2),(-1,1,-1)\}$, $V = \mathbb{R}^3$, $v = (4,10,3)$.

(c) $\underline{f} = \{(1,1,1,1),(1,0,2,2),(0,3,1,4),(1,1,0,1)\}$, $V = \mathbb{R}^4$, $v = (7,14,8,21)$.

(d) $\underline{g} = \{(1,3,1,0,1),(1,2,2,2,-1),(0,3,1,4,-2),(1,1,0,1,0),(1,-1,1,-1,1)\}$, $V = \mathbb{R}^5$, $v = (4,9,2,8,-1)$.

Exercício 36.
Determine uma base do núcleo das seguintes matrizes e deduza as respetivas características.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

Exercício 37.
Mostre que o sistema
$$\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ 2x - y + z = 6 \\ x - y - 3z = -3. \end{cases}$$
é de Cramer e determine a respetiva solução.

Exercício 38.
Mostre que o sistema
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + z = 2 \\ y + z = 1. \end{cases}$$
é de Cramer e determine o valor da incógnita z da solução.

Exercício 39.
Mostre que, independentemente dos valores dos parâmetros reais a, b e c, o sistema
$$\begin{cases} 3x + y = a \\ x - y + 2z = b \\ 2x + 3y - z = c \end{cases}$$
é possível e determinado e calcule a respetiva solução de duas formas:

(a) Utilizando as fórmulas ditas de Cramer;

(b) Começando por calcular a matriz inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Modelos input-output

Exercício 40.
Duas oficinas automóveis, especializadas respetivamente em motores (M) e em embraiagens (E), utilizam frequentemente os serviços uma da outra. Para produzir trabalho no valor de um 1 euro, a oficina M utiliza os seus próprios recursos num valor de $0,5$ euros e 25 cêntimos de serviços da oficina E. Por seu lado, para vender 1 euro, a empresa E utiliza 10 cêntimos do seu próprio trabalho e 25 cêntimos em serviços da oficina M.

(a) Construa a matriz de consumo desta economia. Trata-se de uma economia rentável?

(b) Quanto devem produzir, em euros, cada uma destas empresas sabendo que existe uma procura externa de 7000 euros em trabalho para a oficina M e de 14000 euros para a oficina E?

Exercício 41.
Uma pequena loja de uma aldeia do século XIX vende água potável e lenha. O negócio consiste em recolher estes bens em dois locais distantes (um rio e uma floresta) e trazê-los para a aldeia. Cada viagem dura vários dias: os trabalhadores da loja precisam de beber enquanto estão em marcha e utilizar lenha durante as noites para se aquecerem.
Por cada litro de água recolhida no rio, os trabalhadores consomem durante a viagem $0,2$ litros de água e $0,3$ quilos de lenha.
Por cada quilo de lenha recolhida, os trabalhadores bebem $0,4$ litros de água e consomem $0,1$ quilos de lenha.
A aldeia necessita todos os meses de 2000 litros de água e 100 quilos de lenha. Quanta lenha e quanta água devem os trabalhadores recolher mensalmente?

Exercício 42.
Uma empresa tem 3 departamentos, cada um deles especializado na produção de um tipo de energia: Petróleo (P), Eletricidade (E) e Gás Natural (G).

- Para produzir uma unidade de Petróleo são necessárias:
  $0,2$ unidades de Gás Natural e $0,2$ unidades de Eletricidade;
- Para produzir uma unidade de Eletricidade são necessárias: $0,1$ unidades de Petróleo, $0,2$ unidades de Gás Natural e $0,1$ unidades de Eletricidade.
- Para produzir uma unidade de Gás Natural são necessárias: $0,2$ unidades de Petróleo, $0,1$ unidades de Gás Natural e $0,3$ unidades de Eletricidade.

(a) Construa a matriz de consumo desta empresa. Trata-se de uma empresa rentável?

(b) Quanto deve a empresa produzir para satisfazer uma procura externa de 450 unidades de Petróleo, 400 unidades de Gás Natural e 430 unidades de Eletricidade?

Exercício 43.
A economia de uma país imaginário decompõe-se em três setores: agricultura, serviços e energia. Para poder funcionar, cada um necessita de utilizar parte da produção dos 3 setores, segundo a seguinte tabela:

	Agricultura	Serviços	Eletricidade
Produzir 1 unidade agrícula consome:	40%	30%	50%
Produzir 1 unidade de serviços consome:	30%	10%	50%
Produzir 1 unidade energética consome:	30%	60%	0%

Supõe-se que a economia deste país é fechada, ou seja, não existe procura externa. Sabendo que a produção energética é de 10000 unidades, qual deve ser a produção dos restantes setores para que esta economia auto-subsista sem desperdícios?