



LISBON  
SCHOOL OF  
ECONOMICS &  
MANAGEMENT  
UNIVERSIDADE DE LISBOA

**Notas de Matemática I para as  
licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão**

Introdução à álgebra linear e ao  
cálculo diferencial e integral em  $\mathbb{R}$

*Filipa de Carvalho e Telmo Peixe*

**Departamento de Matemática**

1º Semestre  
2017/2018

# Índice

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>I Álgebra Linear</b>	<b>2</b>
<b>1 Vetores</b>	<b>3</b>
1.1 Operações com vetores . . . . .	3
1.1.1 Igualdade de vetores . . . . .	3
1.1.2 Adição de vetores . . . . .	4
1.1.3 Multiplicação de um vetor por um escalar . . . . .	4
1.1.4 Produto interno . . . . .	5
1.2 Norma e distância em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	6
1.2.1 Propriedades da norma . . . . .	6
1.3 Combinação linear de vetores em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	7
1.3.1 Dependência linear vs. independência linear . . . . .	7
1.4 Base de um espaço vetorial . . . . .	10
<b>2 Matrizes</b>	<b>12</b>
2.1 Operações com matrizes . . . . .	14
2.1.1 Adição de matrizes . . . . .	14
2.1.2 Multiplicação de uma matriz por um escalar . . . . .	15
2.1.3 Multiplicação de matrizes . . . . .	16
2.1.4 Matriz transposta . . . . .	18
2.2 Característica de uma matriz . . . . .	19
2.2.1 Operações elementares em matrizes . . . . .	20
2.2.2 Inversa de uma matriz . . . . .	22
2.2.3 Cálculo da matriz inversa . . . . .	24
2.3 Matrizes de Leontief . . . . .	26
<b>3 Determinantes</b>	<b>29</b>
3.1 Matrizes de ordem 1 e de ordem 2 . . . . .	29
3.2 Matrizes de ordem $n \geq 2$ - Teorema de Laplace . . . . .	30
3.3 Propriedades . . . . .	32

3.4	Operações elementares e o determinante . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Sistemas de equações lineares</b>	<b>36</b>
4.1	Equações lineares e sistemas de equações . . . . .	36
4.2	Classificação de sistemas . . . . .	37
4.3	Característica de matrizes e classificação de sistemas . . . . .	40
4.4	Resolução de sistemas . . . . .	41
4.5	Sistemas de Cramer . . . . .	43
4.5.1	Regra de Cramer . . . . .	43
<b>II</b>	<b>Análise Matemática</b>	<b>45</b>
<b>5</b>	<b>Números reais e séries</b>	<b>46</b>
5.1	Princípio de Indução Matemática . . . . .	46
5.2	Os números naturais, inteiros, racionais e irracionais . . . . .	48
5.2.1	Densidade dos números racionais em $\mathbb{R}$ . . . . .	49
5.3	Relação de ordem e intervalos em $\mathbb{R}$ . . . . .	49
5.4	Definições no conjunto ordenado: majorante, minorante, su- premo, ínfimo, máximo e mínimo . . . . .	50
5.5	Conjunto limitado . . . . .	51
5.6	Valor absoluto e propriedades . . . . .	52
5.7	Topologia em $\mathbb{R}$ . . . . .	53
5.8	Sucessões . . . . .	55
5.8.1	Definições gerais . . . . .	55
5.8.2	Topologia do conjunto $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ . . . . .	56
5.8.3	Estudo da sucessão de termo geral $u_n = a^n$ . . . . .	56
5.9	Séries . . . . .	57
5.9.1	Paradoxo de Zenão . . . . .	57
5.9.2	Definições gerais . . . . .	59
5.9.3	Série geométrica . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Funções reais de variável real</b>	<b>63</b>
6.1	Domínio e contradomínio . . . . .	63
6.2	Função polinomial e séries . . . . .	64
6.2.1	Série exponencial . . . . .	65
6.3	Propriedades gerais das funções . . . . .	65
6.3.1	Injetividade . . . . .	65
6.3.2	Monotonia . . . . .	66
6.3.3	Função Limitada . . . . .	66
6.3.4	Paridade . . . . .	66
6.3.5	Periodicidade . . . . .	67
6.4	Composição de funções . . . . .	67

6.5	Função inversa . . . . .	67
6.5.1	Funções trigonométricas inversas . . . . .	69
<b>7</b>	<b>Limites e continuidade</b>	<b>74</b>
7.1	Limites . . . . .	74
7.2	Continuidade . . . . .	74
7.2.1	Prolongamento por continuidade a um ponto . . . . .	74
<b>8</b>	<b>Cálculo diferencial</b>	<b>76</b>
8.1	Derivada de uma função num ponto . . . . .	76
8.2	Função derivada . . . . .	77
8.3	Derivação . . . . .	77
8.4	Derivada da função composta . . . . .	78
8.5	Derivada da função inversa . . . . .	79
8.6	Regra de Cauchy . . . . .	80
8.7	Máximos e mínimos locais e globais . . . . .	81
8.8	Derivadas sucessivas (ou de ordem superior) . . . . .	82
8.9	Classificação de pontos críticos . . . . .	84
8.10	Concavidades e inflexões . . . . .	85
<b>9</b>	<b>Cálculo integral</b>	<b>88</b>
9.1	Conceito de primitiva e propriedades . . . . .	88
9.2	Primitivação imediata . . . . .	89
9.3	Primitivação de funções racionais . . . . .	90
9.3.1	Fatorização de polinómios . . . . .	91
9.3.2	Frações elementares . . . . .	91
9.4	Primitivação por partes . . . . .	95
9.5	Primitivação por substituição . . . . .	96
9.6	A integração e a primitivação . . . . .	98
9.7	Integral definido e cálculo de áreas . . . . .	100
9.8	Integrais impróprios . . . . .	104
9.9	Teorema fundamental do cálculo integral . . . . .	106
	<b>Bibliografia</b>	<b>108</b>
	<b>Index</b>	<b>109</b>

# Introdução

Estas notas foram escritas para a disciplina de matemática I das licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão do ISEG - Lisbon School of Economics & Management da Universidade de Lisboa, com o objetivo de que sejam um auxiliar de estudo para os alunos destas licenciaturas. Contudo, para um bom estudo da matéria, não dispensam referências bibliográficas base, como são exemplo as referidas na bibliografia.

A apresentação da matéria divide-se em duas partes: a parte I de **Álgebra Linear** e a parte II de **Análise Matemática**. A parte I é constituída pelos capítulos: 1 Vetores; 2 Matrizes; 3 Determinantes; e 4 Sistemas de equações lineares. A parte II é constituída pelos capítulos: 5 Números reais e séries; 6 Funções reais de variável real; 7 Limites e continuidade; 8 Cálculo diferencial; e 9 Cálculo integral.

No final encontra-se um index para auxiliar na procura de nomes e conceitos que se encontram ao longo do texto.

Estas notas devem ser encaradas como um texto em constante desenvolvimento, pelo que quaisquer gralhas encontradas e/ou sugestões serão muito bem vindas pelos autores.

## Agradecimentos

Agradecemos à Professora Fátima Fabião a leitura atenta destas notas, as consequentes discussões profícuas e todas as sugestões dadas para a melhoria do texto.

## Nota

As secções 1.4 e 2.3 foram introduzidas pelo Professor Filipe Oliveira no 1º semestre do ano letivo 2018/2019.

Parte I  
Álgebra Linear

# Capítulo 1

## Vetores

Considerando  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais, define-se  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  como o conjunto cujos elementos são designados de **pares ordenados** (ou, mais em geral, **vetores de  $\mathbb{R}^2$** ) e que são da forma  $(x, y)$  em que ambos os seus elementos  $x$  e  $y$  pertencem a  $\mathbb{R}$ .

Analogamente, define-se  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  como o conjunto cujos elementos são designados de **ternos ordenados** (ou, mais em geral, **vetores de  $\mathbb{R}^3$** ) e que são da forma  $(x, y, z)$  em que todos os seus elementos  $x, y$  e  $z$  pertencem a  $\mathbb{R}$ .

Generalizando, dado um número natural  $n$ , define-se  $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ vezes}}$

como o conjunto cujos elementos são designados de **n-uplos** (ou, mais em geral, **vetores**) e que são da forma  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  em que todos os seus elementos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pertencem a  $\mathbb{R}$ .

### 1.1 Operações com vetores

Considerem-se dois vetores  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ .

#### 1.1.1 Igualdade de vetores

Diz-se que  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  são **iguais**, e escreve-se  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , se cada elemento do vetor  $\mathbf{x}$  for igual ao elemento homólogo do vetor  $\mathbf{y}$ , i.e., se  $x_i = y_i$  para todo o  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

### 1.1.2 Adição de vetores

Pode-se definir a **adição de dois vetores de  $\mathbb{R}^n$**  como sendo a soma elemento a elemento de cada um dos vetores, i.e.,  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ .

#### Propriedades da adição de vetores

**Proposição 1.1.1.** *Sejam  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  e  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  vetores de  $\mathbb{R}^n$  e seja  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$  o vetor de  $\mathbb{R}^n$  com todos os seus elementos iguais a 0. Tem-se que:*

1. *Comutatividade:  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ ;*
2. *Associatividade:  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ ;*
3. *Elemento neutro:  $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ ;*
4. *Elemento simétrico:  $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$ , em que  $-\mathbf{x}$  representa o vetor que se obtém do vetor  $\mathbf{x}$  multiplicando cada elemento por  $-1$ .*

*Demonstração.* Exercício. □

### 1.1.3 Multiplicação de um vetor por um escalar

Dado um  $\lambda \in \mathbb{R}$ , pode-se definir a operação de **multiplicação do vetor  $\mathbf{x}$  pelo escalar  $\lambda$**  como sendo o produto de cada elemento do vetor  $\mathbf{x}$  por  $\lambda$ , i.e.,  $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ .

#### Propriedades da multiplicação de um vetor por um escalar

**Proposição 1.1.2.** *Sejam  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  vetores de  $\mathbb{R}^n$  e sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Tem-se que:*

1. *Distributividade da adição de escalares relativamente à multiplicação por um vetor:  $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ ;*
2. *Distributividade da multiplicação de um escalar relativamente à adição de vetores:  $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ ;*
3. *Associatividade da multiplicação de escalares por um vetor:  $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$ ;*



4. Elemento neutro para a multiplicação de um vetor por um escalar:  
 $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ ;

5. Elemento absorvente para a multiplicação de um vetor por um escalar:  
 $0\mathbf{x} = (0, \dots, 0)$ .

*Demonstração.* Exercício. □

### 1.1.4 Produto interno

O **produto interno**, também designado de **produto escalar**, de vetores em  $\mathbb{R}^n$  é um número real definido por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^n x_iy_i.$$

**Exemplo 1.1.3.** *Sejam  $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (-3, 2, 5) \in \mathbb{R}^3$ . Tem-se*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \times (-3) + (-2) \times 2 + 3 \times 5 = -3 - 4 + 15 = 8.$$

#### Propriedades do produto interno

**Proposição 1.1.4.** *Sejam  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  e  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  vetores de  $\mathbb{R}^n$  e seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Tem-se:*

1. *Comutatividade do produto interno:  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ ;*
2. *Distributividade do produto interno relativamente à adição de vetores:  
 $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$ ;*
3. *Comutatividade da multiplicação por um escalar relativamente ao produto interno:  $(\alpha\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\alpha\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ ;*
4.  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$  e  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

*Demonstração.* 1. Exercício;

2. Tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n + z_n) \\ &= x_1(y_1 + z_1) + x_2(y_2 + z_2) + \dots + x_n(y_n + z_n) \\ &= x_1y_1 + x_1z_1 + x_2y_2 + x_2z_2 + \dots + x_ny_n + x_nz_n \\ &= (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) + (x_1z_1 + x_2z_2 + \dots + x_nz_n) \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}; \end{aligned}$$

3. Exercício;
4. Tem-se  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ , e como cada parcela  $x_i^2$  é sempre não negativa, então  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$  é sempre não negativo, i.e.,  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ . Mais,  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$  só é zero se cada parcela  $x_i^2$  for zero, donde  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$  se e só se  $\mathbf{x}$  for o vetor nulo.

□

## 1.2 Norma e distância em $\mathbb{R}^n$

Dado um vetor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , define-se a **norma** (ou comprimento) do vetor  $\mathbf{x}$ , e escreve-se  $\|\mathbf{x}\|$ , como sendo

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

ou seja

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

### 1.2.1 Propriedades da norma

**Proposição 1.2.1.** *Seja  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  um vetor de  $\mathbb{R}^n$  e seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Tem-se que:*

1.  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ ;
2.  $\|\mathbf{x}\| = 0$  se e só se  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ;
3.  $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$ .

*Demonstração.* Exercício.

□

Dados dois vetores  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , define-se a **distância** entre os vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , e escreve-se  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , como sendo

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

ou seja

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Usualmente esta distância designa-se por **distância Euclidiana**.

**Proposição 1.2.2 (Desigualdade triangular).** *Dados dois vetores de  $\mathbb{R}^n$ , tem-se que a norma da soma dos dois vetores é sempre menor ou igual à soma das suas normas, i.e., dados dois vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  de  $\mathbb{R}^n$ , tem-se que*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

### 1.3 Combinação linear de vetores em $\mathbb{R}^n$

**Definição 1.3.1.** *Seja  $\underline{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  uma família de  $p$  vetores de  $\mathbb{R}^n$ . Qualquer vetor da forma*

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p,$$

*onde os  $(\alpha_i)$  são escalares, diz-se uma **combinação linear dos vetores**  $v_1, \dots, v_p$ .*

*Ao conjunto de todas as combinações lineares de elementos de  $\underline{v}$  chamaremos **span** de  $\underline{v}$ :*

$$\text{span } \underline{v} = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p : \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}\}.$$

**Definição 1.3.2.** *Seja  $V \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Se existir uma família  $\underline{v}$  de vetores tais que  $V = \text{span } \underline{v}$ ,  $V$  diz-se um **espaço vetorial** e  $\underline{v}$  uma **família geradora** de  $V$ . Se  $V_1$  e  $V_2$  forem dois espaços vetoriais com  $V_1 \subset V_2$ , diremos que  $V_1$  é um **subespaço vetorial** de  $V_2$ .*

#### 1.3.1 Dependência linear vs. independência linear

**Definição 1.3.3 (Dependência e independência linear).** *Diz-se que os  $m$  vetores  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  são **linearmente dependentes** se existirem  $m$  escalares  $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}$  não todos nulos, tais que*

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}. \quad (1.1)$$

*Se a condição (1.1) se verificar somente quando  $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ , nesse caso diz-se que os vetores  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  são **linearmente independentes**.*

**Exemplo 1.3.4.**

1. Os vetores  $\mathbf{a} = (1, 2)$  e  $\mathbf{b} = (2, 4)$  de  $\mathbb{R}^2$  são linearmente dependentes uma vez que  $2\mathbf{a} + (-1)\mathbf{b} = (0, 0)$ . Neste caso basta observar que um dos vetores é múltiplo do outro.
2. Os vetores  $\mathbf{a} = (1, 2)$  e  $\mathbf{b} = (1, 3)$  de  $\mathbb{R}^2$  são linearmente independentes. Veja-se que, dados dois escalares  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} = (0, 0)$ , tem-se que

$$\begin{aligned} c_1(1, 2) + c_2(1, 3) = (0, 0) &\Leftrightarrow (c_1, 2c_1) + (c_2, 3c_2) = (0, 0) \\ &\Leftrightarrow (c_1 + c_2, 2c_1 + 3c_2) = (0, 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + 3c_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Assim, mostra-se que os únicos escalares  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  que satisfazem  $c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} = (0, 0)$  são  $c_1 = c_2 = 0$ . Donde, se pode concluir por definição, que os vetores  $\mathbf{a} = (1, 2)$  e  $\mathbf{b} = (1, 3)$  de  $\mathbb{R}^2$  são linearmente independentes.

**Observação 1.3.5.** Quando se diz que um conjunto de vetores é linearmente independente (respetivamente, linearmente dependente), é equivalente a dizer que esses vetores são linearmente independentes (respetivamente, linearmente dependentes).

**Teorema 1.3.6.** Um conjunto de vetores é linearmente dependente se e só se um dos seus vetores for combinação linear dos restantes.

*Demonstração.* Exercício. □

**Observação 1.3.7.** O teorema 1.3.6 pode ser enunciado de forma equivalente, dizendo que: “Um conjunto de vetores é linearmente independente se e só se nenhum dos seus vetores for combinação linear dos restantes”.

**Teorema 1.3.8.** Qualquer conjunto de vetores que contenha o vetor nulo é linearmente dependente.

*Demonstração.* Exercício. □

**Teorema 1.3.9.** Se num conjunto de vetores pelo menos dois deles forem iguais ou múltiplos um do outro, então esse conjunto é linearmente dependente.

*Demonstração.* Exercício. □

**Exemplo 1.3.10.**

1. O conjunto de vetores

$$\{(1, 2, 3, 4), (1, 2, 5, -1), (0, 1, 0, 1), (2, 1, 8, 0)\}$$

é linearmente dependente pois

$$1(1, 2, 3, 4) + 1(1, 2, 5, -1) + (-3)(0, 1, 0, 1) + (-1)(2, 1, 8, 0) = (0, 0, 0, 0),$$

ou seja,

$$(2, 1, 8, 0) = 1(1, 2, 3, 4) + 1(1, 2, 5, -1) + (-3)(0, 1, 0, 1),$$

ou seja, o vetor  $(2, 1, 8, 0)$  é combinação linear do vetores  $(1, 2, 3, 4)$ ,  $(1, 2, 5, -1)$  e  $(0, 1, 0, 1)$ . Neste caso aplica-se o teorema 1.3.6 pois no conjunto dado um dos vetores é combinação linear dos restantes.

2. O conjunto de vetores

$$\{(1, 2, 3, 4), (1, 2, 5, -1), (0, 0, 0, 0)\}$$

é linearmente dependente pois, considerando  $c_1 = c_2 = 0$  e  $c_3 \neq 0$ , tem-se que

$$c_1(1, 2, 3, 4) + c_2(1, 2, 5, -1) + c_3(0, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0).$$

Neste caso aplica-se o teorema 1.3.8 pois o conjunto dado contém o vetor nulo.

3. O conjunto de vetores

$$\{(1, 2, 3, 4), (1, 2, 5, -1), (1, 2, 3, 4)\}$$

é linearmente dependente pois

$$1(1, 2, 3, 4) + 0(1, 2, 5, -1) + (-1)(1, 2, 3, 4) = (0, 0, 0, 0).$$

Neste caso aplica-se o teorema 1.3.9 pois o conjunto dado contém dois vetores iguais.

4. O conjunto de vetores

$$\{(1, 2, 3, 4), (1, 2, 5, -1), (2, 4, 6, 8)\}$$

é linearmente dependente pois

$$2(1, 2, 3, 4) + 0(1, 2, 5, -1) + (-1)(2, 4, 6, 8) = (0, 0, 0, 0).$$

Neste caso aplica-se o teorema 1.3.9 pois  $(2, 4, 6, 8) = 2(1, 2, 3, 4)$ , ou seja, o conjunto dado contém um vetor que é múltiplo de outro.

## 1.4 Base de um espaço vetorial

**Definição 1.4.1.** *Seja  $\underline{v}$  uma família geradora de um espaço vetorial  $V$ . Se  $\underline{v}$  for linearmente independente,  $\underline{v}$  diz-se uma **base de  $V$** .*

Duas observações de prova imediata:

- Se  $v_p$  é combinação linear de  $v_1, v_2, \dots, v_{p-1}$ , então

$$\text{span} \{v_1, \dots, v_p\} = \text{span} \{v_1, \dots, v_{p-1}\}.$$

Como consequência, qualquer família geradora de  $V \subset \mathbb{R}^n$  contém uma base de  $V$ .

- Seja  $\underline{v}$  uma base de  $V$  e  $u \in V$ . Então  $u$  escreve-se de maneira única como combinação linear dos elementos de  $\underline{v}$ :  $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$ . Os escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  dizem-se então as «coordenadas de  $u$  na base  $\underline{v}$ ».

**Teorema 1.4.2 (Teorema de Troca de Steinitz).** *Seja  $V = \text{span} \{v_1, \dots, v_p\}$  um espaço vetorial e  $(u_j)_{1 \leq j \leq m}$  uma família linearmente independente de  $m$  vetores de  $V$ . Então, a menos de renumeração dos vetores de  $\underline{v}$ ,*

$$V = \text{span} \{v_1, \dots, v_p\} = \text{span} \{u_1, \dots, u_m, v_{m+1}, \dots, v_p\}.$$

Em particular,  $m \leq p$ .

**Corolário 1.4.3 (Corolário Fundamental - Teorema de invariância da base).** *Seja  $V$  um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$ . Então, todas as bases de  $V$  têm o mesmo número de vetores cardinalidade.*

Ao cardinal comum das bases de  $V$  chama-se a **dimensão de  $V$**  ( $\dim V$ ).

*Demonstração.* Sejam  $\underline{u}$  e  $\underline{v}$  duas bases, de cardinalidade respetiva  $m$  e  $p$ . Como  $\text{span} \underline{u} = \text{span} \underline{v}$ , pelo Teorema de Troca de Steinitz,  $m \leq p$  e  $p \leq m$ :  $m = p$ .  $\square$

**Algumas consequências destes resultados:**

- A família  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de vetores de  $\mathbb{R}^n$ , onde

$$e_i = (0, \dots, 0, 1 \text{ (} i\text{-ésima posição) , } 0, \dots, 0),$$

forma uma base de  $\mathbb{R}^n$ , dita «base canónica». Em particular,  $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ .

- Qualquer família de vetores linearmente independentes de um subespaço vetorial  $V$  pode ser completada numa base (cf Teorema de Steinitz).
- Qualquer família geradora de um subespaço vetorial  $V$  contém uma base desse espaço (cf. primeira observação da Definição 2).
- Em particular: seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $k$ . Qualquer família linearmente independente de  $k$  vetores de  $V$  forma uma base desse espaço. Também, qualquer família geradora de  $k$  vetores de  $V$  forma uma base de  $V$ .

# Capítulo 2

## Matrizes

Dados dois números naturais  $m$  e  $n$ , chama-se **matriz do tipo** (ou **matriz de ordem**)  $m \times n$  **sobre**  $\mathbb{R}$  à tabela formada por  $m \times n$  números reais dispostos em  $m$  linhas (horizontais) e  $n$  colunas (verticais) conforme representado pela seguinte matriz  $A$ ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

em que cada elemento (ou entrada)  $a_{ij}$  corresponde a um número real que está na posição  $ij$  da matriz  $A$ , i.e. que está na linha  $i$  e na coluna  $j$ , com  $i$  a variar de 1 até  $m$  e  $j$  a variar de 1 até  $n$ . Também se pode representar a matriz  $A$  por  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ .

O conjunto das matrizes de ordem  $m \times n$  sobre  $\mathbb{R}$  representa-se por  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ .

Vejam-se agora alguns casos particulares de matrizes:

- Se  $m = 1$ , tem-se uma matriz com apenas uma linha, que se designa por **matriz linha**, conforme a matriz

$$L = [ l_{11} \quad l_{12} \quad \dots \quad l_{1n} ] \in M_{1 \times n}(\mathbb{R}).$$

- Se  $n = 1$ , tem-se uma matriz com apenas uma coluna, que se designa



por **matriz coluna**, conforme a matriz

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} \in M_{m \times 1}(\mathbb{R}).$$

- Se  $m = n$ , tem-se uma matriz com igual número de linhas e de colunas, que se designa por **matriz quadrada** de ordem  $n$ , conforme a matriz

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{R}).$$

O conjunto das matrizes quadradas de ordem  $n$  (i.e., do tipo  $n \times n$ ) com elementos reais, que se representa por  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , também se pode representar por  $M_n(\mathbb{R})$ . Nestas matrizes, designa-se por **diagonal principal** da matriz o conjunto dos elementos  $a_{ii}$  com  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Vejam-se agora alguns casos particulares de matrizes quadradas:

- Se os elementos da matriz fora da diagonal principal forem todos nulos, essa matriz designa-se por **matriz diagonal**, conforme a matriz

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

- Se os elementos da matriz abaixo da diagonal principal forem todos nulos, essa matriz designa-se por **matriz triangular superior**, conforme a matriz

$$T_{sup} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ 0 & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

- Se os elementos da matriz acima da diagonal principal forem todos nulos, essa matriz designa-se por **matriz triangular inferior**, conforme

a matriz

$$T_{inf} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ d_{21} & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

- Dada uma matriz diagonal, se todos os elementos da diagonal principal forem iguais a 1, essa matriz designa-se por **matriz identidade**, conforme a matriz

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

A matriz identidade representa-se usualmente por  $I_n$ , em que o índice  $n$  representa a ordem da matriz. Se estiver claro no contexto em causa qual a ordem da matriz identidade, esse índice pode omitir-se.

Designa-se por **matriz nula** a matriz do tipo  $m \times n$  cujos elementos são todos iguais a zero, e representa-se por

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R}).$$

## Igualdade de matrizes

Duas matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{p \times q}$  dizem-se **iguais** se:

1. forem do mesmo tipo, i.e.,  $m = p$  e  $n = q$ , e
2. os elementos na mesma posição forem iguais, i.e.,  $a_{ij} = b_{ij}$  para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$  e  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

## 2.1 Operações com matrizes

### 2.1.1 Adição de matrizes

A operação de **adição de matrizes** apenas está definida para matrizes do mesmo tipo. Sendo  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  duas matrizes do mesmo

tipo, define-se a soma da matriz  $A$  e  $B$  como sendo a matriz cujo elemento na posição  $ij$  resulta da soma do elemento na posição  $ij$  da matriz  $A$  com o elemento na posição  $ij$  da matriz  $B$ , e representa-se por  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ .

**Exemplo 2.1.1.** Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  do tipo  $2 \times 3$ , tem-se que a sua soma é

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 0+1 & 1+0 \\ 2+0 & -1+0 & 3+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

### Propriedades da adição de matrizes

**Proposição 2.1.2.** Sejam  $A, B, C, O \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , em que  $O$  é a matriz nula do tipo  $m \times n$ . Tem-se que:

1. *Comutatividade:*  $A + B = B + A$ ;
2. *Associatividade:*  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ;
3. *Elemento neutro:*  $A + O = O + A = A$ ;
4. *Elemento simétrico:*  $A + (-A) = (-A) + A = O$ , em que  $-A$  representa a matriz que se obtém da matriz  $A$  multiplicando cada elemento por  $-1$ .

*Demonstração.* Exercício. □

### 2.1.2 Multiplicação de uma matriz por um escalar

A **multiplicação de uma matriz  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  por um número real  $\alpha$**  define-se como sendo a multiplicação de cada elemento da matriz  $A$  pelo escalar  $\alpha$ , i.e,  $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m \times n}$ .

**Exemplo 2.1.3.** Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$  e o escalar  $-3$ , tem-se que

$$(-3)A = \begin{bmatrix} (-3) \times 1 & (-3) \times 0 & (-3) \times 1 \\ (-3) \times 2 & (-3) \times (-1) & (-3) \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -6 & 3 & -9 \end{bmatrix}.$$

**Propriedades da multiplicação de uma matriz por um escalar**

**Proposição 2.1.4.** *Sejam  $A, B, O \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , em que  $O$  é a matriz nula do tipo  $m \times n$ , e sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Tem-se que:*

1. *Distributividade da soma de escalares relativamente à multiplicação por uma matriz:  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ ;*
2. *Distributividade da multiplicação de um escalar relativamente à adição de matrizes:  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ ;*
3. *Associatividade da multiplicação de escalares relativamente à multiplicação por uma matriz:  $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ ;*
4. *Elemento neutro:  $1A = A$ ;*
5. *Elemento absorvente:  $0A = O$ .*

*Demonstração.* Exercício. □

**2.1.3 Multiplicação de matrizes**

Dadas duas matrizes  $A$  e  $B$ , é possível definir a **multiplicação da matriz  $A$  pela matriz  $B$** . No entanto, para que esta multiplicação esteja definida, é necessário que o número de colunas de  $A$  seja igual ao número de linhas de  $B$ .

Sendo  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  e  $B = [b_{ij}]_{n \times q}$ , define-se a multiplicação da matriz  $A$  pela matriz  $B$ , e nota-se por  $AB$ , como sendo a matriz do tipo  $m \times q$  cujo elemento na posição  $ij$  é dado por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}}_{\text{linha } i \text{ de } A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}}_{\text{coluna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

donde

$$AB = \left[ \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \right]_{m \times q}.$$

**Exemplo 2.1.5.** Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$  e

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_{4 \times 2}(\mathbb{R})$ , tem-se que o produto  $AB$  está definido,

sendo

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times (-1) + 0 \times 0 + 1 \times 0 & 1 \times 2 + 2 \times (-1) + 0 \times 1 + 1 \times 3 \\ (-1) \times 1 + 0 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 0 & (-1) \times 2 + 0 \times (-1) + 1 \times 1 + 1 \times 3 \\ 0 \times 1 + 3 \times (-1) + 0 \times 0 + 2 \times 0 & 0 \times 2 + 3 \times (-1) + 0 \times 1 + 2 \times 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

### Propriedades da multiplicação de matrizes

**Proposição 2.1.6.** Sejam  $A, B, C, O$  matrizes do tipo cujas multiplicações enunciadas a seguir estejam definidas, em que  $O$  é a matriz nula. Tem-se que:

1. Associatividade do produto de matrizes:  $(AB)C = A(BC)$ ;
2. Distributividade do produto (à esquerda) de uma matriz relativamente à soma de matrizes:  $C(A + B) = CA + CB$ ;
3. Distributividade do produto (à direita) de uma matriz relativamente à soma de matrizes:  $(A + B)C = AC + BC$ ;
4. Elemento neutro:  $AI = IA = A$ ;
5. Elemento absorvente:  $AO = OA = O$ .

*Demonstração.* Exercício. □

**Observação 2.1.7.** O produto de matrizes não é em geral comutativo, como se pode ver no exemplo seguinte. Observe-se que no exemplo 2.1.5 a multiplicação  $BA$  nem sequer está definida uma vez que o número de colunas de  $B$ , que é 2, é diferente do número de linhas de  $A$ , que é 3.

**Exemplo 2.1.8.** Dadas as matrizes quadradas  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

e  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ , ambas de ordem 3, tem-se que as multi-

plicações  $AB$  e  $BA$  estão definidas,

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

donde se pode verificar que  $AB \neq BA$ .

### Potência de uma matriz

Dada uma matriz  $A$  e um número natural  $k$ , podemos considerar a potência  $k$  da matriz  $A$ ? Ou seja, podemos multiplicar  $k$ -vezes a matriz  $A$  por ela própria? Observe-se que a multiplicação  $AA$  apenas está definida se o número de colunas de  $A$  for igual ao número de linhas de  $A$ , ou seja, se a matriz  $A$  for quadrada. Deste modo, a potência de uma matriz apenas está definida para matrizes quadradas. Assim, pode-se definir a **potência  $k$  de uma matriz quadrada  $A$**  por

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ vezes}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

### 2.1.4 Matriz transposta

Dada uma matriz  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , define-se a **matriz transposta** de  $A$ , e representa-se por  $A^T$ , a matriz cujas linhas são as colunas de  $A$  e cujas colunas são as linhas de  $A$ , i.e., o elemento na posição  $ij$  da matriz  $A$  vai ser o elemento na posição  $ji$  da matriz  $A^T$ , ou seja, se  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ , então  $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$ .

**Exemplo 2.1.9.** *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -5 & 0 & 8 \\ 2 & -9 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Tem-se que

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -9 & 4 \\ 7 & 8 & 1 & -3 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R}).$$

**Definição 2.1.10 (Matriz simétrica e anti-simétrica).** Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Diz-se que  $A$  é:

- uma **matriz simétrica** se  $A = A^T$ ;
- uma **matriz anti-simétrica** se  $A = -A^T$ .

### Propriedades da transposição de matrizes

**Proposição 2.1.11.** Sejam  $A$  e  $B$  matrizes cujas multiplicações e adições enunciadas a seguir estejam definidas, e sejam  $k \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Tem-se:

1.  $(A^T)^T = A$ ;
2.  $(A + B)^T = A^T + B^T$ ;
3.  $(kA)^T = kA^T$ ;
4.  $(AB)^T = B^T A^T$ ;
5.  $(A^n)^T = (A^T)^n$ .

*Demonstração.* Exercício. □

## 2.2 Característica de uma matriz

Dada uma matriz  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , encarando cada linha de  $A$  como um vetor de  $\mathbb{R}^n$ , pode-se ver o conjunto das linhas da matriz  $A$  como um conjunto de vetores em  $\mathbb{R}^n$ . Neste sentido, pode-se perguntar se o conjunto das linhas da matriz  $A$  é linearmente independente. Ou se tal não acontecer, pode-se perguntar qual o número máximo de linhas da matriz que forma um conjunto de vetores linearmente independentes.

**Definição 2.2.1 (Característica da matriz).** Chama-se **característica da matriz**  $A$  ao número máximo de linhas de  $A$  que constituem um conjunto de vetores linearmente independentes, e representa-se esse número por  $r(A)$ .

**Observação 2.2.2.** Se  $A$  for a matriz nula, então  $r(A) = 0$ . Para qualquer outra matriz, não nula, a sua característica é um número natural.

**Proposição 2.2.3.**  $r(A) = r(A^T)$ .

**Definição 2.2.4 (Pivô(s) da matriz).** Dada uma linha não nula de uma matriz, chama-se **pivô** ao elemento não nulo mais à esquerda dessa linha. No caso de uma linha nula, considera-se que esta não tem pivô.

Dada uma matriz não nula, chamam-se **pivôs** dessa matriz ao pivôs de todas as linhas não nulas da matriz.

**Definição 2.2.5 (Matriz em forma de escada).** Diz-se que uma matriz  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  está em **forma de escada** se  $A$  é a matriz nula ou se (não sendo a matriz nula) os seus pivôs estão nas linhas  $1, \dots, s$ , para algum  $s \in \{1, \dots, m\}$ , e nas posições  $1k_1, 2k_2, \dots, sk_s$ , com  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_s \leq n$ , ou seja, se para cada pivô os elementos da da matriz à sua esquerda (na mesma linha) e abaixo (na mesma coluna) são todos nulos.

**Exemplo 2.2.6.** As matrizes, cujos pivôs estão escritos a negrito:

1.  $\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -1 \\ 0 & \mathbf{5} & 3 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $[\mathbf{5} \quad -1 \quad 0 \quad 2]$  estão em forma de escada;

2.  $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{2} & 5 \\ 0 & \mathbf{3} & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{6} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & -2 \end{bmatrix}$  não estão em forma de escada.

**Proposição 2.2.7.** Se uma matriz  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  está em forma de escada, com  $s \in \{1, \dots, m\}$  linhas não nulas, então  $r(A) = s$ .

*Demonstração.* Basta verificar que as linhas não nulas da matriz em forma de escada formam um conjunto de vetores linearmente independentes.  $\square$

## 2.2.1 Operações elementares em matrizes

Dada uma matriz  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , chama-se **transformação** (ou **operação**) **elementar sobre as linhas** da matriz  $A$  a uma transformação de um dos seguintes tipos:

- I) troca da posição da linha  $i$  com a linha  $j$ , em que  $i \neq j$ , e que se nota por  $l_i \leftrightarrow l_j$ ;
- II) multiplicação da linha  $i$  por um escalar  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , e que se nota por  $l_i \rightarrow \alpha l_i$ ;



III) substituição da linha  $i$  pela sua soma com a linha  $j$  multiplicada por  $\beta \in \mathbb{R}$ , em que  $i \neq j$ , e que se nota por  $l_i \rightarrow l_i + \beta l_j$ .

**Exemplo 2.2.8.**

$$\begin{aligned}
 A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{(transf. element. do tipo I)} \\
 &\xrightarrow{l_2 \rightarrow l_2 + (-3)l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{(transf. element. do tipo III)} \\
 &\xrightarrow{l_2 \rightarrow \frac{1}{2}l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{(transf. element. do tipo II)} \\
 &\xrightarrow{l_3 \rightarrow l_3 + (-1)l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} & \text{(transf. element. do tipo III)}.
 \end{aligned}$$

**Definição 2.2.9 (Matriz equivalente por linhas).** Diz-se que uma matriz  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  é **equivalente por linhas** a uma matriz  $B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  do mesmo tipo se  $B$  pode ser obtida a partir de  $A$  através de um número finito de transformações elementares sobre as linhas.

Dada uma matriz  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , utilizando transformações elementares sobre as suas linhas, pode-se obter uma matriz equivalente por linhas, mas que esteja em forma de escada. Este método designa-se por **condensação da matriz**, e consiste nos seguintes passos:

- Passo 1 Se  $A$  for a matriz nula ou  $A$  for uma matriz linha, então  $A$  já está em forma de escada;
- Passo 2 Por troca de linhas (transf. elementar do tipo I), se necessário, obtém-se uma matriz  $B$  cuja primeira linha, entre todas as linhas não nulas de  $A$ , tem o pivô mais à esquerda;
- Passo 3 Seja  $b_{1j}$  o pivô da linha 1 da matriz  $B$ . Para cada linha  $i$  de  $B$ , com  $i \in \{2, \dots, m\}$ , aplica-se a transformação elementar do tipo III,  $l_i \rightarrow l_i + \left(-\frac{b_{ij}}{b_{1j}}\right)l_1$ , o que faz com que o elemento  $b_{ij}$  de cada linha  $i$  se transforme em 0, obtendo-se assim uma outra matriz, diga-se  $C$ ;
- Passo 4 Ignora-se a primeira linha da matriz  $C$  e aplicam-se novamente os passos 1, 2 e 3 à submatriz resultante.

**Exemplo 2.2.10.** Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  e executando as seguintes transformações elementares sobre as suas linhas,

$$\begin{aligned}
 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 9 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{l_2 \rightarrow l_2 + (-\frac{4}{1})l_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{l_3 \rightarrow l_3 + (-\frac{2}{1})l_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B.
 \end{aligned}$$

obtém-se a matriz equivalente por linhas  $B$  em forma de escada.

**Proposição 2.2.11.** Se duas matrizes  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  são equivalentes por linhas, então têm a mesma característica, i.e.,  $r(A) = r(B)$ .

**Exemplo 2.2.12.** No exemplo 2.2.10 anterior, tem-se que  $r(B) = 2$ , donde, pela Proposição 2.2.11, se deduz que  $r(A) = r(B) = 2$ .

**Proposição 2.2.13.** Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Então  $r(A) \leq m$  e  $r(A) \leq n$ , ou seja,  $r(A) \leq \min\{m, n\}$ .

*Demonstração.* Ver [2]. □

**Exemplo 2.2.14.**

1. Se  $A \in M_{5 \times 2}(\mathbb{R})$ , então  $r(A) \leq 2$ .
2. Se  $A \in M_{2 \times 5}(\mathbb{R})$ , então  $r(A) \leq 2$ .
3. Se  $A \in M_5(\mathbb{R})$ , então  $r(A) \leq 5$ .

## 2.2.2 Inversa de uma matriz

Quando, por exemplo, se multiplicam entre si dois números reais, sabe-se que, dado um qualquer número real não nulo, existe sempre um outro número

real, que se designa por **inverso algébrico**, tal que o produto dos dois é 1. Recorde-se que 1 é o elemento identidade da multiplicação de números reais.

Será que o mesmo acontece com as matrizes? Isto é, dada uma matriz qualquer, será que existe uma outra matriz tal que o produto das duas é a matriz identidade? A resposta a esta questão é **NÃO** em geral. No entanto, existem matrizes em que a resposta é **SIM**. Vejam-se então as seguintes definições e propriedades.

**Definição 2.2.15 (Matriz invertível).** Diz-se que uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  (quadrada) é **invertível** ou que tem **inversa** se existir uma matriz  $B \in M_n(\mathbb{R})$  do mesmo tipo tal que

$$AB = BA = I_n.$$

**Observação 2.2.16.** Observe-se que na definição 2.2.15, como  $AB = BA$ , o conceito de matriz invertível só faz sentido para matrizes quadradas.

**Proposição 2.2.17 (Unicidade).** Se  $A \in M_n(\mathbb{R})$  é invertível, então existe uma e uma só matriz  $B \in M_n(\mathbb{R})$  tal que  $AB = BA = I_n$ .

*Demonstração.* Suponha-se que existem  $B_1, B_2 \in M_n(\mathbb{R})$  tais que

$$AB_1 = B_1A = I_n \quad \text{e} \quad AB_2 = B_2A = I_n.$$

Tem-se

$$B_1 = B_1I_n = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = I_nB_2 = B_2,$$

donde se conclui que a inversa é única. □

**Observação 2.2.18.** A inversa da matriz identidade é ela própria, pois  $I_nI_n = I_n$ .

**Definição 2.2.19 (Matriz inversa).** Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  invertível. A única matriz  $B \in M_n(\mathbb{R})$  tal que  $AB = BA = I_n$  chama-se **inversa de A** e representa-se por  $A^{-1}$ .

**Exemplo 2.2.20.** Seja  $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ . Como

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = I_2,$$

tem-se que  $A$  é invertível e  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ .

**Proposição 2.2.21 (Inversa e característica).** Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . As seguintes afirmações são equivalentes:

1.  $A$  é invertível;
2.  $r(A) = n$ ;
3. por transformações elementares sobre as linhas de  $A$  pode-se obter a matriz identidade.

*Demonstração.* Ver [2]. □

**Exemplo 2.2.22.**

1. Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ . Como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 \rightarrow l_3 + 2l_1} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 \rightarrow l_3 - l_2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tem-se  $r(A) = 2 < 3 = n$ , donde, pela Proposição 2.2.21,  $A$  não é invertível.

2. Seja  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{l_2 \rightarrow l_2 - 2l_1 \\ l_3 \rightarrow l_3 + l_1}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix},$$

tem-se  $r(B) = 3$ , donde, pela Proposição 2.2.21,  $B$  é invertível.

### 2.2.3 Cálculo da matriz inversa

Dada uma matriz invertível, como se pode descobrir qual a sua matriz inversa?

Efetuando transformações elementares, pode-se obter a matriz inversa de uma dada matriz invertível, conforme a Proposição 2.2.21. Veja-se então como:

- dada uma matriz invertível  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , efetuam-se transformações elementares sobre as suas linhas até obter a matriz identidade,  $I_n$ . Entretanto, na matriz identidade, efetua-se exatamente a mesma sequência de transformações elementares sobre as suas linhas (as mesmas transformações e pela mesma ordem), e no final a matriz que se obtém é a matriz inversa de  $A$ .

Em termos práticos, uma forma simples para aplicar este método de obtenção da matriz inversa, consiste em colocar lado a lado a matriz dada  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e a matriz identidade com a mesma ordem,

$$[A \mid I_n],$$

e à medida que se efetuam transformações elementares sobre as linhas de  $A$ , efetuam-se também as mesmas transformações elementares sobre as linhas de  $I_n$ . Quando, efetuando essas transformações elementares se obtém a matriz identidade no lugar da matriz  $A$ , a matriz que se obtém no lugar da matriz  $I_n$  é a matriz inversa de  $A$ ,

$$[A \mid I_n] \xrightarrow[\text{sobre as linhas}]{\text{transf. elem.}} \cdots \xrightarrow[\text{sobre as linhas}]{\text{transf. elem.}} [I_n \mid A^{-1}].$$

Veja-se o seguinte exemplo.

**Exemplo 2.2.23.** Seja  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Como se viu no exemplo 2.2.22,

a matriz  $B$  é invertível. Calcule-se então a sua inversa. Tem-se

$$[B \mid I_3] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{l_2 \rightarrow l_2 - 2l_1 \\ l_3 \rightarrow l_3 + l_1}]{\phantom{\longrightarrow}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow[l_2 \rightarrow \frac{1}{2}l_2]{\phantom{\longrightarrow}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow[l_1 \rightarrow l_1 - l_3]{\phantom{\longrightarrow}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

donde se obtém que  $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

**Proposição 2.2.24.** Sejam  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  matrizes invertíveis e seja  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Então:

1.  $A^{-1}$  é invertível e  $(A^{-1})^{-1} = A$ ;
2.  $\alpha A$  é invertível e  $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$ ;
3.  $AB$  é invertível e  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ ;
4. para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k$  é invertível e  $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ ;

5.  $A^T$  é invertível e  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ;

*Demonstração.* Exercício. □

**Proposição 2.2.25.** *Sejam  $A_1, \dots, A_k \in M_n(\mathbb{R})$  matrizes invertíveis, com  $k \in \mathbb{N}$ . Então o produto  $A_1 \cdot \dots \cdot A_k$  é invertível e*

$$(A_1 \cdot \dots \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot \dots \cdot A_1^{-1}.$$

*Demonstração.* Exercício. □

**Proposição 2.2.26.** *Sejam  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . O produto  $AB$  é invertível se e só se  $A$  e  $B$  são ambas invertíveis.*

*Demonstração.* Ver [2]. □

**Observação 2.2.27.** *Observe-se que no item 3. da Proposição 2.2.24 é apenas referida uma das implicações da equivalência na Proposição 2.2.26.*

**Corolário 2.2.28.** *Sejam  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . Se  $AB = I_n$ , então  $A$  e  $B$  são ambas invertíveis, tendo-se  $A^{-1} = B$  e  $BA = I_n$ .*

*Demonstração.* Exercício. □

## 2.3 Matrizes de Leontief

Os setores de uma dada Economia não são estanques: em termos de produção de riqueza, cada setor pode necessitar de consumir recursos não só do próprio setor, mas também dos restantes. Por exemplo, para produzir milho (setor primário), é necessária maquinaria (setor secundário), eletricidade (setor terciário) e bens alimentares para os trabalhadores (setor primário). Estes fluxos entre diferentes setores podem ser representados por uma matriz, dita «matriz de consumo».

Imaginemos por exemplo que para produzir uma unidade de riqueza (representada por exemplo por 1 euro),

- o setor primário consome 0,5 euros de riqueza do setor primário, 0,2 euros do setor secundário e 0,1 euros do setor terciário;
- o setor secundário consome 0,1 euros de riqueza do setor primário, 0,5 euros do setor secundário e 0,3 euros do setor terciário;
- o setor terciário consome 0,1 euros de riqueza do setor primário, 0,3 euros do setor secundário e 0,4 euros do setor terciário.

Nesta situação, a matriz de consumo será

$$C = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

Os vetores coluna são ditos «vetores de consumo» e apresentam os «inputs» necessários a cada um dos setores para a produção de um «output» de riqueza no valor de 1 euro.

Suponhamos agora que se pretende que a economia produza  $p_1$  euros de riqueza no setor primário,  $p_2$  euros no secundário e  $p_3$  no terciário. O vetor coluna

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

designa-se então por «vetor de procura externa». Para se obter este resultado final, o setor  $i$  deverá produzir  $x_i$  euros de riqueza. O vetor

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

diz-se «vetor de produção» e deverá verificar a equação  $X - CX = P$ , ou seja,

$$(I - C)X = P.$$

A matriz  $I - C$  diz-se «matriz de Leontief» e a equação acima é chamada de «equação de Leontief». É também frequente designar a matriz  $CX$  por «vetor de procura intermédia».

No caso da matriz  $I - C$  ser invertível, o vetor de produção é dado por

$$X = (I - C)^{-1}P.$$

Naturalmente, é necessário que  $X$  tenha coeficientes não negativos. Uma condição suficiente para o efeito é que a matriz  $(I - C)^{-1}$  tenha coeficientes positivos. Nesse caso, é sempre possível criar condições para satisfazer qualquer procura externa  $P$ . A Economia diz-se então produtiva:

**Definição 2.3.1.** *Seja  $C$  a matriz de consumo de uma Economia aberta. Se a matriz de Leontief  $I - C$  for invertível e todos os coeficientes  $(I - C)^{-1}$  forem positivos, a economia diz-se **produtiva**.*

Um Teorema clássico de Álgebra Linear garante o seguinte resultado:

**Teorema 2.3.2.** *Seja  $C$  a matriz de consumo de uma Economia aberta. Se a soma dos coeficientes de cada uma das colunas de  $C$  for inferior a 1, a Economia é produtiva.*

**Observação 2.3.3.**

- *Se a soma dos coeficientes da coluna  $j$  for inferior a 1 é usual dizer-se que o setor  $j$  é «rentável». Assim, o Teorema acima afirma que se todos os setores de uma dada Economia forem rentáveis, a Economia é produtiva.*
- *A soma dos coeficientes de uma dada linha  $i$  de  $C$  representa o input total que o setor  $i$  deve fornecer à Economia para que cada setor crie um output de um euro. Como  $(I - C^T)^{-1} = ((I - C)^{-1})^T$ , se todas as somas dos coeficientes das linhas de  $C$  forem inferiores a 1, a Economia é produtiva.*



# Capítulo 3

## Determinantes

Dada uma matriz quadrada  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , o **determinante** da matriz  $A$  é um número real que se associa (consoante determinadas regras) à matriz  $A$ , e que se nota por  $\det(A)$  ou  $|A|$ .

Veja-se então como associar esse número real a cada matriz.

### 3.1 Matrizes de ordem 1 e de ordem 2

Dada uma matriz de ordem 1,  $A = [a_{11}]$ , define-se que o determinante da matriz  $A$  é  $a_{11}$ , e escreve-se

$$\det(A) = a_{11} \quad \text{ou} \quad |A| = a_{11}.$$

Dada uma matriz de ordem 2,  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ , define-se que o determinante da matriz  $A$  é  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , e escreve-se

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \text{ou} \quad |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

#### Exemplo 3.1.1.

1. Se  $A = [-2]$ , então  $|A| = -2$ .
2. Se  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ , então  $|A| = 1 \times 3 - 2 \times (-1) = 5$ .

## 3.2 Matrizes de ordem $n \geq 2$ - Teorema de Laplace

Nesta secção apresenta-se a estratégia para calcular o determinante de uma matriz de ordem  $n$ , para qualquer natural  $n \geq 2$ .

Veja-se primeiro a seguinte definição.

**Definição 3.2.1 (Complemento algébrico).** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ , com  $n \geq 2$ . Designa-se por **cofator** ou **complemento algébrico** da posição  $ij$  de  $A$ , e representa-se por  $\hat{a}_{ij}$ , o escalar*

$$\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |A(i|j)|,$$

em que  $A(i|j)$  é a submatriz que se obtém de  $A$  retirando a linha  $i$  e a coluna  $j$ .

**Exemplo 3.2.2.** *Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ . Tem-se que*

$$\begin{aligned} \hat{a}_{32} &= (-1)^{3+2} |A(3|2)| \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -(6 - 12) \\ &= 6. \end{aligned}$$

A estratégia geral para o cálculo do determinante de uma matriz de ordem  $n \geq 2$  consiste na aplicação de uma regra deduzida do **Teorema de Laplace**, que se apresenta a seguir.

**Teorema 3.2.3 (Teorema de Laplace).** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ , com  $n \geq 2$ . O determinante de  $A$  é igual à soma dos produtos que se obtêm multiplicando os elementos de uma qualquer linha de  $A$  pelos complementos algébricos das respectivas posições, i.e.,*

$$|A| = a_{i1} \hat{a}_{i1} + a_{i2} \hat{a}_{i2} + \dots + a_{in} \hat{a}_{in}, \text{ para qualquer linha } i \text{ de } A.$$

*O mesmo resultado é válido se em vez de uma qualquer linha de  $A$  se escolher uma qualquer coluna, ou seja,*

$$|A| = a_{1j} \hat{a}_{1j} + a_{2j} \hat{a}_{2j} + \dots + a_{nj} \hat{a}_{nj}, \text{ para qualquer coluna } j \text{ de } A.$$

**Exemplo 3.2.4.** *Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ , aplicando o Teorema*

de Laplace (Teorema 3.2.3):

- à primeira linha de  $A$ ,

$$\begin{aligned}
 |A| &= a_{11} \hat{a}_{11} + a_{12} \hat{a}_{12} + a_{13} \hat{a}_{13} \\
 &= 1(-1)^{1+1} |A(1|1)| + 0(-1)^{1+2} |A(1|2)| + 3(-1)^{1+3} |A(1|3)| \\
 &= 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \times 0 - 0 \times (-14) + 3 \times (-7) \\
 &= -21.
 \end{aligned}$$

- à segunda coluna de  $A$ ,

$$\begin{aligned}
 |A| &= a_{12} \hat{a}_{12} + a_{22} \hat{a}_{22} + a_{32} \hat{a}_{32} \\
 &= 0(-1)^{1+2} |A(1|2)| + 2(-1)^{2+2} |A(2|2)| + 1(-1)^{3+2} |A(3|2)| \\
 &= -0 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\
 &= -0 \times (-14) + 2 \times (-7) - 1 \times 7 \\
 &= -21.
 \end{aligned}$$

**Observação 3.2.5.** Se a matriz tiver elementos nulos, tem-se particular vantagem em aplicar o Teorema de Laplace (Teorema 3.2.3) à linha ou à coluna que tiver mais zeros.

**Exemplo 3.2.6.** Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ . Uma vez que a segunda coluna

de  $A$  tem dois zeros (mais do que qualquer outra linha ou coluna de  $A$ ), tem-se particular vantagem em aplicar o Teorema de Laplace (Teorema 3.2.3) à segunda coluna de  $A$ , donde

$$\begin{aligned}
 |A| &= a_{12} \hat{a}_{12} + a_{22} \hat{a}_{22} + a_{32} \hat{a}_{32} \\
 &= 0 \times (-1)^{1+2} \times |A(1|2)| + 2 \times (-1)^{2+2} \times |A(2|2)| + 0 \times (-1)^{3+2} \times |A(3|2)| \\
 &= 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \times (-4) \\
 &= -8.
 \end{aligned}$$

### 3.3 Propriedades

**Proposição 3.3.1.** *Sejam  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Então o determinante de  $A$  é igual ao determinante da sua transposta, i.e.,  $|A| = |A^T|$ .*

*Demonstração.* Recorde-se que se pode calcular o determinante de  $A$  por uma sua qualquer linha ou coluna (ver Teorema 3.2.3 - Teorema de Laplace). Assim, basta observar que, por exemplo, a linha  $i$  de  $A$  é igual à coluna  $i$  de  $A^T$ , donde calcular o determinante de  $A$  aplicando o Teorema de Laplace (Teorema 3.2.3) à linha  $i$  de  $A$  é igual a aplicar o Teorema de Laplace à coluna  $i$  de  $A^T$ .  $\square$

**Proposição 3.3.2.** *Uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  é invertível se e só se  $|A| \neq 0$ .*

*Demonstração.* Ver [2].  $\square$

**Observação 3.3.3.** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .*

1. *Observe-se que o resultado enunciado na Proposição 3.3.2 é equivalente a:*

$$A \text{ não é invertível se e só se } |A| = 0.$$

2. *Observe-se ainda que pela Proposição 2.2.21 pode-se deduzir que:*

$$|A| \neq 0 \text{ se e só se } r(A) = n.$$

**Proposição 3.3.4.** *Sejam  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  e seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ .*

1. *Se  $A$  tem uma linha (ou coluna) nula, então  $|A| = 0$ .*
2. *Se  $A$  tem duas linhas (ou colunas) múltiplas uma da outra, então  $|A| = 0$ .*
3. *Se  $A$  é triangular superior (ou inferior), então  $|A| = \prod_{i=1}^n a_{ii}$ .*
4.  $|AB| = |A||B|$ .
5. *Mais geralmente, se  $k \in \mathbb{N}$  e  $A_1, \dots, A_k \in M_n(\mathbb{R})$ , então*

$$|A_1 \cdot \dots \cdot A_k| = \prod_{i=1}^k |A_i|.$$

6.  $|\alpha A| = \alpha^n |A|$ .

*Demonstração.* Exercício.  $\square$

**Exercício 3.3.5.**

1. Se  $D \in M_n(\mathbb{R})$  é uma matriz diagonal, então  $|D| = \prod_{i=1}^n d_{ii}$ .
2.  $|I_n| = 1$ .
3. Para quaisquer  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e  $m \in \mathbb{N}$ ,  $|A^m| = |A|^m$ .
4. Existem matrizes  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  tais que  $|A + B| \neq |A| + |B|$ .
5. Ainda que o produto de matrizes não seja comutativo, para quaisquer matrizes  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , tem-se  $|AB| = |BA|$ .

**Exemplo 3.3.6.**

1. Se  $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ , então  $|D| = 1 \times 2 \times (-3) = -6$ .
2. Sejam  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Tem-se  $|A| = |B| = 0$  e  $|A + B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$ .
3. Sejam  $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$  tais que  $|A| = 2$ ,  $|B| = -5$  e  $|C| = 4$ . Tem-se:
  - $|AB^T C| = |A| |B^T| |C| = |A| |B| |C| = 2 \times (-5) \times 4 = -40$ .
  - $|3B| = 3^n |B| = -5 \times 3^n$ .
  - $|B^2 C| = |B^2| |C| = |B|^2 |C| = (-5)^2 \times 4 = 100$ .

**Proposição 3.3.7.** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz invertível. Então o determinante da sua inversa é o inverso algébrico do determinante de  $A$ , i.e.,*

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

*Demonstração.* Exercício. □

**Exemplo 3.3.8.** *Sejam  $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$  tais que  $|A| = 2$ ,  $|B| = -5$  e  $|C| = 4$ . Como  $|B| \neq 0$  e  $|C| \neq 0$ , tem-se que as matrizes  $B$  e  $C$  são*

*invertíveis e*

$$\begin{aligned}
 |C^{-1}A^TB^{-1}| &= |C^{-1}| |A^T| |B^{-1}| \\
 &= |C|^{-1} |A| |B|^{-1} \\
 &= \frac{1}{4} \times 2 \times \left(-\frac{1}{5}\right) \\
 &= -\frac{1}{10}.
 \end{aligned}$$

### 3.4 Operações elementares e o determinante

Uma outra estratégia para calcular o determinante de matrizes de ordem particularmente alta é através de transformações elementares sobre as linhas. Sabendo que cada transformação elementar sobre as linhas de uma matriz afeta o seu determinante de uma certa maneira, pode-se, através do cálculo do determinante de matrizes equivalentes por linhas, calcular o determinante de uma matriz dada.

Veja-se então o efeito que cada uma das transformações elementares sobre as linhas de uma matriz tem sobre o seu determinante.

**Proposição 3.4.1.** *Sejam  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Tem-se que:*

I) se  $i \neq j$  e  $A \xrightarrow{l_i \leftrightarrow l_j} B$ , então  $|A| = -|B|$ ;

II) se  $\alpha \neq 0$  e  $A \xrightarrow{l_i \rightarrow \alpha l_i} B$ , então  $|A| = \frac{1}{\alpha}|B|$ ;

III) se  $i \neq j$  e  $A \xrightarrow{l_i \rightarrow l_i + \beta l_j} B$ , então  $|A| = |B|$ ;

*Demonstração.* Exercício. □

**Observação 3.4.2.** *Observe-se que apenas a transformação elementar do tipo III) não afeta o cálculo do determinante.*

Como calcular então o determinante de uma matriz  $A$  usando transformações elementares sobre as suas linhas? Veja-se o seguinte procedimento:

1. efetuam-se transformações elementares sobre as linhas de  $A$  até se obter uma matriz  $B$  em forma de escada (ou seja, triangular superior);
2. considerando as correspondentes alterações que cada uma dessas transformações elementares tem sobre o determinante, obtém-se a relação entre o determinante de  $A$  e o determinante de  $B$ ;

3. como o determinante de  $B$  é fácil de calcular (é apenas o produto dos elementos da sua diagonal principal), e é conhecida a relação entre  $|A|$  e  $|B|$ , obtém-se assim o valor de  $|A|$ .

**Exemplo 3.4.3.**

$$\begin{array}{l}
 \left| \begin{array}{ccc} 0 & 5 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \end{array} \right| \\
 \begin{array}{l} \xrightarrow{(l_1 \leftrightarrow l_2)} \\ \xrightarrow{(l_3 \rightarrow l_3 - 2l_1)} \\ \xrightarrow{(l_2 \rightarrow \frac{1}{5}l_2)} \\ \xrightarrow{(l_3 \rightarrow l_3 - 2l_2)} \end{array} \\
 \begin{array}{l} - \\ - \\ -5 \\ -5 \end{array} \\
 \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \\ 2 & 6 & 8 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right| = -5 \times (-2) = 10. \end{array}
 \end{array}$$

# Capítulo 4

## Sistemas de equações lineares

### 4.1 Equações lineares e sistemas de equações

Uma equação do tipo  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ , com  $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$  diz-se uma **equação linear** nas incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sobre  $\mathbb{R}$ . Às constantes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  chamam-se os **coeficientes** da equação e à constante  $b$  chama-se o **termo independente**. Se  $b = 0$  diz-se que a equação linear é **homogénea**.

Diz-se que o vetor  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$  é uma **solução da equação linear** se substituindo cada  $x_i$  pelo respetivo  $\beta_i$ , com  $i = 1, \dots, n$ , se obtém uma proposição verdadeira.

**Exemplo 4.1.1.** *Dada a equação linear  $2x + 3y = 5$  nas incógnitas  $x$  e  $y$ , cujos coeficientes são, respetivamente, 2 e 3, e o termo independente é 5, tem-se que:*

- o vetor  $(1, 2)$  não é solução da equação, pois  $2 \times 1 + 3 \times 2 = 8 \neq 5$ ;
- o vetor  $(1, 1)$  é solução da equação, pois  $2 \times 1 + 3 \times 1 = 5$ .

Será que toda a equação linear tem solução? E se tiver solução, tem apenas uma?

**Observação 4.1.2.** *Observe-se que uma equação linear homogénea tem sempre pelo menos uma solução, que é a solução nula, que se designa por **por solução trivial**. No entanto, essa pode não ser a única solução. Veja-se o seguinte exemplo.*

**Exemplo 4.1.3.** *Dada a equação linear homogénea  $2x + 3y = 0$  nas incógnitas  $x$  e  $y$ , cujos coeficientes são, respetivamente, 2 e 3, e o termo independente é 0, tem-se que o vetor  $(0, 0)$  é solução da equação, pois  $2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$ . No entanto, observe-se que todos os vetores da forma  $(3c, -2c)$ , para qualquer  $c \in \mathbb{R}$ , são solução da equação linear homogénea dada.*



Se em vez de apenas uma equação linear se tiver um conjunto finito de equações lineares, todas nas mesmas incógnitas, esse conjunto designa-se por **sistema de equações lineares**.

Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$  e considere-se o sistema  $(S)$  de  $m$  equações lineares, nas incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sobre  $\mathbb{R}$ ,

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

com os coeficientes  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  e os termos independentes  $b_i \in \mathbb{R}$ , em que  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ . Se os termos independentes  $b_1, \dots, b_m$  forem todos nulos, diz-se que o sistema  $(S)$  é um **sistema de equações lineares homogêneo**.

Diz-se que o vetor  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$  é uma **solução do sistema** se é solução de cada uma das suas  $m$  equações lineares, i.e., se é verdadeira a proposição

$$a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \dots + a_{1n}\beta_n = b_1 \wedge \dots \wedge a_{m1}\beta_1 + a_{m2}\beta_2 + \dots + a_{mn}\beta_n = b_m,$$

que também se pode escrever como

$$\begin{cases} a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \dots + a_{1n}\beta_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}\beta_1 + a_{m2}\beta_2 + \dots + a_{mn}\beta_n = b_m \end{cases}.$$

**Observação 4.1.4.** *Se o sistema  $(S)$  for homogêneo, então este terá pelo menos a solução nula  $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ , pois*

$$\begin{cases} a_{11}0 + a_{12}0 + \dots + a_{1n}0 = 0 \\ \dots \\ a_{m1}0 + a_{m2}0 + \dots + a_{mn}0 = 0 \end{cases},$$

*é uma conjunção de proposições verdadeiras. A solução nula  $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  de um sistema homogêneo chama-se **solução trivial**.*

## 4.2 Classificação de sistemas

Em geral um sistema de equações lineares pode ou não ter solução. E no caso de ter solução, essa pode não ser única. Veja-se então como se classificam os sistemas de equações lineares em termos da sua solução.

**Definição 4.2.1.** Diz-se que o sistema ( $S$ ) de equações lineares é:

- **impossível** se ( $S$ ) não tem nenhuma solução;
- **possível** se ( $S$ ) admite pelo menos uma solução, sendo
  - **possível e determinado** se essa solução é única;
  - **possível e indeterminado** se existir uma infinidade de soluções.

**Observação 4.2.2.** Pelo que se observou acima sobre a existência de solução para os sistemas homogêneos, verifica-se que um sistema homogêneo é sempre possível, podendo ser determinado ou indeterminado.

**Exemplo 4.2.3.** O sistema homogêneo

1.  $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 5x + 5y = 0 \end{cases}$  é possível e indeterminado, pois admite infinitas soluções, sendo estas da forma  $(c, -c)$ , para qualquer  $c \in \mathbb{R}$ ;
2.  $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$  é possível e determinado, pois admite apenas uma única solução, a solução nula  $(0, 0)$ .

Quando se tem um sistema de equações lineares, pode-se estar interessado em classificar o sistema em termos de existência ou não de solução, sem contudo ser necessário calcular explicitamente o seu conjunto de soluções. Assim, dado um sistema de equações lineares, pode-se:

- **discutir o sistema**, que consiste em classificar o sistema em termos de existência ou não de solução sem ser necessário determinar o conjunto das suas soluções;
- **resolver o sistema**, que consiste em determinar o conjunto das suas soluções.

Neste contexto vai ser fundamental o que se estudou sobre matrizes. Ora veja-se a seguinte definição e o que se segue.

**Definição 4.2.4.** Dado um sistema de equações lineares ( $S$ ), chama-se **forma matricial do sistema** ( $S$ ) à igualdade de matrizes  $AX = B$ , em que

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{matriz dos coeficientes}}, \quad X = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{matriz das incógnitas}} \quad e \quad B = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\text{matriz dos termos independentes}}.$$

À matriz dos coeficientes do sistema (S) chama-se **matriz simples**, e chama-se **matriz ampliada** do sistema (S) à matriz

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] \in M_{m \times (n+1)}(\mathbb{R}),$$

que se representa por  $[A | B]$ .

**Exemplo 4.2.5.** O sistema de equações lineares nas incógnitas  $x_1, x_2, x_3$  sobre  $\mathbb{R}$ :

$$1. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \text{ pode ser escrito na forma matricial}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

e a sua matriz ampliada é

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right].$$

2. com matriz ampliada

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & -2 \end{array} \right],$$

$$\acute{e} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ -x_1 + 4x_3 = -2 \end{cases}.$$

**Definição 4.2.6.** Diz-se que dois sistemas de equações lineares são **equivalentes** se têm o mesmo conjunto de soluções.

**Proposição 4.2.7.** Sejam  $AX = B$  e  $A'X = B'$  sistemas de equações lineares sobre  $\mathbb{R}$ . Se as matrizes ampliadas  $[A | B]$  e  $[A' | B']$  são equivalentes por

linhas, i.e.,

$$[A | B] \xrightarrow[\text{sobre as linhas}]{\text{transf. elem.}} \cdots \xrightarrow[\text{sobre as linhas}]{\text{transf. elem.}} [A' | B'] ,$$

então os sistemas  $AX = B$  e  $A'X = B'$  são equivalentes.

*Demonstração.* Ver [2]. □

**Exemplo 4.2.8.** Os sistemas  $\begin{cases} 2x + 3y + z = 3 \\ -x + y + 2z = 1 \\ -2x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$  e  $\begin{cases} 2x + 3y + z = 3 \\ y + z = 1 \end{cases}$  são

equivalentes, pois

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \end{array} \right] &\xrightarrow{l_3 \rightarrow l_3 - 2l_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{l_2 \rightarrow l_2 + \frac{1}{2}l_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{l_2 \rightarrow \frac{2}{5}l_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] . \end{aligned}$$

### 4.3 Característica de matrizes e classificação de sistemas

Tendo então a representação matricial de um dado sistema de equações lineares, veja-se como, através da característica da matriz simples e da matriz ampliada dos sistemas, se pode classificar os mesmos em termos de existência ou não de solução.

**Proposição 4.3.1.** *Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  e  $B \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$ . Tem-se que  $r(A) \leq r([A | B])$ . Mais precisamente,*

$$r([A | B]) = r(A) \quad \text{ou} \quad r([A | B]) = r(A) + 1 .$$

*Demonstração.* Exercício. □

Assim, podem-se estabelecer relações entre as características da matriz simples e da matriz ampliada de um dado sistema de equações lineares e a sua classificação em termos da existência ou não de solução, conforme enunciado no seguinte teorema.

**Teorema 4.3.2.** *Seja  $AX = B$  um sistema de equações lineares, com  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  e  $B \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$ .*

- *se  $r(A) < r([A | B])$ , o sistema  $AX = B$  é impossível;*
- *se  $r(A) = r([A | B])$ , o sistema  $AX = B$  é possível, sendo:*
  - *possível e determinado se  $r(A) = r([A | B]) = n$ , em que  $n$  é o número de incógnitas do sistema (ou o número de colunas de  $A$ );*
  - *possível e indeterminado se  $r(A) = r([A | B]) < n$ .*

*Demonstração.* Ver [2]. □

Quando se está perante um sistema possível e indeterminado, significa que, quando se escreve o seu conjunto solução, uma ou mais das suas incógnitas se pode escrever à custa de outra(s) das suas incógnitas. Veja-se então a seguinte definição.

**Definição 4.3.3.** *Seja  $AX = B$  um sistema de equações lineares possível e indeterminado, com  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Ao número de incógnitas livres, dado por  $n - r(A)$ , chama-se o **grau de indeterminação** ou **número de graus de liberdade** do sistema.*

## 4.4 Resolução de sistemas

O processo de resolução de sistemas de equações lineares  $AX = B$  é conhecido por *Método de eliminação de Gauss* que, em termos de matrizes, corresponde a obter uma matriz em forma de escada equivalente por linhas à matriz ampliada  $[A | B]$  e, posteriormente, a resolver o sistema por substituição, determinado a solução da equação correspondente à última linha não nula, seguidamente à penúltima e assim sucessivamente até chegar à primeira.

Um outro processo que também se pode utilizar para resolver sistemas de equações lineares é uma extensão do *Método de eliminação de Gauss*, designado por *Método de eliminação de Gauss-Jordan*. Este método consiste em obter uma matriz em forma de escada equivalente por linhas à matriz ampliada  $[A | B]$ , mas cujos pivôs são todos iguais a 1 e todos os restantes elementos das colunas dos pivôs são nulos, e em seguida determinar o conjunto solução do sistema através dessa matriz, não sendo neste caso necessário fazer qualquer substituição. Veja-se o exemplo seguinte.

**Exemplo 4.4.1.** Considere-se o sistema de equações lineares nas incógnitas  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sobre  $\mathbb{R}$ ,

$$(S) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 4x_4 = -6 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases} .$$

Discussão do sistema (S) Considerando a matriz ampliada do sistema (S), tem-se

$$[A | B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 2 & 4 & 4 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{l_2 \rightarrow l_2 - 2l_1 \\ l_3 \rightarrow l_3 + l_1}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -2 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{l_3 \rightarrow l_3 + l_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right],$$

donde  $r([A | B]) = r(A) = 3 < 4 = n$  (número de incógnitas). Assim, conclui-se que o sistema (S) é possível e indeterminado, com grau de indeterminação  $n - r(A) = 4 - 3 = 1$ .

Resolução do sistema (S) Considerando a matriz ampliada do sistema (S), tem-se

$$[A | B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 2 & 4 & 4 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{l_2 \rightarrow l_2 - 2l_1 \\ l_3 \rightarrow l_3 + l_1}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -2 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{l_3 \rightarrow l_3 + l_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{\substack{l_2 \rightarrow \frac{1}{2}l_2 \\ l_3 \rightarrow -\frac{1}{2}l_3}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{\substack{l_2 \rightarrow l_2 - l_3 \\ l_1 \rightarrow l_1 + 3l_3}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{l_1 \rightarrow l_1 - l_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right],$$

donde se obtém

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = -11 \\ x_3 & = 3 \\ x_4 & = -1 \end{cases},$$

com  $x_2 \in \mathbb{R}$  (incógnita livre). Ou seja, o conjunto solução do sistema (S) é dado por

$$\begin{aligned} C.S. &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -11 - 2x_2 \wedge x_3 = 3 \wedge x_4 = -1\} \\ &= \{(-11 - 2x_2, x_2, 3, -1) : x_2 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

## 4.5 Sistemas de Cramer

Considere um sistema de equações lineares (S) cuja forma matricial é  $AX = B$ .

**Definição 4.5.1.** Se a matriz  $A$  for quadrada e invertível, o sistema (S) diz-se um **sistema de Cramer**.

**Exercício 4.5.2.** Considere um sistema de Cramer (S), cuja forma matricial é  $AX = B$ .

- Mostre que (S) é um sistema possível e determinado.
- Mostre ainda que a solução do sistema (S) é dada por  $X = A^{-1}B$ .

**Exercício 4.5.3.** Considere o sistema (S) 
$$\begin{cases} x + y & = 1 \\ y + z & = 2 \\ x + y + z & = 0 \end{cases}$$

- Mostre que (S) é um sistema de Cramer.
- Calcule a matriz  $A^{-1}$  e mostre que a única solução de (S) é  $(-2, 3, -1)$ .

### 4.5.1 Regra de Cramer

Dado um sistema de Cramer, tem-se outra forma de encontrar a sua única solução utilizando determinantes. Uma característica importante desta estratégia, designada adiante por **Regra de Cramer**, é que permite encontrar cada componente da solução do sistema independentemente de se calcularem ou não as restantes componentes.

**Proposição 4.5.4 (Regra de Cramer).** *Seja  $AX = B$  a forma matricial de um sistema de Cramer, com  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ , seja  $A(j)$  a matriz que se obtém de  $A$  substituindo a sua coluna  $j$  pela matriz  $B$  dos termos independentes. Então, a (única) solução do sistema  $AX = B$  é o vetor de  $\mathbb{R}^n$  dado por*

$$\left( \frac{|A(1)|}{|A|}, \frac{|A(2)|}{|A|}, \dots, \frac{|A(n)|}{|A|} \right).$$

*Demonstração.* Ver [2]. □

**Exemplo 4.5.5.** *Retomando o exercício anterior (Exercício 4.5.3), observe-se que aplicando a Regra de Cramer se pode calcular cada componente da sua solução isoladamente. Ora veja-se que, aplicando a Proposição 4.5.4, se tem*

$$x = \frac{|A(1)|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 \\ \mathbf{2} & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -2,$$

$$y = \frac{|A(2)|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 \\ 1 & \mathbf{0} & 1 \end{vmatrix}}{1} = 3,$$

e

$$z = \frac{|A(3)|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & \mathbf{2} \\ 1 & 1 & \mathbf{0} \end{vmatrix}}{1} = -1,$$



**Parte II**  
**Análise Matemática**

# Capítulo 5

## Números reais e séries

### 5.1 Princípio de Indução Matemática

Imagine que tem um número infinito de peças de dominó colocadas na vertical de forma sequencial. Se se conseguir provar que

1. a primeira peça cai;
2. fazendo cair uma peça qualquer, a peça seguinte também vai cair,

fica provado que todas as (infinitas) peças do dominó vão cair. Isto é uma representação da uma das mais elementares estratégias matemáticas, que se designa por **princípio de indução matemática**, utilizadas para provar afirmações enunciadas em função do número natural  $n$ .

Conforme a representação apresentada com as peças do dominó, o princípio de indução matemática consiste essencialmente em dois passos. Suponha-se que se pretende provar que uma propriedade  $P(n)$ , escrita em função do natural  $n$ , é válida para todos os naturais  $n$ , a partir do natural  $p$ . Provando que

1. a propriedade é válida para o primeiro natural  $p$ ;
2. se a propriedade é válida para um qualquer natural  $k \geq p$  (**hipótese de indução**), então também é válida para o natural seguinte,  $k + 1$  (**tese de indução**),

fica provado que a propriedade  $P(n)$  é válida para todo o natural  $n \geq p$ . Vejam-se os seguintes exemplos.

**Exemplo 5.1.1.** *Prova-se por indução matemática que:*

- *dado um número natural  $n$  qualquer, a soma dos  $n$  primeiros números naturais ímpares é  $n^2$ , ou seja,*

$$P(n) : 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. A propriedade  $P(n)$  é válida para o primeiro natural  $n = 1$ , pois  $1 = 1^2$ .

2. Veja-se agora que, se a propriedade for válida para um certo  $k \geq 1$ , então também será válida para o natural seguinte, isto é, para  $k + 1$ . Ou seja, admitindo que

(H.I.) Hipótese de indução:  $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ , para um certo natural  $k \geq 1$ ,

quer-se provar que

(T.I.) Tese de indução:  $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$ .

Tem-se que

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)}_{= k^2} + (2(k + 1) - 1) &\stackrel{(H.I.)}{=} k^2 + (2k + 2 - 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2, \end{aligned}$$

como se queria provar.

- dado um número natural  $n$  qualquer,

$$P(n) : \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

1. A propriedade  $P(n)$  é válida para o primeiro natural  $n = 1$ , pois  $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^1}$ .

2. Veja-se agora que, se a propriedade for válida para um certo  $k \geq 1$ , então também será válida para o natural seguinte, isto é, para  $k + 1$ . Ou seja, admitindo que

(H.I.) Hipótese de indução:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$ , para um certo natural  $k \geq 1$ ,

quer-se provar que

(T.I.) Tese de indução:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$ .

Tem-se que

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^k}}_{=1-\frac{1}{2^k}} + \frac{1}{2^{k+1}} &\stackrel{(H.I.)}{=} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{2^k} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2^{k+1}}, \end{aligned}$$

como se queria provar.

## 5.2 Os números naturais, inteiros, racionais e irracionais

Recorde-se que os números:

- **naturais** são  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ;
- **inteiros** são  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ;
- **racionais** são  $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \wedge \text{mdc}(p, q) = 1\right\}$ ;
- **reais** são  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{números irracionais}\}$ .

Os números racionais caracterizam-se por serem dízimas finitas ou infinitas periódicas, enquanto os números irracionais se caracterizam por serem dízimas infinitas não periódicas, i.e., são números que não se conseguem escrever como frações de inteiros. Por exemplo,  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ ,  $e$ ,  $\phi$  são números irracionais.

**Exemplo 5.2.1.** *Mostre-se que  $\sqrt{2}$  é um número irracional, isto é, que não existem  $p, q \in \mathbb{Z}$  tais que  $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ .*

*Demonstração.* Suponha-se, com vista a um absurdo, que  $\sqrt{2}$  é um número racional. Então existem  $p \in \mathbb{Z}$  e  $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , com  $\text{mdc}(p, q) = 1$ , tais que  $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ , donde  $\frac{p^2}{q^2} = 2$ . Assim, tem-se que  $p^2 = 2q^2$  é um número par, donde se conclui que  $p$  também é par, ou seja, existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $p = 2k$ . Então tem-se que  $\frac{(2k)^2}{q^2} = 2$ , ou seja,  $\frac{4k^2}{q^2} = 2$ , donde  $q^2 = 2k^2$  é um número par, e assim,  $q$  também é par. Então 2 é divisor comum de  $p$  e  $q$ , o que é absurdo, pois por hipótese  $\text{mdc}(p, q) = 1$ . Logo  $\sqrt{2}$  não pode ser racional.  $\square$

### 5.2.1 Densidade dos números racionais em $\mathbb{R}$

Os números racionais são densos no conjunto dos números reais, i.e., para cada real, existem números racionais tão próximos dele quanto se queira.

**Definição 5.2.2.** Um subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}$  diz-se denso em  $\mathbb{R}$  se para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a < b$ , existe  $c \in A$  tal que  $a < c < b$

**Exemplo 5.2.3.** O conjunto dos números racionais é denso em  $\mathbb{R}$ , ou seja, entre quaisquer dois números reais existe sempre um número racional. Tal não acontece com os números inteiros, i.e.,  $\mathbb{Z}$  não é denso em  $\mathbb{R}$ , pois podemos considerar dois números reais tais que não existe nenhum número inteiro entre eles.

Da densidade dos racionais em  $\mathbb{R}$  pode deduzir-se que tão próximo quanto se queira de um número irracional estão, à esquerda e à direita, dois números racionais. Veja o exemplo seguinte.

**Exemplo 5.2.4.** Veja-se, por exemplo, a seguinte sequência de aproximações do valor de  $\sqrt{2}$  por racionais à esquerda e à direita:

$$\begin{aligned}
 & 1 < \sqrt{2} < 2 \\
 & \frac{14}{10} = 1,4 < \sqrt{2} < 1,5 = \frac{15}{10} \\
 & \frac{141}{100} = 1,41 < \sqrt{2} < 1,42 = \frac{142}{100} \\
 & \frac{1414}{1000} = 1,414 < \sqrt{2} < 1,415 = \frac{1415}{1000} \\
 & \frac{14142}{10000} = 1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143 = \frac{14143}{10000} \\
 & \dots
 \end{aligned}$$

## 5.3 Relação de ordem e intervalos em $\mathbb{R}$

Considere-se o conjunto dos números reais, munido da **relação de ordem**  $x \leq y$  satisfazendo as seguintes propriedades, para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$ :

1.  $a \leq b$  ou  $b \leq a$ ;
2.  $a = b$  se e só se  $a \leq b$  e  $b \leq a$ ;
3. se  $a \leq b$  e  $b \leq c$ , então  $a \leq c$ ;
4. se  $a \leq b$ , então  $a + c \leq b + c$  para qualquer  $c \in \mathbb{R}$ ;

5. se  $0 \leq a$  e  $0 \leq b$ , então  $0 \leq ab$ ;
6. se  $a \leq b$ , então  $ac \leq bc$  se  $c > 0$ , ou  $ac \geq bc$  se  $c < 0$ .

**Observação 5.3.1.**

- $x \leq y$  é equivalente a  $y \geq x$ .
- Escreve-se  $x < y$  (ou equivalentemente,  $y > x$ ) se  $x \leq y$  e  $x \neq y$ .

Dados dois quaisquer elementos  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $a < b$ , define-se **intervalo aberto** de extremos  $a$  e  $b$ , e representa-se por  $]a, b[$ , como o conjunto dos números reais compreendidos estritamente entre  $a$  e  $b$ , ou seja,

$$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Analogamente, definem-se os **intervalos semiabertos**

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \quad \text{e} \quad [a, b[ = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

Define-se ainda o **intervalo fechado** de extremos  $a$  e  $b$ , agora com  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $a \leq b$ , como sendo o conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

## 5.4 Definições no conjunto ordenado: majorante, minorante, supremo, ínfimo, máximo e mínimo

Considere-se  $A \subset \mathbb{R}$  um subconjunto de  $\mathbb{R}$  não vazio. Diz-se que:

- $M \in \mathbb{R}$  é um **majorante** de  $A$  se  $x \leq M$ , para qualquer  $x \in A$ ;
- $m \in \mathbb{R}$  é um **minorante** de  $A$  se  $m \leq x$ , para qualquer  $x \in A$ ;
- $A$  é um conjunto **majorado** se  $A$  tem majorantes;
- $A$  é um conjunto **minorado** se  $A$  tem minorantes;
- se  $A$  é majorado, ao menor  $L$  dos majorantes de  $A$  chama-se **supremo** de  $A$ , e escreve-se  $L = \sup A$ ;
- se  $A$  é minorado, ao maior  $l$  dos minorantes de  $A$  chama-se **ínfimo** de  $A$ , e escreve-se  $l = \inf A$ .

**Observação 5.4.1.** *Observe-se que o supremo e/ou o ínfimo de um subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}$  podem pertencer ou não a esse conjunto. Neste sentido, veja-se as seguintes definições.*

- Se  $L = \sup A$  pertence ao conjunto  $A$ , então  $L$  diz-se o **máximo** do conjunto  $A$ , e escreve-se  $L = \max A$ ;
- se  $l = \inf A$  pertence ao conjunto  $A$ , então  $l$  diz-se o **mínimo** do conjunto  $A$ , e escreve-se  $l = \min A$ .

**Exemplo 5.4.2.** *Seja  $A = [1, 5[$ . Tem-se que:*

- *os majorantes de  $A$  são  $[5, +\infty[$ , pois para qualquer  $M \in [5, +\infty[$  verifica-se que  $x \leq M$ , para qualquer  $x \in A$ ;*
- *os minorantes de  $A$  são  $] - \infty, 1]$ , pois para qualquer  $m \in ] - \infty, 1]$  verifica-se que  $m \leq x$ , para qualquer  $x \in A$ ;*
- *$5 = \sup A$ , pois é o menor de todos os majorantes de  $A$ ;*
- *$1 = \inf A$ , pois é o maior de todos os minorantes de  $A$ ;*
- *como  $\sup A = 5 \notin A$ , então  $A$  não tem máximo;*
- *como  $\inf A = 1 \in A$ , então  $\min A = 1$ .*

**Teorema 5.4.3 (Princípio do supremo e do ínfimo).** *Seja  $A$  um subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}$ . Se  $A$  é majorado (resp., minorado), então admite supremo (resp., ínfimo).*

*Demonstração.* Ver [5]. □

## 5.5 Conjunto limitado

Dado um subconjunto  $A$  não vazio de  $\mathbb{R}$ , diz-se que:

- o conjunto  $A$  é **limitado superiormente** se admitir majorantes;
- o conjunto  $A$  é **limitado inferiormente** se admitir minorantes;
- o conjunto  $A$  é **limitado** se for limitado superiormente e inferiormente, i.e., existem  $m$  e  $M$ , respetivamente, minorante e majorante de  $A$ , tais que

$$m \leq x \leq M, \quad \text{para qualquer } x \in A,$$

ou seja

$$A \subset [m, M].$$

## 5.6 Valor absoluto e propriedades

Para cada  $x \in \mathbb{R}$ , define-se o **valor absoluto** ou **módulo** de  $x$ , que se representa por  $|x|$ , como

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Vejam-se a seguir algumas propriedades do valor absoluto.

**Proposição 5.6.1.** *Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e seja  $k > 0$  um número real. Tem-se que*

1.  $|a| \geq 0$ ;
2.  $|a| = 0$  se e só se  $a = 0$ ;
3.  $|a| = |-a|$ ;
4.  $a \leq |a|$ ;
5.  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (*desigualdade triangular*);
6.  $|ab| = |a| |b|$ ;
7. se  $b \neq 0$ ,  $\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$ ;
8.  $|a - b| \geq |a| - |b|$ ;
9.  $|a| < k$  se e só se  $a < k \wedge a > -k$  ( $\Leftrightarrow -k < a < k \Leftrightarrow a \in ]-k, k[$ );
10.  $|a| \leq k$  se e só se  $a \leq k \wedge a \geq -k$  ( $\Leftrightarrow -k \leq a \leq k \Leftrightarrow a \in [-k, k]$ );
11.  $|a| > k$  se e só se  $a > k \vee a < -k$  ( $\Leftrightarrow a \in ]-\infty, -k[ \cup ]k, +\infty[$ );
12.  $|a| \geq k$  se e só se  $a \geq k \vee a \leq -k$  ( $\Leftrightarrow a \in ]-\infty, -k] \cup [k, +\infty[$ );
13.  $|a^n| = |a|^n$ , para todo  $n$  natural;

*Demonstração.* Exercício. Sugestão para 8. :  $|a| = |b + (a - b)|$ .

Sugestão para 13. : princípio de indução matemática. □



## 5.7 Topologia em $\mathbb{R}$

**Definição 5.7.1.** *Sejam  $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$ , com  $\varepsilon > 0$ . Chama-se **vizinhança** de centro  $a$  e raio  $\varepsilon$ , e representa-se por  $\mathcal{V}_\varepsilon(a)$ , ao intervalo aberto  $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ .*

**Observação 5.7.2.** *Observe-se que*

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{V}_\varepsilon(a) = ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ &\Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \\ &\Leftrightarrow x < a + \varepsilon \wedge x > a - \varepsilon \\ &\Leftrightarrow x - a < \varepsilon \wedge x - a > -\varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x - a| < \varepsilon \end{aligned}$$

*representa os pontos  $x \in \mathbb{R}$  cuja distância ao ponto  $a \in \mathbb{R}$  é inferior a  $\varepsilon$ .*

Seja  $A$  um subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Um ponto  $a \in \mathbb{R}$  diz-se:

- **interior** ao conjunto  $A$  se existe uma vizinhança  $\mathcal{V}_\varepsilon(a) \subseteq A$ ;
- **exterior** ao conjunto  $A$  se existe uma vizinhança  $\mathcal{V}_\varepsilon(a)$  tal que  $\mathcal{V}_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$ ;
- **fronteiro** ao conjunto  $A$  se não for interior nem exterior ao conjunto  $A$ , i.e., para qualquer vizinhança  $\mathcal{V}_\varepsilon(a)$  tem-se que  $\mathcal{V}_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$  e  $\mathcal{V}_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset$ ;
- **ponto de acumulação** de  $A$  se para qualquer vizinhança  $\mathcal{V}_\varepsilon(a)$  se verifica que  $(\mathcal{V}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$ ;
- **ponto isolado** de  $A$  se  $a$  pertence a  $A$  e se existe uma vizinhança  $\mathcal{V}_\varepsilon(a)$  tal que  $(\mathcal{V}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}) \cap A = \emptyset$ .

O conjunto dos pontos interiores a  $A$  diz-se o **interior** de  $A$  e representa-se por  $int(A)$ ; o conjunto dos pontos exteriores a  $A$  diz-se o **exterior** de  $A$  e representa-se por  $ext(A)$ ; o conjunto dos pontos fronteiros a  $A$  diz-se a **fronteira** de  $A$  e representa-se por  $fr(A)$ ; e o conjunto dos pontos de acumulação de  $A$  diz-se o **derivado** de  $A$  e representa-se por  $A'$ .

**Observação 5.7.3.** *Os conjuntos  $int(A)$ ,  $ext(A)$  e  $fr(A)$  são disjuntos dois a dois, e*

$$int(A) \cup ext(A) \cup fr(A) = \mathbb{R}.$$

**Exemplo 5.7.4.** *1. Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $a < b$ , e considere-se  $A = ]a, b[$ . Tem-se*

$$int(A) = A, \quad ext(A) = \mathbb{R} \setminus [a, b], \quad fr(A) = \{a, b\} \quad e \quad A' = [a, b].$$

*O conjunto  $A$  não tem pontos isolados.*

2. Sejam  $n$  pontos distintos,  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , e considere-se  $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .  
Tem-se

$$\text{int}(B) = \emptyset, \quad \text{ext}(B) = \mathbb{R} \setminus B, \quad \text{fr}(B) = B \quad \text{e} \quad B' = \emptyset.$$

Os pontos de  $B$  são todos pontos isolados.

3. Para o conjunto  $\mathbb{Q}$  dos racionais, tem-se

$$\text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset, \quad \text{ext}(\mathbb{Q}) = \emptyset \quad \text{fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad \mathbb{Q}' = \mathbb{R}.$$

O conjunto  $\mathbb{Q}$  não tem pontos isolados.

Considere-se  $A$  um subconjunto de  $\mathbb{R}$ .

- o conjunto  $A$  diz-se **aberto** se  $A = \text{int}(A)$ .
- Chama-se **aderência** ou **fecho** de  $A$ , e representa-se por  $\text{ad}(A)$ , à união do seu interior com a sua fronteira, i.e.,  $\text{ad}(A) = \text{int}(A) \cup \text{fr}(A)$ .
- O conjunto  $A$  diz-se **fechado** se  $A = \text{ad}(A)$ .
- O conjunto  $A$  diz-se **compacto** se  $A$  for fechado e limitado.

**Proposição 5.7.5.** Dado um subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}$ , tem-se que  $\text{ad}(A) = A' \cup \{\text{pontos isolados de } A\}$ .

**Exemplo 5.7.6.** 1. Para o conjunto  $A = ]a, b[$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , tem-se  $\text{ad}(A) = [a, b]$ . O conjunto é aberto e não é fechado.

2. Para o conjunto  $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  tem-se  $\text{ad}(B) = B$ . O conjunto não é aberto e é fechado.

3. Para o conjunto  $\mathbb{Q}$  tem-se  $\text{ad}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ . O conjunto não é aberto nem fechado.

**Observação 5.7.7.** As noções de conjunto aberto e de conjunto fechado não são mutuamente exclusivas, i.e., há conjuntos que podem ser simultaneamente abertos e fechados, assim como há conjuntos que não são nem abertos nem fechados. Por exemplo,  $\mathbb{Q}$  não é aberto nem fechado.

**Exercício 5.7.8.** Mostre que os conjuntos  $\emptyset$  e  $\mathbb{R}$  são simultaneamente abertos e fechados;

**Exemplo 5.7.9.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $a < b$ . Tem-se que

- $A = [a, b]$  é fechado e limitado, logo é compacto;
- $B = [b, +\infty[$  é fechado mas não é limitado, logo não é compacto;
- $C = [a, b[$  é limitado mas não é fechado, logo não é compacto.

## 5.8 Sucessões

### 5.8.1 Definições gerais

Chama-se **sucessão em  $\mathbb{R}$**  ou **sucessão real** a uma aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto \varphi(n) \end{aligned}$$

usualmente representada, por exemplo, por  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou simplesmente por  $u_n$ , em que o termo  $u_k$  representa o elemento da sucessão de ordem  $k$  e o conjunto

$$\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_k, \dots\}$$

diz-se o **conjunto dos termos da sucessão**.

Pode definir-se uma sucessão de várias formas. Por exemplo:

- usando uma fórmula, que se designa por **termo geral da sucessão**;
- ou por **recorrência**, que consiste em definir um ou mais termos iniciais, e uma regra de como obter um termo à custa dos anteriores.

**Exemplo 5.8.1.** • *O conjunto dos termos da sucessão  $u_n$  de termo geral  $u_n = 2n + 3$  é  $\{5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$ .*

- *O conjunto dos termos da sucessão  $v_n$  definida por recorrência por  $\begin{cases} v_1 = 5 \\ v_{n+1} = v_n + 2 \end{cases}$ , é  $\{5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$ .*

**Definição 5.8.2 (Limite, sucessão convergente e divergente).** *Uma sucessão  $u_n$  diz-se ter um **limite**  $L$  se, para qualquer número real  $\varepsilon > 0$  existe uma ordem  $m \in \mathbb{N}$  tal que, para todo o  $n \geq m$ ,*

$$|u_n - L| < \varepsilon.$$

*Neste caso diz-se que a sucessão  $u_n$  é **convergente**, e que converge para  $L$ , escrevendo-se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L, \quad \text{ou} \quad \lim u_n = L, \quad \text{ou simplesmente} \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L.$$

*Uma sucessão que não é convergente diz-se **divergente**.*

**Teorema 5.8.3.** *Seja  $A$  um subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}$ . Um ponto  $c \in A$  é um ponto de acumulação de  $A$  se e só se  $c$  é limite de uma sucessão de pontos de  $A$  distintos de  $c$ .*

**Definição 5.8.4 (Sucessão limitada).** Uma sucessão diz-se **limitada** se o conjunto dos seus termos for um conjunto limitado.

**Teorema 5.8.5.** O produto de uma sucessão limitada por um infinitésimo é um infinitésimo.

### 5.8.2 Topologia do conjunto $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

Considere-se a sucessão  $u_n = \frac{1}{n}$ . Então  $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$  é o conjunto dos termos da sucessão  $u_n$ . Tem-se que:

1.  $\text{int}(A) = \emptyset \neq A$ , donde  $A$  não é um conjunto aberto;
2.  $\text{ext}(A) = \mathbb{R} \setminus (A \cup \{0\})$ ;
3.  $\text{fr}(A) = A \cup \{0\}$ ;
4.  $\text{ad}(A) = \text{int}(A) \cup \text{fr}(A) = A \cup \{0\} \neq A$ , donde  $A$  não é um conjunto fechado. Logo também não é compacto, ainda que seja limitado, pois  $A \subset [0, 1]$ , por exemplo;
5.  $A' = \{0\}$ , ou seja, o conjunto  $A$  tem um único ponto de acumulação que é 0 (veja-se que se aplica o teorema 5.8.3, pois os termos da sucessão  $u_n$  pertencem ao conjunto  $A$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ );
6. todos os elementos de  $A$  são pontos isolados.

### 5.8.3 Estudo da sucessão de termo geral $u_n = a^n$

Seja  $a \in \mathbb{R}$ . A sucessão  $u_n = a^n$  diz-se uma **progressão geométrica** de razão  $a$ , pois para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = a$ .

Relativamente ao parâmetro  $a$ , têm-se os seguintes casos:

- se  $a > 1$ , então  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ , logo  $u_n$  é divergente;
- se  $a = 1$ , então  $u_n = 1$ , e a sucessão é constante, logo  $u_n$  é convergente;
- se  $0 < a < 1$ , então  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ , logo  $u_n$  é convergente;
- se  $a = 0$ , então  $u_n = 0$  é uma sucessão constante, logo  $u_n$  é convergente;
- se  $-1 < a < 0$ , então  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  (alternadamente entre valores negativos e positivos), logo  $u_n$  é convergente;

- se  $a = -1$ , então  $u_n = (-1)^n$  alterna entre os termos  $-1$  e  $1$ , logo  $u_n$  é divergente;
- se  $a < -1$ , então  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ .

## 5.9 Séries

### 5.9.1 Paradoxo de Zenão

Zenão de Eleia (495 a.C. ? – 435 a.C. ?) foi um filósofo grego que gostava de provocar os pensadores da altura com a elaboração de alguns paradoxos. Um desses paradoxos, conhecido como **paradoxo de Zenão** ou **paradoxo do corredor**, diz que um atleta nunca pode alcançar a meta numa corrida porque tem sempre que correr metade de cada distância antes de correr a distância total. Quer isto dizer que, tendo corrido a primeira metade, terá ainda de correr a segunda metade. Quando tiver corrido a metade desta, falta-lhe ainda uma quarta parte do total. Quando tiver corrido a metade desta quarta parte falta-lhe ainda a oitava parte do inicial e assim indefinidamente.

Ora, estas frações subdividem o percurso total num número infinito de segmentos cada vez mais pequenos (conforme representado na figura 5.1).

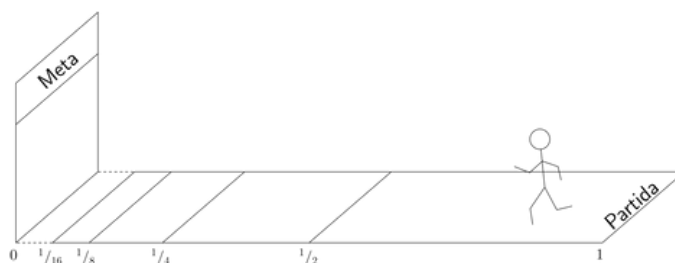


Figura 5.1: Representação da subdivisão do percurso total de uma corrida num número infinito de segmentos cada vez mais pequenos, na proporção de  $1/2$ .

Para percorrer cada segmento é necessário um certo intervalo de tempo, e o tempo necessário para correr todo o percurso é a soma total dos tempos gastos em cada um dos intervalos parciais.

Dizer que o corredor nunca atinge a meta, significa que ele não pode atingir esse ponto ao fim de um intervalo de tempo finito, ou seja, que a soma de um número infinito de valores positivos (tempos gastos em cada intervalo) não pode ser finita.

A teoria das séries infinitas, desenvolvida essencialmente nos séculos *XVI*–*XVIII*, veio ajudar a esclarecer este tipo de problemas, como é exemplo o

paradoxo de Zenão. Outro paradoxo relativamente bem conhecido é o de **Aquiles e a tartaruga**: a tartaruga, numa corrida com Aquiles, parte com uma vantagem inicial. É impossível que Aquiles alcance a tartaruga porque quando Aquiles chega à posição inicial da tartaruga, esta já avançou para  $B$ . Quando Aquiles chega a  $B$ , a tartaruga já está mais à frente em  $C$ , e assim até ao infinito.

Na vida real, sabemos que as situações descritas tanto no paradoxo de Zenão como no de Aquiles e a tartaruga não se confirmam, e por isso se dizem paradoxos, pois numa corrida, em geral, o corredor chega à meta, assim como um corredor mais veloz consegue ultrapassar um corredor mais lento, ainda que este tenha começado mais à frente.

Os matemáticos começaram a pensar que seria possível generalizar as ideias da adição ordinária de conjuntos finitos de números a conjuntos infinitos, de maneira que, sob certas condições, a soma de um conjunto infinito de números seja finita.

Suponha-se que o corredor corre a uma velocidade constante e admita-se que necessita de  $T$  minutos para correr a primeira metade do percurso. Na quarta parte seguinte, necessitará de  $\frac{T}{2}$  minutos, na oitava parte seguinte  $\frac{T}{4}$  minutos e assim sucessivamente, donde o tempo que vai necessitar para percorrer todo o percurso é

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \frac{T}{16} + \dots$$

Este é um exemplo das chamadas **séries numéricas** e o problema consiste em verificar se existe algum número que possa representar esta soma infinita, ou se pelo contrário, esta soma vai para infinito.

A experiência mostra que, no caso do corredor com velocidade constante, este alcançará a meta ao fim de  $2T$  minutos. Será então que

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \frac{T}{16} + \dots = 2T ?$$

A teoria das séries infinitas diz-nos como interpretar esta igualdade. Uma ideia é:

1º) soma-se um número finito de termos, começando por:

– o primeiro,

$$S_1 = T = \left(2 - \frac{1}{2^0}\right) T;$$

– o primeiro mais o segundo,

$$S_2 = T + \frac{T}{2} = \frac{3}{2}T = \left(2 - \frac{1}{2^1}\right) T;$$

– o primeiro, mais o segundo, mais o terceiro,

$$S_3 = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} = \frac{7}{4}T = \left(2 - \frac{1}{2^2}\right)T;$$

– o primeiro, mais o segundo, mais o terceiro, mais o quarto,

$$S_4 = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} = \frac{15}{8}T = \left(2 - \frac{1}{2^3}\right)T;$$

– ...

– do primeiro até ao  $n$ -ésimo,

$$S_n = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)T.$$

2º) e fazendo  $n \rightarrow \infty$ , tem-se que  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2T$ .

## 5.9.2 Definições gerais

**Definição 5.9.1 (Série numérica).** Dada uma sucessão  $u_n$  de números reais, chama-se **série numérica** de termo geral  $u_n$  à soma

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

obtida adicionando todos os (infinitos) termos da sucessão  $u_n$ . A série numérica de termo geral  $u_n$  pode representar-se abreviadamente por

$$\sum_{n \geq 1} u_n, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n, \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

**Definição 5.9.2.** Dada uma série numérica  $\sum_{n \geq 1} u_n$  de termo geral  $u_n$ , a sucessão

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

definida pela soma dos  $n$  primeiros termos de  $u_n$  chama-se **sucessão das somas parciais** da série. A série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  diz-se **convergente** se a sucessão  $S_n$  das somas parciais for convergente. Nesse caso,

$$\sum_{n \geq 1} u_n = \lim S_n = S,$$

designando-se por **soma** da série o limite  $S$  da sucessão das somas parciais.

Se a sucessão  $S_n$  das somas parciais for divergente, a série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  diz-se **divergente**.

**Proposição 5.9.3 (Condição necessária de convergência).** Se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  é convergente, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

*Demonstração.* Ver [5]. □

**Observação 5.9.4.**

A condição  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  é necessária mas não é suficiente, ou seja, uma série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  pode ser divergente ainda que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , como por exemplo, a designada **série harmónica**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots,$$

que é divergente, ainda que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

Uma utilização bastante útil da proposição 5.9.3 é o seu contra-recíproco:

**Corolário 5.9.5.** Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ , então a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  é divergente.

**Exemplo 5.9.6.** Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$ , então, pelo contra-recíproco da proposição 5.9.3, pode concluir-se que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n$  é divergente.

**Proposição 5.9.7.** Sejam  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  duas séries convergentes, de somas  $u$  e  $v$ , respetivamente. Então:

1. a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n)$  é convergente, e a sua soma é  $u + v$ ;

2. para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ , a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha u_n$  é convergente, e a sua soma é  $\alpha u$ .

*Demonstração.* Exercício. □



**Exemplo 5.9.8.** Considerem-se as séries  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$ . Tem-se que:

1. a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right)$  é convergente, e a sua soma é  $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ;
2. a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{-5}{3^n} \right)$  é convergente, e a sua soma é  $(-5)\frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$ .

### 5.9.3 Série geométrica

No exemplo 5.9.8 consideram-se séries em que o quociente entre um qualquer termo da sucessão e o termo imediatamente anterior é uma constante, i.e., o termo geral destas séries é uma progressão geométrica. Por esta razão, tais séries chamam-se séries geométricas.

**Definição 5.9.9 (Série geométrica).** Dadas duas constantes  $k, r \in \mathbb{R}$ , com  $k \neq 0$ , a série

$$k + kr + kr^2 + kr^3 + \dots + kr^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} kr^n$$

diz-se uma **série geométrica de razão  $r$  e primeiro termo  $k$** .

**Observação 5.9.10.** No caso  $r = 0$ , convencionam-se  $0^0 = 1$  para o primeiro termo.

Em seguida vai proceder-se ao estudo da convergência da série geométrica de razão  $r$  e primeiro termo  $k$ . Como se verá adiante, a convergência desta série vai depender da razão  $r$ .

A sucessão das somas parciais da série geométrica de razão  $r$  e primeiro termo  $k$  é dada por:

$$S_n = k + kr + kr^2 + \dots + kr^{n-1}.$$

Se  $r = 1$ , tem-se que  $S_n = \underbrace{k + k + \dots + k}_{n \text{ vezes}} = kn$ . Como a sucessão de termo geral  $kn$  diverge para  $+\infty$  ou  $-\infty$ , neste caso a série geométrica é divergente.

Considere-se agora o caso  $r \neq 1$ . Tem-se:

$$S_n = k + kr + kr^2 + \dots + kr^{n-1}$$

e

$$rS_n = kr + kr^2 + \dots + kr^{n-1} + kr^n.$$

Logo

$$S_n - rS_n = k - kr^n \Leftrightarrow S_n(1 - r) = k(1 - r^n) \Leftrightarrow S_n = \frac{k(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Assim, se  $r \neq 1$ , tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(1 - r^n)}{1 - r} = \begin{cases} \infty & , \text{ se } r > 1 \\ \frac{k}{1-r} & , \text{ se } |r| < 1 \\ \text{n\~{a}o existe,} & \text{ se } r \leq -1 \end{cases}.$$

**Observação 5.9.11.**

1. Se  $r \geq 1$ , tem-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = +\infty$ , donde a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$  é divergente.

2. Se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$  é convergente, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ , o que é verdade se  $|r| < 1$ .

**Proposição 5.9.12.** Seja  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $|r| < 1$  e seja  $p \in \mathbb{N}$ . Então a série  $\sum_{n=p}^{+\infty} kr^n$  é convergente, e a sua soma é  $\frac{kr^p}{1-r}$ .

*Demonstração.* Exercício. □

**Exercício 5.9.13.** Usando o método de indução matemática, mostre que, para todo o natural  $n$ , Se  $r \neq 1$ , então  $k + kr + kr^2 + \dots + kr^{n-1} = \frac{k(1-r^n)}{1-r}$ .

**Exemplo 5.9.14.** Tem-se que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$  é uma série geométrica de razão  $r = -\frac{1}{2}$ . Como  $|r| = \left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ , conclui-se que a série é convergente e que a sua soma é  $\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$ .

# Capítulo 6

## Funções reais de variável real

Uma função real de variável real é uma aplicação de um subconjunto  $D_f \subseteq \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  tal que para cada  $x \in D_f$  a sua imagem é o único elemento  $f(x) \in \mathbb{R}$ , o que se pode representar esquematicamente por

$$\begin{aligned} f : D_f \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

### 6.1 Domínio e contradomínio

Designa-se por **domínio** de uma função  $f$  o subconjunto  $D_f$  de  $\mathbb{R}$  formado por todos os números reais que, colocados no lugar da variável  $x$  convertem a expressão considerada na designação de um número real. O **contradomínio** de uma função  $f$  é o conjunto de todos os números reais que  $f$  assume (imagem pela função  $f$  de todos os elementos no seu domínio), que se pode escrever como

$$f(D_f) = \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in D_f\}.$$

Dada uma função  $f$ , para cada  $x \in D_f$ , pode-se representar graficamente em  $\mathbb{R}^2$  os pontos  $(x, f(x))$ , o que normalmente se designa por “desenhar o gráfico da função  $f$ ”, ou seja, representar em  $\mathbb{R}^2$  o conjunto

$$Gr(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D_f \wedge y = f(x)\}.$$

## 6.2 Função polinomial e séries

Designa-se por função polinomial uma função  $P$  definida de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  tal que para cada  $x \in \mathbb{R}$  a sua imagem está definida por

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

para um certo  $n \in \mathbb{N}_0$ , e em que  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ , que se designam por coeficientes, pertencem a  $\mathbb{R}$ . Se  $a_n \neq 0$  diz-se que  $P$  é um polinómio de grau  $n$ .

Todas estas séries têm a forma particular  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ , e são conhecidas por **séries de potências** ou **séries inteiras**. Os números  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \in \mathbb{R}$  dizem-se os **coeficientes** da série de potências.

Pelo que se viu atrás da série geométrica, sabe-se que se  $|x| < 1$ , então

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}. \quad (6.1)$$

Continuando a admitir que  $|x| < 1$ , se se substituir  $x$  por  $x^2$  em (6.1), obtém-se (soma das potências pares)

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}. \quad (6.2)$$

Observe-se que se  $|x| < 1$ , então  $|x^2| < 1$ .

Multiplicando agora (6.2) por  $x$ , vem (soma das potências ímpares)

$$x + x^3 + x^5 + x^7 \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1} = \frac{x}{1-x^2}. \quad (6.3)$$

Voltando a (6.1), se se substituir  $x$  por  $-x$ , obtém-se

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}. \quad (6.4)$$

### 6.2.1 Série exponencial

A série geométrica é um caso particular da série de potências, em que todos os coeficientes são iguais a 1, i.e.,  $a_n = 1$  para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . Outro caso particular é a série exponencial

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (6.5)$$

Considerando  $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ , é fácil verificar que  $f'(x) = f(x)$  para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , pelo que uma função bem conhecida que satisfaz esta propriedade é a função exponencial, ou seja, para qualquer constante  $K \in \mathbb{R}$ , tem-se que  $f(x) = Ke^x$  verifica  $f'(x) = f(x)$ . No entanto, observe-se que se  $f(0) = 1$ , então  $Ke^0 = 1$ , donde  $K = 1$ , e neste caso,  $f(x) = e^x$ . Tem-se assim o seguinte resultado.

**Proposição 6.2.1.** *A série exponencial converge para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , e a sua soma é  $e^x$ , i.e.,*

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (6.6)$$

**Observação 6.2.2.** *Uma justificação de que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  pode ser feita usando a proposição 6.2.1 e a equação (6.6). Veja-se que de (6.6), subtraindo 1 a ambos os membros da equação e, para  $x \neq 0$ , dividindo ambos os membros por  $x$ , se obtém*

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} \cdots, \quad (6.7)$$

donde,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} \cdots \right) = 1.$$

## 6.3 Propriedades gerais das funções

### 6.3.1 Injetividade

**Definição 6.3.1 (Função injetiva).** *Uma função  $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se **injetiva** se para quaisquer  $x_1, x_2 \in D_f$  tais que  $x_1 \neq x_2$ , se tem  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .*

**Observação 6.3.2.** Muitas vezes pode ser vantajoso usar o contra-recíproco desta definição, ou seja, a função  $f$  é injetiva se, dados  $x_1, x_2 \in D_f$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ , então  $x_1 = x_2$ .

**Exemplo 6.3.3.**

1) A função  $f(x) = 2x + 3$  é injetiva pois, dados  $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ ,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

2) A função  $f(x) = x^2$  não é injetiva pois  $-2 \neq 2$  mas  $f(-2) = f(2)$ .

### 6.3.2 Monotonia

**Definição 6.3.4 (Monotonia de uma função).** Uma função  $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se **crescente** (resp. **estritamente crescente**) se para quaisquer  $x_1, x_2 \in D_f$  tais que  $x_1 > x_2$ , se tem  $f(x_1) \geq f(x_2)$  (resp.  $f(x_1) > f(x_2)$ ).

Analogamente, diz-se que a função  $f$  é **decrecente** (resp. **estritamente decrecente**) se para quaisquer  $x_1, x_2 \in D_f$  tais que  $x_1 > x_2$ , se tem  $f(x_1) \leq f(x_2)$  (resp.  $f(x_1) < f(x_2)$ ).

A função diz-se **estritamente monótona** se for estritamente crescente ou estritamente decrecente.

### 6.3.3 Função Limitada

**Definição 6.3.5 (Função limitada).** Uma função  $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se **limitada** se para qualquer  $x \in D_f$  existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $|f(x)| \leq M$ .

**Observação 6.3.6.** Equivalentemente, diz-se que a função  $f$  é **limitada** se o seu conjunto imagem,  $f(D_f)$  for um conjunto limitado.

### 6.3.4 Paridade

**Definição 6.3.7 (Função par).** Uma função  $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se **par** se para qualquer  $x \in D_f$ ,  $f(x) = f(-x)$ .

**Exemplo 6.3.8.** A função  $f(x) = x^2$  é par pois para qualquer  $x \in D_f = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 = f(-x)$ .

**Definição 6.3.9 (Função ímpar).** Uma função  $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se **ímpar** se para qualquer  $x \in D_f$ ,  $f(x) = -f(-x)$ .

**Exemplo 6.3.10.** A função  $f(x) = x^3$  é ímpar pois para qualquer  $x \in D_f = \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = -x^3 = -f(x)$ .

### 6.3.5 Periodicidade

**Definição 6.3.11 (Função periódica).** Uma função  $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se **periódica** se existe  $T \in \mathbb{R}^+$  tal que, para qualquer  $x \in D_f$ ,  $x + T \in D_f$  e  $f(x + T) = f(x)$ .

Ao menor real positivo  $T$  tal que  $f(x + T) = f(x)$  chama-se **período** da função  $f$ .

**Exemplo 6.3.12.** As funções seno, cosseno e tangente são periódicas, de período  $2\pi$ ,  $2\pi$  e  $\pi$ , respetivamente.

## 6.4 Composição de funções

Considerem-se duas funções reais de variável real  $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Pode-se considerar a composição da função  $f$  com a função  $g$ , que se nota por  $f \circ g$ , e que se lê como a função “ $f$  composta com  $g$ ” ou “ $f$  após  $g$ ”, definida por

$$\begin{aligned} f \circ g : D_{f \circ g} \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (f \circ g)(x) = f(g(x)) \end{aligned}$$

onde

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}.$$

Esta operação de composição de funções pode-se generalizar a mais do que duas funções. Por exemplo, se se tiver uma função real de variável real  $h : D_h \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , pode-se definir a função composta  $h \circ f \circ g$ , em que

$$D_{h \circ f \circ g} = \{x \in D_{f \circ g} : (f \circ g)(x) \in D_h\},$$

e assim por diante.

## 6.5 Função inversa

Dada uma função real de variável real  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ , em que  $A = D_f$  e  $B = f(D_f)$ , para cada  $x \in D_f$ , seja  $y = f(x)$ . Quer-se saber se é possível, e em que condições, encontrar uma função  $g : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $g(y) = x$ , ou seja, tal que  $g \circ f = id$  (i.e.,  $(g \circ f)(x) = x$ ) ou  $f \circ g = id$  (i.e.,  $(f \circ g)(y) = y$ ).

Esta função  $g$ , caso exista, designa-se por função inversa de  $f$  e representa-se por  $f^{-1}$ .

Veja-se que condições deve satisfazer uma dada função  $f$  para que se possa garantir a existência da sua função inversa  $f^{-1}$ . Por exemplo, se uma determinada função  $f$  faz corresponder a dois objetos diferentes uma mesma imagem, i.e., para  $x_1, x_2 \in D_f$  tais que  $x_1 \neq x_2$  e  $f(x_1) = f(x_2)$ , então não fará sentido existir uma função que a um determinado objeto faça corresponder duas imagens diferentes, i.e., considerando  $y = f(x_1) = f(x_2)$ , não faz sentido existir uma função  $g$  tal que  $g(y) = x_1$  e  $g(y) = x_2$ . Tem-se então a seguinte propriedade:

**Proposição 6.5.1.** *Uma função só admite inversa se for injetiva.*

**Exemplo 6.5.2.** *Considere-se a função real de variável real*

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

*definida por*

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1} = 2 + \frac{5}{x - 1}.$$

*Pode-se verificar que esta função  $f$  é injetiva em todo o seu domínio, donde, pela proposição 6.5.1, se tem que  $f$  admite inversa. Neste caso a função real de variável real inversa de  $f$  é a função*

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

*definida por*

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{x - 2} = 1 + \frac{5}{x - 2}.$$

**Exemplo 6.5.3.** *A função real de variável real*

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

*definida por*

$$g(x) = e^x$$

*admite inversa, que é a função*

$$g^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

*definida por*

$$f^{-1}(x) = \ln x.$$



**Observação 6.5.4.** 1) Se uma determinada função não for injetiva, pode-se considerar a mesma função mas apenas definida numa parte do seu domínio de forma a que essa nova função, que normalmente se designa por restrição da função inicial, fique injetiva nesse seu “novo” domínio. Exemplos desta situação vão ocorrer na definição das funções trigonométricas inversas que se apresenta a seguir.

2) Se uma função contínua é estritamente monótona, então é injetiva.

3) Os gráficos de uma determinada função e da sua inversa são simétricos em relação ao gráfico da função  $f(x) = x$  (bissetriz dos quadrantes ímpares).

### 6.5.1 Funções trigonométricas inversas

#### Arco Seno

Considere-se a função

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$$

definida por

$$f(x) = \sin x .$$

Sabe-se que a função  $f$  não é injetiva, no entanto, pode-se considerar uma sua restrição, por exemplo,

$$f|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1],$$

cujos gráficos estão representados na figura 6.1.

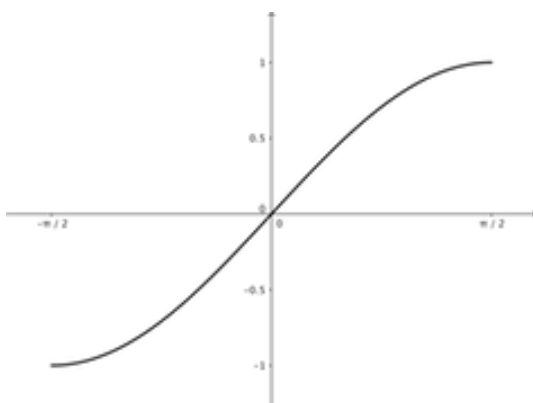


Figura 6.1: Gráfico da função  $\sin x$  restringida ao intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

Tem-se assim que a função  $f|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$  já é injetiva, pelo que (como se viu na observação 6.5.4) pode-se definir a sua inversa. A função inversa da função seno é

$$\left(f|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

definida por

$$f^{-1}(x) = \arcsin x,$$

e que se lê como “*arco seno*”, e cuja representação gráfica se pode ver na figura 6.2.

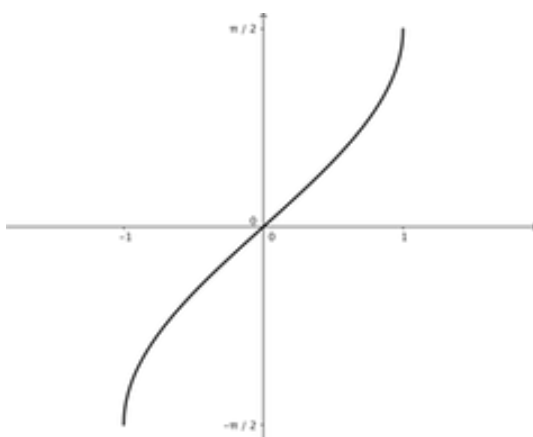


Figura 6.2: Gráfico da função  $\arcsin x$ .

**Observação 6.5.5.** A função  $f^{-1}(x) = \arcsin x$  deve interpretar-se como “qual o ângulo cujo seno é  $x$ ”. Por exemplo,  $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ , ou seja, “o ângulo cujo seno é  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  é  $\frac{\pi}{4}$ ”.

**Proposição 6.5.6.** Nas condições em que as funções estão definidas tem-se

$$\sin(\arcsin x) = x \quad e \quad \arcsin(\sin x) = x.$$

### Arco Cosseno

Considere-se a função

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$$

definida por

$$f(x) = \cos x.$$

Sabe-se que a função  $f$  não é injetiva, no entanto, pode-se considerar uma sua restrição, por exemplo,

$$f|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1],$$

cujos gráfico está representado na figura 6.3.

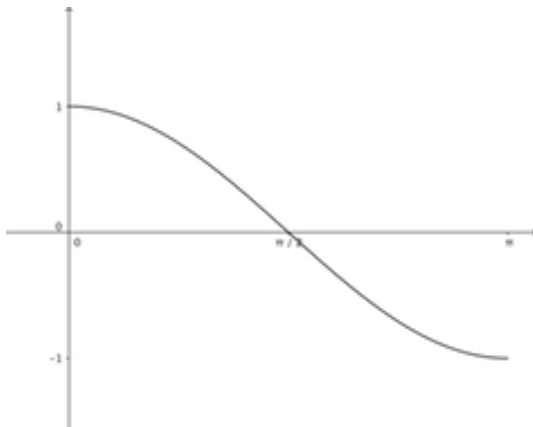


Figura 6.3: Gráfico da função  $\cos x$  restringida ao intervalo  $[0, \pi]$ .

Tem-se assim que a função  $f|_{[0,\pi]}$  já é injetiva, pelo que (como se viu na observação 6.5.4) pode-se definir a sua inversa. A função inversa da função cosseno é

$$\left(f|_{[0,\pi]}\right)^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi],$$

definida por

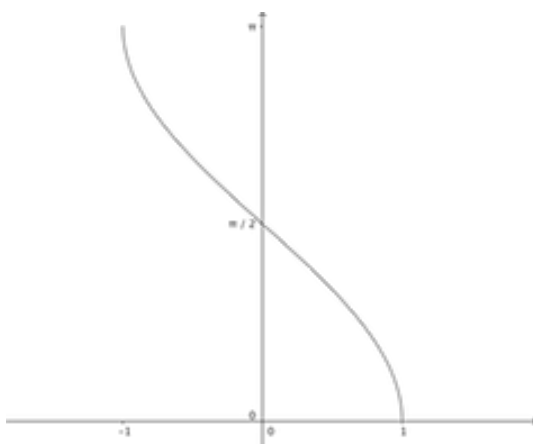
$$f^{-1}(x) = \arccos x,$$

e que se lê como “*arco cosseno*”, e cuja representação gráfica se pode ver na figura 6.4.

**Observação 6.5.7.** A função  $f^{-1}(x) = \arccos x$  deve interpretar-se como “qual o ângulo cujo cosseno é  $x$ ”. Por exemplo,  $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ , ou seja, “o ângulo cujo cosseno é  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  é  $\frac{\pi}{6}$ ”.

**Proposição 6.5.8.** Nas condições em que as funções estão definidas tem-se

$$\cos(\arccos x) = x \quad e \quad \arccos(\cos x) = x.$$

Figura 6.4: Gráfico da função  $\arccos x$ .

### Arco Tangente

Considere-se a função

$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$f(x) = \tan x .$$

Sabe-se que a função  $f$  não é injetiva, no entanto, pode-se considerar uma sua restrição, por exemplo,

$$f \left|_{\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[} : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

cujos gráfico está representado na figura 6.5.

Tem-se assim que a função  $f \left|_{\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[}$  já é injetiva, pelo que (como se viu na observação 6.5.4) pode-se definir a sua inversa. A função inversa da função tangente é

$$\left( f \left|_{\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[} \right)^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ ,$$

definida por

$$f^{-1}(x) = \arctan x ,$$

e que se lê como “*arco tangente*”, e cuja representação gráfica se pode ver na figura 6.6.

**Observação 6.5.9.** A função  $f^{-1}(x) = \arctan x$  deve interpretar-se como “qual o ângulo cuja tangente é  $x$ ”. Por exemplo,  $f^{-1}(\sqrt{3}) = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ ,

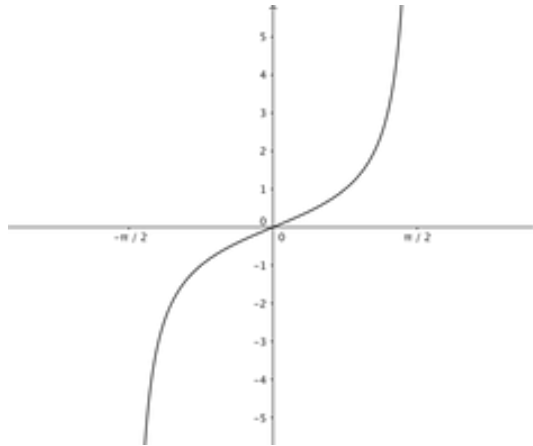


Figura 6.5: Gráfico da função  $\tan x$  restringida ao intervalo  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

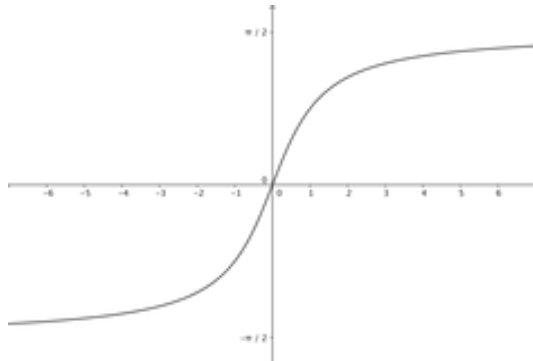


Figura 6.6: Gráfico da função  $\arctan x$ .

ou seja, “o ângulo cuja tangente é  $\sqrt{3}$  é  $\frac{\pi}{3}$ ”.

**Proposição 6.5.10.** *Nas condições em que as funções estão definidas tem-se*

$$\tan(\arctan x) = x \quad e \quad \arctan(\tan x) = x.$$

# Capítulo 7

## Limites e continuidade

Considere-se uma função real de variável real  $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 7.1 Limites

**Definição 7.1.1 (Limite segundo Cauchy).** *Seja  $a \in \mathbb{R}$  um ponto aderente ao domínio de  $f$ ,  $D_f$ . Diz-se que o **limite de  $f$  no ponto  $a$**  é  $b \in \mathbb{R}$ , e escreve-se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , se*

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0 < |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta.$$

### 7.2 Continuidade

**Definição 7.2.1 (Continuidade da função num ponto).** *Seja  $a$  um ponto do domínio de  $f$ , i.e., seja  $a \in D_f$ . Diz-se que  $f$  é **contínua no ponto  $a$**  se*

$$\text{existe } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

**Definição 7.2.2 (Continuidade da função num conjunto  $A \subseteq D_f$ ).** *Diz-se que  $f$  é **uma função contínua** num conjunto  $A \subseteq D_f$  se  $f$  for contínua em todos os pontos de  $A$ .*

**Exemplo 7.2.3.** *A função real de variável real  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  é contínua, pois é contínua em todos os pontos do seu domínio.*

#### 7.2.1 Prolongamento por continuidade a um ponto

**Definição 7.2.4 (Prolongamento por continuidade).** *Diz-se que  $f$  é **prolongável por continuidade** a um ponto  $a \in fr(D_f)$  e que não pertença*

a  $D_f$  se existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . E nesse caso, se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , esse prolongamento de  $f$  é dado pela função  $\tilde{f} : D_f \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in D_f \\ b & , x = a \end{cases} .$$

**Exemplo 7.2.5.** Uma vez que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , a função  $f$  conforme definida no exemplo 7.2.3, é prolongável por continuidade ao ponto  $x = 0$ , sendo o seu prolongamento  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases} .$$

**Teorema 7.2.6 (Teorema de Weierstrass).** Se  $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e o seu domínio  $D_f$  é um conjunto compacto (i.e., fechado e limitado), então  $f$  tem máximo e mínimo em  $D_f$ .

*Demonstração.* Ver [5]. □

**Teorema 7.2.7 (Teorema de Bolzano ou Teorema do valor intermédio).** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $a < b$  e seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então  $f$  assume todos os valores entre  $f(a)$  e  $f(b)$ , i.e., para cada  $d \in [f(a), f(b)]$  ou  $[f(b), f(a)]$ , existe pelo menos um  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = d$ .

*Demonstração.* Ver [5]. □

**Corolário 7.2.8.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $a < b$  e seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Se  $f(a) \times f(b) < 0$ , então existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = 0$ .

*Demonstração.* Ver [5]. □

# Capítulo 8

## Cálculo diferencial

### 8.1 Derivada de uma função num ponto

#### Definição geométrica

Dada uma função real de variável real, a derivada dessa função num determinado ponto é, caso exista, o declive da reta tangente ao gráfico dessa função nesse ponto.

#### Definição analítica

Dada uma função real de variável real  $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , a derivada de  $f$  num ponto  $a \in D_f$ , e que se pode escrever como  $f'(a)$ , é

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (8.1)$$

**Observação 8.1.1.** *Observe-se que, considerando a mudança de variável  $x - a = h$ , quando  $x \rightarrow a$  então  $h \rightarrow 0$ , e o limite em (8.1) pode-se reescrever como*

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

**Definição 8.1.2 (Diferenciabilidade da função num ponto).** *Seja  $a \in D_f$  um ponto de acumulação de  $D_f$ . Diz-se que a função  $f$  é **derivável** ou **diferenciável no ponto**  $a$  se existe, e é finito,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ . Tal limite, quando existe, diz-se a **derivada de  $f$  no ponto**  $a$  e representa-se por  $f'(a)$  (notação de Lagrange) ou  $\frac{df}{dx}(a)$  (notação de Leibniz).*

**Definição 8.1.3 (Diferenciabilidade da função num conjunto  $A \subseteq D_f$ ).** *Diz-se que a função  $f$  é uma função **derivável** ou **diferenciável** num conjunto  $A \subseteq D_f$  se  $f$  for uma função diferenciável em todos os pontos de  $A$ .*



A equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  num ponto  $(a, f(a))$  é dada por

$$y - f(a) = f'(a) (x - a) ,$$

ou seja,

$$y = f(a) + f'(a) (x - a) ,$$

que é equivalente à sua forma reduzida

$$y = f'(a) x + (f(a) - a f'(a)) .$$

**Teorema 8.1.4.** *Se  $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável no ponto  $a \in D_f$ , então  $f$  é contínua nesse ponto.*

*Demonstração.* Ver [3]. □

## 8.2 Função derivada

Dada uma função real de variável real  $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável, pode-se considerar uma nova função definida por

$$\begin{aligned} f' : A \subseteq D_f &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

em que  $A$  é o conjunto de pontos de  $D_f$  onde a função  $f$  tem derivada.

Designa-se a função  $f'$  por **função derivada** de  $f$ . Também se pode representar a função  $f'$  por  $\frac{df}{dx}$ .

**Exemplo 8.2.1.** *A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f'(x) = 2x$  é a função derivada de  $f$ .*

## 8.3 Derivação

**Teorema 8.3.1.** *Sejam  $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções diferenciáveis em  $a \in D$ . Então:*

- 1)  $f + g$  é diferenciável em  $a$ , e  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ ;
- 2) para qualquer  $k \in \mathbb{R}$ ,  $kf$  é diferenciável em  $a$ , e  $(kf)'(a) = kf'(a)$ ;
- 3)  $f \times g$  é diferenciável em  $a$ , e  $(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ ;
- 4) para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^n$  é diferenciável em  $a$ , e  $(f^n)'(a) = nf'(a)f^{n-1}(a)$ ;
- 5) se  $g(a) \neq 0$ , então  $\frac{f}{g}$  é diferenciável em  $a$ , e  $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$ .

## Regras de derivação

Seja  $k \in \mathbb{R}$ . Para as seguintes funções diferenciáveis têm-se as regras de derivação:

1) se  $f(x) = k x^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , então  $f'(x) = n k x^{n-1}$ ;

2) se  $f(x) = \sin x$ , então  $f'(x) = \cos x$ ;

3) se  $f(x) = \cos x$ , então  $f'(x) = -\sin x$ ;

4) para  $k > 0$ , se  $f(x) = k^x$ , então  $f'(x) = k^x \ln k$ ;

4.1) se  $k = e$ ,  $f(x) = e^x$  e  $f'(x) = e^x$ ;

5) para  $k > 0$ , se  $f(x) = \log_k x$ , então  $f'(x) = \frac{1}{x \ln k}$ ;

5.1) se  $k = e$ ,  $f(x) = \ln x$  e  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .

## 8.4 Derivada da função composta

Dada uma composição de duas funções que sejam diferenciáveis num determinado ponto, então pode-se calcular a derivada da função composta através da derivada de cada uma dessas funções. Veja-se o seguinte teorema.

**Teorema 8.4.1 (Derivada da função composta).** *Sejam  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções tais que  $g(E) \subseteq D$ . Se  $g$  é diferenciável em  $b \in E$  e  $f$  é diferenciável em  $a = g(b) \in D$ , então  $f \circ g : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $b$  e tem-se a designada **regra da derivada da função composta***

$$(f \circ g)'(b) = f'(g(b)) g'(b).$$

*Demonstração.* Ver [3]. □

**Exemplo 8.4.2.** *Sejam  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  as funções definidas por  $f(x) = x^{10}$  e  $g(x) = x^2 + 3x + 5$ . A função  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(x) = (x^2 + 3x + 5)^{10}$  pode ser vista como a composição das funções  $f$  e  $g$ , sendo  $h = f \circ g$ . Pelo teorema 8.4.1,  $h$  é diferenciável em  $x \in \mathbb{R}$  e*

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = 10 (x^2 + 3x + 5)^9 (2x + 3).$$

## 8.5 Derivada da função inversa

Dada uma função injetiva, pela Proposição 6.5.1, essa função admite inversa. Neste caso, se essa função for também diferenciável, então pode-se calcular a derivada da sua inversa num determinado ponto sem ter que se calcular explicitamente a sua função inversa. Ora veja-se o seguinte teorema.

**Teorema 8.5.1 (Derivada da função inversa).** *Sejam  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e injetiva, e seja  $a \in D$  tal que  $f'(a) \neq 0$ . Então a sua função inversa  $f^{-1}$  é diferenciável em  $f(a)$  e, considerando  $b = f(a)$ , tem-se a designada **regra da derivada da função inversa***

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

*Demonstração.* Ver [3]. □

**Exemplo 8.5.2.** *Tem-se que a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 2x + 3$  é diferenciável e injetiva. A sua inversa é  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  em que  $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$ . Para qualquer  $x \in \mathbb{R}$  tem-se que  $f'(x) = 2 \neq 0$ , donde, pelo teorema 8.5.1, se tem que  $f^{-1}$  é diferenciável e  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2}$ .*

**Exercício 8.5.3.** *Pelo teorema 8.5.1 podem-se deduzir as derivadas das funções trigonométricas inversas e assim obter:*

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$

**Exercício 8.5.4.** *Pelos teoremas 8.4.1 e 8.5.1 podem-se deduzir as derivadas das funções trigonométricas inversas cujo argumento é uma função  $f$  que depende de  $x$ , e assim obter:*

- $(\arcsin f(x))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}};$
- $(\arccos f(x))' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}};$
- $(\arctan f(x))' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}.$

## 8.6 Regra de Cauchy

No cálculo de limites, quando se está perante certas indeterminações, como por exemplo  $\frac{0}{0}$ , em alguns casos pode-se aplicar uma regra de derivação, designada por **Regra de Cauchy**, que faz com que a indeterminação “desapareça” facilitando assim o cálculo do limite. Ora veja-se o seguinte teorema.

**Teorema 8.6.1 (Regra de Cauchy).** *Seja  $D \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo e seja  $a \in \text{ad}(D)$ . Sejam  $f, g : D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis e admita-se que  $g(x) \neq 0$  para todo o  $x \in D \setminus \{a\}$ . Se*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

e

$$\text{existe} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

então existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  e tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*Demonstração.* Ver [3]. □

**Observação 8.6.2.** *Observe-se que se  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  for uma constante, então  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , donde não é necessário aplicar a Regra de Cauchy. Assim, no caso em que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ , só se aplica a Regra de Cauchy se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ . Veja-se 2) no exemplo a seguir.*

**Exemplo 8.6.3.**

- 1)  $O \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{0}{0}$ , donde, estando nas condições do teorema 8.6.1, se pode aplicar a **Regra de Cauchy**, obtendo-se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1.$$

- 2)  $O \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$ , donde, estando nas condições do teorema 8.6.1, se pode aplicar a **Regra de Cauchy**, obtendo-se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0.$$

## 8.7 Máximos e mínimos locais e globais

**Definição 8.7.1.** *Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e seja  $a \in D$ . Diz-se que:*

- 1)  *$f$  tem um **máximo local** (ou **relativo**) em  $a$  ou que  $f(a)$  é um **máximo local** (ou **relativo**) da função  $f$ , se existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(x) \leq f(a)$  para todo o  $x \in V_\varepsilon(a) \cap D$ ;*
- 2)  *$f$  tem um **mínimo local** (ou **relativo**) em  $a$  ou que  $f(a)$  é um **mínimo local** (ou **relativo**) da função  $f$ , se existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(x) \geq f(a)$  para todo o  $x \in V_\varepsilon(a) \cap D$ .*

*Pode-se usar a expressão **extremos locais** (ou **relativos**) da função  $f$  quando se quer referir (indistintamente) os seus máximos ou mínimos locais.*

- 3)  *$f$  tem um **máximo global** (ou **absoluto**) em  $a$  ou que  $f(a)$  é um **máximo global** (ou **absoluto**) da função  $f$ , se  $f(x) \leq f(a)$  para qualquer  $x \in D$ ;*
- 4)  *$f$  tem um **mínimo global** (ou **absoluto**) em  $a$  ou que  $f(a)$  é um **mínimo global** (ou **absoluto**) da função  $f$ , se  $f(x) \geq f(a)$  para qualquer  $x \in D$ .*

*Pode-se usar a expressão **extremo global** (ou **absoluto**) da função  $f$  quando se quer referir (indistintamente) o seu máximo ou mínimo global.*

*Os pontos nos quais  $f$  tem máximo (resp. mínimo) designam-se **maximizantes** (resp. **minimizantes**). Um maximizante ou minimizante designa-se **extremante**.*

**Observação 8.7.2.** *Se  $a \in D$  é um ponto de extremo global de uma função  $f$ , então  $a$  é um ponto de extremo local de  $f$ . Observe-se que a recíproca desta afirmação não é verdadeira.*

**Teorema 8.7.3 (Teorema de Fermat).** *Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $a \in D$ . Se  $f$  tem em  $a$  um extremo local, então  $f'(a) = 0$ .*

*Demonstração.* Ver [5]. □

**Observação 8.7.4.** *O recíproco do Teorema de Fermat não é verdade. Veja-se o seguinte exemplo: considerando a função  $f(x) = x^3$ , tem-se que  $f'(0) = 0$ , no entanto  $f$  não tem nenhum ponto de extremo.*

**Definição 8.7.5 (Ponto crítico).** *Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $a \in D$ . Diz-se que  $a$  é um **ponto crítico de  $f$**  ou que  $f$  tem um **ponto crítico em  $a$**  se  $f'(a) = 0$ .*

**Teorema 8.7.6 (Teorema de Rolle).** *Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$  (com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a < b$ ) e diferenciável em  $]a, b[$ . Se  $f(a) = f(b)$ , então existe um ponto  $c \in ]a, b[$  tal que  $f'(c) = 0$ .*

*Demonstração.* Como  $f$  é contínua em  $[a, b]$ , então pelo Teorema de Weierstrass (ver Teorema 7.2.6),  $f$  tem máximo e mínimo em  $[a, b]$ .

Se o máximo e o mínimo são atingidos nas extremidades de  $[a, b]$ , como por hipótese  $f(a) = f(b)$ , então  $f$  é constante em  $[a, b]$ , donde  $f'(c) = 0$  para qualquer  $c \in ]a, b[$ .

Caso contrário, ou o máximo ou o mínimo é atingido em  $c \in ]a, b[$ , donde pelo Teorema de Fermat (ver Teorema 8.7.3),  $f'(c) = 0$ .  $\square$

**Corolário 8.7.7.** *Entre dois zeros de uma função diferenciável num intervalo, há pelo menos um zero da sua derivada.*

*Demonstração.* Exercício.  $\square$

**Teorema 8.7.8 (Teorema de Lagrange).** *Seja  $f$  uma função definida e contínua em  $[a, b]$  (com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a < b$ ) e diferenciável em  $]a, b[$ . Então existe pelo menos um ponto  $c \in ]a, b[$  tal que  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .*

*Demonstração.* Seja  $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ . Tem-se  $f(b) - \lambda b = f(a) - \lambda a$ . A função  $h(x) = f(x) - \lambda x$  é contínua em  $[a, b]$ , é diferenciável em  $]a, b[$  e satisfaz  $h(a) = h(b)$ . Assim, pelo Teorema de Rolle (ver Teorema 8.7.6), existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $h'(c) = 0$ , ou seja,  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .  $\square$

## 8.8 Derivadas sucessivas (ou de ordem superior)

Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $D_1 \subseteq D$ . Sabe-se que  $f' : D_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função real definida em  $D_1 \subseteq D$ . Se a função  $f'$  for diferenciável em  $a \in D_1$ , então tem-se que a função  $f$  é duas vezes diferenciável em  $a$ . A segunda derivada de  $f$  em  $a$  representa-se por  $f''(a)$  ou  $\frac{d^2 f}{dx^2}(a)$  e é naturalmente definida por

$$f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a},$$

ou, considerando a mudança de variável  $x - a = h$ ,

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}.$$

Mais geralmente, se existem as derivadas  $f', f'', \dots, f^{(n-1)}$  em  $D$ , em que  $f^{(n-1)}$  representa a derivada de  $f$  de ordem  $n-1$  para  $n \in \mathbb{N}$  com  $n \geq 2$ , e se a função  $f^{(n-1)}$  é diferenciável em  $a \in D_n \subseteq D_{n-1} \subseteq \dots \subseteq D_1 \subseteq D$ , então diz-se que  $f$  tem derivada de ordem  $n$  no ponto  $a \in D_n$ . Tem-se que

$$f^{(n)}(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a}.$$

Se  $f$  é uma função diferenciável em  $D$  e  $f'$  é contínua também em  $D$ , então diz-se que  $f$  é uma função de classe  $C^1$  em  $D$ , e escreve-se  $f \in C^1(D)$ . Analogamente, se  $f$  é uma função duas vezes diferenciável em  $D$  e  $f'$  e  $f''$  são funções contínuas também em  $D$ , então diz-se que  $f$  é uma função de classe  $C^2$  em  $D$ , e escreve-se  $f \in C^2(D)$ . Mais geralmente, se  $f$  é uma função  $n$  vezes diferenciável em  $D$  e as funções  $f', f'', \dots, f^{(n)}$  são contínuas também em  $D$ , então diz-se que  $f$  é uma função de classe  $C^n$  em  $D$ , e escreve-se  $f \in C^n(D)$ .

Pode-se escrever  $f \in C^0(D)$  para designar que  $f$  é uma função contínua em  $D$ .

No caso em que a função  $f$  admite derivadas de todas as ordens em  $D$ , diz-se que  $f$  é indefinidamente diferenciável em  $D$  ou que  $f$  é de classe  $C^\infty(D)$ , e escreve-se  $f \in C^\infty(D)$ .

**Observação 8.8.1.** Se  $f \in C^n(D)$ , então  $f \in C^k(D)$  para todo o  $k \leq n$ .

**Exemplo 8.8.2.**

- 1)  $f(x) = e^x$  é uma função de classe  $C^\infty(\mathbb{R})$ .
- 2)  $f(x) = x^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , é uma função de classe  $C^\infty(\mathbb{R})$ .

As funções mais fáceis de estudar do ponto de vista da análise matemática são as funções polinomiais. Dada uma qualquer função, existe um método que permite, sob certas condições, encontrar um polinómio que, na vizinhança de um ponto do seu domínio, tem o gráfico “praticamente igual” ao gráfico da função dada. Este método, que é dado pelo teorema seguinte, designa-se por *Fórmula de Taylor*, e o polinómio que se obtém designa-se por *Polinómio de Taylor*.

**Teorema 8.8.3 (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange).** *Seja  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $n+1$  vezes diferenciável em  $]a, b[$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a < b$ . Se  $x, x_0 \in ]a, b[$ , então existe pelo menos um  $s$  entre  $x$  e  $x_0$  tal que*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

em que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}.$$

**Definição 8.8.4 (Polinómio de Taylor).** *O polinómio*

$$P_{x_0}^n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

*diz-se o polinómio de Taylor de ordem  $n$  de  $f$  no ponto  $x_0$ , e a função  $R_n(x)$  diz-se o Resto de Lagrange de ordem  $n$ .*

**Observação 8.8.5.**

1) *Na demonstração do Teorema 8.8.3 prova-se que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ .*

2) *Se  $x_0 = 0$ , a fórmula de Taylor de ordem  $n$  de  $f$  na origem escreve-se*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

*e designa-se por fórmula de Mac-Laurin de ordem  $n$  de  $f$ .*

**Exemplo 8.8.6.** 1) *O polinómio de Taylor de ordem  $n$  de  $f(x) = e^x$  no ponto  $x_0 = 0$  é dado por*

$$P_0^n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

2) *O polinómio de Taylor de ordem  $n$  de  $f(x) = \sin x$  no ponto  $x_0 = 0$  é dado por*

$$P_0^n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1!},$$

*com  $n = 2k + 1$  e  $k \in \mathbb{N}$ .*

3) *O polinómio de Taylor de ordem  $n$  de  $f(x) = \cos x$  no ponto  $x_0 = 0$  é dado por*

$$P_0^n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!},$$

*com  $n = 2k$  e  $k \in \mathbb{N}$ .*

## 8.9 Classificação de pontos críticos

Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e seja  $a \in \text{int}(D)$  um ponto de extremo local de  $f$ . Então  $a$  é um ponto crítico de  $f$ , i.e.,  $f'(a) = 0$ . No entanto, nem todos os pontos críticos de uma função são necessariamente pontos de extremo.



**Proposição 8.9.1.** *Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função duas vezes diferenciável num ponto  $a \in \text{int}(D)$ , ponto crítico de  $f$ . Então:*

- 1) se  $f''(a) > 0$ ,  $a$  é um ponto de mínimo local;
- 2) se  $f''(a) < 0$ ,  $a$  é um ponto de máximo local.

*Demonstração.* Ver [5]. □

Mais geralmente tem-se a seguinte proposição,

**Proposição 8.9.2.** *Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $n$  vezes diferenciável num ponto  $a \in \text{int}(D)$ , ponto crítico de  $f$ . Designando por  $f^{(n)}$ , com  $n > 1$ , a primeira das sucessivas derivadas de  $f$  que não se anulam em  $a$ , i.e.,*

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad e \quad f^{(n)}(a) \neq 0,$$

*então:*

- 1) se  $n$  é par:
  - 1.1) se  $f^{(n)}(a) > 0$ , então  $a$  é ponto de mínimo local;
  - 1.2) se  $f^{(n)}(a) < 0$ , então  $a$  é ponto de máximo local;
- 2) se  $n$  é ímpar, então  $a$  não é ponto de extremo local.

*Demonstração.* Ver [5]. □

## 8.10 Concavidades e inflexões

Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $a \in \text{int}(D)$ . O gráfico de  $f$  admite então uma reta tangente no ponto  $(a, f(a))$ , donde, intuitivamente, faz sentido dizer que o gráfico tem a concavidade voltada para baixo (resp., cima) no ponto  $a$  se nalguma vizinhança de  $a$  o gráfico estiver “abaixo” (resp., “acima”) da reta tangente em  $(a, f(a))$ .

A equação da **reta tangente** ao gráfico da função  $f$  no ponto  $(a, f(a))$  é dada por

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

**Definição 8.10.1.** *Diz-se que:*

- 1) o gráfico de  $f$  **tem a concavidade voltada para cima** no ponto  $a$  se existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$  para todo  $x \in V_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ ;

- 2) o gráfico de  $f$  **tem a concavidade voltada para baixo** no ponto  $a$  se existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(x) < f(a) + f'(a)(x - a)$  para todo o  $x \in V_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ ;
- 3) o gráfico de  $f$  tem um **ponto de inflexão** no ponto  $a$  se existe  $\varepsilon > 0$  tal que num dos intervalos  $]a - \varepsilon, a[$  ou  $]a, a + \varepsilon[$  se tem  $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$  e no outro  $f(x) < f(a) + f'(a)(x - a)$ .

Coloca-se então a questão de como analisar a concavidade do gráfico da função  $f$  no ponto  $a \in \text{int}(D)$ .

Se  $f$  é pelo menos duas vezes diferenciável no ponto  $a$  e admitindo que  $f''(a) \neq 0$ , pela fórmula de Taylor de ordem 1 de  $f$  no ponto  $a$ , tem-se

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(s)}{2!}(x - a)^2,$$

com  $s$  entre  $a$  e  $x$ , e  $f''(s)$  tem o mesmo sinal de  $f''(a)$ .

Como  $\frac{(x-a)^2}{2!} > 0$  para todo o  $x$  numa vizinhança  $V_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ , tem-se que:

- 1) se  $f''(a) > 0$ , então  $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$ ;
- 2) se  $f''(a) < 0$ , então  $f(x) < f(a) + f'(a)(x - a)$ ,

donde se pode deduzir a seguinte proposição.

**Proposição 8.10.2.** *Se  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é duas vezes diferenciável em  $a \in \text{int}(D)$ , então:*

- 1) se  $f''(a) > 0$ , o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima no ponto  $a$ ;
- 2) se  $f''(a) < 0$ , o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo no ponto  $a$ .

*Demonstração.* Ver [5] □

**Corolário 8.10.3.** *Se  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é duas vezes diferenciável em  $a \in \text{int}(D)$  e  $a$  é ponto de inflexão de  $f$ , então  $f''(a) = 0$ .*

*Demonstração.* Ver [5] □

**Observação 8.10.4.** *A recíproca do Corolário 8.10.3 não é verdade. Veja-se o exemplo da função  $f(x) = x^4$ . Tem-se que  $f'(x) = 4x^3$  e  $f''(x) = 12x^2$ , donde  $f''(0) = 0$ . No entanto,  $x = 0$  não é ponto de inflexão mas sim ponto de mínimo. Nestes casos pode-se fazer uma análise da função em torno do ponto crítico. Neste exemplo verifica-se que  $f''(x) > 0$  para todo o  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , donde se pode concluir que  $x = 0$  é ponto de mínimo global de  $f$ .*

Mais geralmente, tem-se a seguinte proposição.

**Proposição 8.10.5.** *Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $n$  vezes diferenciável num ponto  $a \in \text{int}(D)$ . Designando por  $f^{(n)}$ , com  $n > 2$ , a primeira das sucessivas derivadas de  $f$  que não se anulam em  $a$ , i.e.,*

$$f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(n)}(a) \neq 0,$$

então:

1) se  $n$  é par, tem-se que:

1.1) se  $f^{(n)}(a) > 0$ , o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para cima no ponto  $a$ ;

1.2) se  $f^{(n)}(a) < 0$ , o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para baixo no ponto  $a$ ;

2) se  $n$  é ímpar, então  $a$  é um ponto de inflexão.

*Demonstração.* Ver [3].

□

**Exemplo 8.10.6.** *A função  $f(x) = x^5$  é um exemplo onde se pode aplicar a proposição 8.10.5.*

# Capítulo 9

## Cálculo integral

### 9.1 Conceito de primitiva e propriedades

**Definição 9.1.1.** *Seja  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo que contenha mais do que um ponto e seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real de variável real. Chama-se **primitiva de  $f$  em  $I$**  a qualquer função  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

*Diz-se que  $f$  é **primitivável em  $I$**  quando a função  $f$  possui pelo menos uma primitiva em  $I$ .*

**Proposição 9.1.2.** *Uma função contínua num intervalo  $I$  (com mais do que um ponto) é primitivável em  $I$ .*

*Demonstração.* Ver [3]. □

**Observação 9.1.3.** *Se  $F$  é uma primitiva de  $f$  em  $I$ , então para qualquer constante  $C \in \mathbb{R}$ ,  $F + C$  é outra primitiva de  $f$  em  $I$ , pois  $(F(x) + C)' = f(x)$  para todo o  $x \in I$ . Donde se pode deduzir que se  $f$  tem uma primitiva em  $I$ , então  $f$  tem infinitas primitivas em  $I$ .*

Escreve-se  $Pf(x)$  para designar a primitiva de  $f(x)$ . Assim, pela observação 9.1.3, as igualdades que envolvam o símbolo  $P$  devem ser interpretadas a menos da soma de uma constante arbitrária. Também se usa o símbolo  $\int$  para designar a primitiva, pelo que  $Pf(x)$  também se pode escrever como

$$\int f(x)dx,$$

onde  $\int$  é o sinal de integral,  $f$  a função integranda e  $dx$  indica a variável de integração  $x$ .

**Proposição 9.1.4.** Se  $F_1$  e  $F_2$  são primitivas de  $f$  em  $I$ , então para todo  $x \in I$  existe uma constante  $C \in \mathbb{R}$  tal que  $F_1(x) - F_2(x) = C$ .

*Demonstração.* Tem-se que

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

donde existe uma constante  $C \in \mathbb{R}$  tal que  $F_1(x) - F_2(x) = C$ .  $\square$

**Proposição 9.1.5.** Sejam  $f$  e  $g$  funções primitiváveis em  $I \subseteq \mathbb{R}$  e seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então:

$$1) P(f + g) = Pf + Pg;$$

$$2) P(\alpha f) = \alpha Pf.$$

## 9.2 Primitivação imediata

$$1) Px^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

**Exemplo 9.2.1.**  $Px^5 = \frac{x^6}{6}$ , em  $\mathbb{R}$ .

2) Seja  $f$  uma função não nula e diferenciável em  $I$ . Tem-se que

$$\ln |f(x)| = \begin{cases} \ln f(x) & , \text{ se } f(x) > 0 \\ \ln(-f(x)) & , \text{ se } f(x) < 0 \end{cases}.$$

Então

$$(\ln |f(x)|)' = \begin{cases} \frac{f'(x)}{f(x)} & , \text{ se } f(x) > 0 \\ \frac{-f'(x)}{-f(x)} & , \text{ se } f(x) < 0 \end{cases} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Donde se pode deduzir que

$$P\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) = \ln |f(x)|.$$

**Exemplo 9.2.2.**

$$i) P\left(\frac{1}{x}\right) = \ln |x| \text{ em } I \subseteq \mathbb{R} \text{ tal que } 0 \notin I.$$

$$ii) P\left(\frac{x}{1-2x^2}\right) = -\frac{1}{4}P\left(\frac{-4x}{1-2x^2}\right) = -\frac{1}{4}\ln |1-2x^2| \text{ em } I \subseteq \mathbb{R} \text{ tal que } 1-2x^2 \neq 0.$$

3) Seja  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  e seja  $f$  uma função diferenciável em  $I$ . Tem-se que

$$(f^{\alpha+1}(x))' = (\alpha + 1) f^\alpha(x) f'(x),$$

donde

$$P f'(x) f^\alpha(x) = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha + 1}.$$

**Exemplo 9.2.3.**

i)  $P \left( \frac{\ln x}{x} \right) = P(\ln x) \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{(\ln x)^2}{2}$  em  $]0, +\infty[$ .

ii)  $P x \sqrt{2x^2 + 1} = \frac{1}{4} P 4x (2x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \frac{(2x^2 + 1)^{\frac{1}{2} + 1}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{6} (2x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$   
em  $\mathbb{R}$ .

4) Se  $f$  é diferenciável em  $I$ , tem-se que  $(\arcsin f(x))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$ , donde

$$P \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} = \arcsin f(x).$$

Analogamente, deduz-se que

$$P \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} = \arccos f(x)$$

e

$$P \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} = \arctan f(x).$$

**Exemplo 9.2.4.**

i)  $P \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2} P \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin(2x)$ , em  $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ .

ii)  $P \frac{e^x}{e^{2x}+4} = P \frac{e^x}{4+(e^x)^2} = \frac{2}{4} P \frac{\frac{e^x}{2}}{1+(\frac{e^x}{2})^2} = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{e^x}{2} \right)$ , em  $\mathbb{R}$ .

### 9.3 Primitivação de funções racionais

Recorde-se que se chama **função racional** a qualquer função que se escreve na forma  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  em que  $P(x)$  e  $Q(x)$  são polinómios de coeficientes reais.

**Proposição 9.3.1.** *Se grau  $(P(x)) \geq$  grau  $(Q(x))$ , existem polinómios  $C(x)$  e  $R(x)$  tais que*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

com grau  $(R(x)) < \text{grau}(Q(x))$ .

*Demonstração.* Ver [3]. □

**Exemplo 9.3.2.**

$$\frac{2x^3 + 3x^2}{x^2 + 2x} = 2x - 1 + \frac{2x}{x^2 + 2x},$$

**Observação 9.3.3.** 1) Nas condições da proposição 9.3.1 tem-se que

$$P \frac{P(x)}{Q(x)} = P C(x) + P \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Como a primitiva do polinómio  $C(x)$  é imediata, basta então saber primitivar funções racionais  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  em que grau  $(P(x)) < \text{grau}(Q(x))$ .

2) Se  $Q'(x) = P(x)$ , então  $P \frac{P(x)}{Q(x)} = \ln |Q(x)|$ .

### 9.3.1 Fatorização de polinómios

**Proposição 9.3.4.** Qualquer polinómio de coeficientes reais de grau maior ou igual a 1 pode-se escrever como produto de polinómios de grau 1 (fatores correspondentes às raízes reais) e de grau 2 (fatores correspondentes às raízes complexas).

**Exemplo 9.3.5.** 1)  $x^2 + 2x = x(x + 2)$ .

2)  $x^3 + 2x^2 + 5x = x(x^2 + 2x + 5)$ . Observe-se que o polinómio  $x^2 + 2x + 5$  não se pode fatorizar em polinómios de grau 1 de coeficientes reais pois tem duas raízes complexas.

### 9.3.2 Frações elementares

Na primitivação de funções racionais, um procedimento muito útil é a decomposição de uma função racional como soma de frações elementares.

**Definição 9.3.6.** Chama-se **fração elementar** a uma função racional da forma

$$\frac{A}{(x - r)^s} \quad \text{ou} \quad \frac{Bx + C}{x^2 + bx + c},$$

em que  $s$  é um número natural e  $A, B, C, r, b, c$  são constantes reais, tais que  $x^2 + bx + c$  não tem raízes reais.

**Exemplo 9.3.7.**  $\frac{2}{x^2+2x} = \frac{2}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$ .

Olhando para o exemplo 9.3.7, pode-se perguntar como descobrir as constantes  $A$  e  $B$  tais que se consiga escrever a função racional  $\frac{2}{x^2+2x}$  na soma de duas frações elementares,  $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$ . Usualmente aplica-se o processo designado por **método dos coeficientes indeterminados**.

Neste caso, como o denominador da função racional  $\frac{2}{x^2+2x}$  é um polinómio de grau 2 com duas raízes reais distintas, pode-se fatorizar  $x^2+2x$  no produto de dois polinómios de grau 1, obtendo-se  $x^2+2x = x(x+2)$ . Quer-se então descobrir as constantes  $A$  e  $B$  tais que

$$\frac{2}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}.$$

Assim, reduz-se ao mesmo denominador o segundo membro da igualdade, obtendo-se

$$\frac{A(x+2) + Bx}{x(x+2)} = \frac{(A+B)x + 2A}{x(x+2)},$$

donde

$$\frac{2}{x(x+2)} = \frac{(A+B)x + 2A}{x(x+2)},$$

o que é verdade se e só se

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A=2 \end{cases} \iff \begin{cases} B=-1 \\ A=1 \end{cases},$$

donde se obtém a decomposição

$$\frac{2}{x^2+2x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}.$$

E assim, com esta decomposição, a primitiva da função racional torna-se imediata,

$$P \frac{2}{x^2+2x} = P \frac{1}{x} - P \frac{1}{x+2} = \ln|x| - \ln|x+2|.$$

**Exemplo 9.3.8.**  $\frac{2x^2+1}{x^3+x^2} = \frac{2x^2+1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$ .

Neste caso, o denominador  $x^3+x^2$  tem duas raízes reais,  $x=0$  e  $x=-1$ , em que  $x=0$  tem multiplicidade 2 (raiz dupla) e  $x=-1$  tem multiplicidade 1 (raiz simples). Assim, na decomposição em frações elementares, devem surgir 3 parcelas, duas associadas à raiz  $x=0$  e uma associada à raiz  $x=-1$ . Na expressão com a soma das 3 parcelas, reduzindo ao mesmo denominador,



obtém-se

$$\frac{2x^2 + 1}{x^2(x+1)} = \frac{Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2}{x^2(x+1)} = \frac{(A+C)x^2 + (A+B)x + B}{x^2(x+1)},$$

o que é verdade se e só se

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ A + B = 0 \\ B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C = 3 \\ A = -1 \\ B = 1 \end{cases},$$

donde se obtém a decomposição

$$\frac{2x^2 + 1}{x^3 + x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1}.$$

E assim, com esta decomposição, a primitiva da função racional torna-se imediata,

$$P \frac{2x^2 + 1}{x^3 + x^2} = -P \frac{1}{x} + P \frac{1}{x^2} + P \frac{3}{x+1} = -\ln|x| - \frac{1}{x} + 3 \ln|x+1|.$$

**Exemplo 9.3.9.**  $\frac{4x^2+3x+5}{x^3+2x^2+5x} = \frac{4x^2+3x+5}{x(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}.$

Neste caso, o denominador  $x^3 + 2x^2 + 5x$  tem uma raiz real,  $x = 0$ , e duas raízes complexas. Assim, na decomposição em frações elementares, devem surgir 2 parcelas, uma associada à raiz  $x = 0$  e uma associada às raízes complexas. Na parcela associada às raízes complexas, ou seja, ao polinómio  $x^2 + 2x + 5$ , no numerador surge o polinómio  $Bx + C$  de grau 1. Assim, reduzindo ao mesmo denominador a expressão com a soma das 2 parcelas, obtém-se

$$\frac{4x^2 + 3x + 5}{x^3 + 2x^2 + 5x} = \frac{A(x^2 + 2x + 5) + (Bx + C)x}{x(x^2 + 2x + 5)} = \frac{(A+B)x^2 + (2A+C)x + 5A}{x(x^2 + 2x + 5)},$$

o que é verdade se e só se

$$\begin{cases} A + B = 4 \\ 2A + C = 3 \\ 5A = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} B = 3 \\ C = 1 \\ A = 1 \end{cases},$$

donde se obtém a decomposição

$$\frac{4x^2 + 3x + 5}{x^3 + 2x^2 + 5x} = \frac{1}{x} + \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 5}.$$

E assim, com esta decomposição, a primitiva da função racional é,

$$P \frac{4x^2 + 3x + 5}{x^3 + 2x^2 + 5x} = P \frac{1}{x} + P \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 5} = \ln|x| + P \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 5},$$

faltando ainda calcular a primitiva da fração elementar associada às raízes complexas. Veja-se então como proceder para calcular a primitiva deste tipo de fração elementar. Comece-se por observar a seguinte proposição.

**Proposição 9.3.10.** *Se o polinómio  $x^2 + bx + c$  não tem raízes reais, então existem constantes reais  $\alpha$  e  $\beta$  tais que*

$$x^2 + bx + c = (x - \alpha)^2 + \beta^2.$$

*Demonstração.* Exercício. □

Considerando a fração elementar  $\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$  em que  $x^2+bx+c$  não tem raízes reais, têm-se dois casos para analisar: se  $B = 0$  (e  $C \neq 0$ ) ou se  $B \neq 0$ .

1) Se  $B = 0$ , pela proposição 9.3.10, tem-se

$$\frac{C}{x^2 + bx + c} = \frac{C}{\beta^2 + (x - \alpha)^2},$$

donde

$$P \frac{C}{x^2 + bx + c} = P \frac{C}{\beta^2 + (x - \alpha)^2} = \frac{C}{\beta} P \frac{\frac{1}{\beta}}{1 + \left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right)^2} = \frac{C}{\beta} \arctan\left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right).$$

2) Se  $B \neq 0$ , como  $(x^2 + bx + c)' = 2x + b$ , tem-se

$$\frac{Bx + C}{x^2 + bx + c} = \frac{\frac{B}{2}(2x + b) - \frac{Bb}{2} + C}{x^2 + bx + c} = \frac{B}{2} \frac{2x + b}{x^2 + bx + c} + \frac{C - \frac{Bb}{2}}{x^2 + bx + c},$$

donde

$$\begin{aligned} P \frac{Bx + C}{x^2 + bx + c} &= \frac{B}{2} P \frac{2x + b}{x^2 + bx + c} + P \frac{C - \frac{Bb}{2}}{x^2 + bx + c} \\ &= \frac{B}{2} \ln(x^2 + bx + c) + \frac{C - \frac{Bb}{2}}{\beta} \arctan\left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right). \end{aligned}$$

**Exemplo 9.3.11.** *Neste exemplo termina-se o cálculo da primitiva da função apresentada no exemplo 9.3.9. Nomeadamente, pelo que se apresentou*

anteriormente, tem-se que

$$\frac{3x+1}{x^2+2x+5} = \frac{3}{2} \frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{2}{x^2+2x+5},$$

donde

$$\begin{aligned} P \frac{3x+1}{x^2+2x+5} &= \frac{3}{2} P \frac{2x+2}{x^2+2x+5} - P \frac{2}{x^2+2x+5} \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) - \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right), \end{aligned}$$

uma vez que as raízes de  $x^2+2x+5$  são  $x = -1 \pm 2i$ , e se considera  $\alpha = -1$  e  $\beta = 2$ .

**Exercício 9.3.12.** Calcule uma primitiva das seguintes funções racionais:

- 1)  $\frac{1}{x^2-2x+1}$       (solução:  $-\frac{1}{x-1}$ ).
- 2)  $\frac{1}{x^2+x-2}$       (solução:  $-\frac{1}{3} \ln|x+2| + \frac{1}{3} \ln|x-1|$ ).
- 3)  $\frac{1}{x^2+2x+3}$       (solução:  $\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$ ).
- 4)  $\frac{1}{x(1+x^2)}$       (solução:  $\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ ).
- 5)  $\frac{x+1}{x(1+x^2)}$       (solução:  $\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \arctan x$ ).
- 6)  $\frac{x}{x-2}$       (solução:  $x + 2 \ln|x-2|$ ).
- 7)  $\frac{x^2+2x+3}{x^2-1}$       (solução:  $x + \ln|x^2-1| + 2 \ln|x-1| - 2 \ln|x+1|$ ).

## 9.4 Primitivação por partes

A regra usualmente designada por **primitivação por partes** aplica-se quando o cálculo da primitiva de algumas funções fica significativamente mais fácil quando se pode ver a função integranda como o produto de duas funções. Esta regra é apresentada no seguinte teorema.

**Teorema 9.4.1 (Primitivação por partes).** *Sejam  $f$  e  $g$  funções diferenciáveis em  $I$ . O produto  $f'g$  é primitivável em  $I$  se e só se o produto  $fg'$  é*

primitivável em  $I$ . Neste caso, tem-se a designada **regra da primitivação por partes**

$$P (f'g) = fg - P (fg') . \quad (9.1)$$

*Demonstração.* Exercício. Sugestão: use a regra da derivação do produto de funções.  $\square$

### Exemplo 9.4.2.

- 1) No cálculo da primitiva de  $x \sin x$ , considerando  $g(x) = x$  e  $f'(x) = \sin x$  e aplicando (9.1), tem-se

$$\begin{aligned} P x \sin x &= -x \cos x - P (-\cos x) \\ &= -x \cos x + P \cos x \\ &= -x \cos x + \sin x . \end{aligned}$$

- 2) No cálculo da primitiva de  $\ln x$ , considerando  $g(x) = \ln x$  e  $f'(x) = 1$  e aplicando (9.1), tem-se

$$\begin{aligned} P \ln x &= P (1 \cdot \ln x) \\ &= x \ln x - P \left( x \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= x \ln x - x . \end{aligned}$$

- 3) No cálculo da primitiva de  $\sin^2 x$ , considerando  $g(x) = \sin x$  e  $f'(x) = \sin x$  e aplicando (9.1), tem-se

$$\begin{aligned} P \sin^2 x &= -\sin x \cos x + P \cos^2 x \\ &= -\sin x \cos x + P (1 - \sin^2 x) \\ &= -\sin x \cos x + x - P \sin^2 x , \end{aligned}$$

donde, somando  $P \sin^2 x$  em ambos os membros, se obtém

$$2 P \sin^2 x = x - \sin x \cos x ,$$

ou seja,

$$P \sin^2 x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x .$$

## 9.5 Primitivação por substituição

O cálculo da primitiva de algumas funções pode tornar-se bastante mais simples se se fizer uma mudança de variável na função integranda. Esta

estratégia para o cálculo de primitivas designa-se usualmente por regra da **primitivação por substituição**, e é apresentada no seguinte teorema.

**Teorema 9.5.1 (Primitivação por substituição).** *Seja  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e seja  $\varphi : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow I$  uma função bijectiva e diferenciável tal que para  $t \in J$ ,  $\varphi'(t) \neq 0$ . Se a função  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  for primitivável, então  $f(x)$  também é, e nesse caso tem-se a designada **regra da primitivação por substituição***

$$P f(x) = P f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad (9.2)$$

em que  $t = \varphi^{-1}(x)$ .

*Demonstração.* Considere-se  $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ . Seja  $G$  uma primitiva de  $g$ . Observando que  $\varphi(t) = x$ , pode ver-se  $g$  como função de  $x$ , donde  $g(x) = f(x)\varphi'(\varphi^{-1}(x))$ , e assim  $G$  também pode ser vista como função de  $x$ . Então, aplicando a regra da derivada da função composta (teorema 8.4.1),

$$(G \circ \varphi^{-1})'(x) = G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x),$$

donde, observando que  $G' = g$  e aplicando a regra da derivada da função inversa (teorema 8.5.1),

$$(G \circ \varphi^{-1})'(x) = g(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x),$$

donde

$$P f(x) = P (G \circ \varphi^{-1})'(x) = (G \circ \varphi^{-1})(x) = G(t) = P g(t),$$

obtendo-se assim o resultado.  $\square$

**Exemplo 9.5.2.**

1) No cálculo da primitiva de  $\frac{x}{1+\sqrt{x}}$  em que  $x \in \mathbb{R}_0^+$ , considerando  $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\varphi(t) = t^2$ , e aplicando (9.2), tem-se

$$\begin{aligned} P \frac{x}{1+\sqrt{x}} &= P \left( \frac{t^2}{1+t} \cdot 2t \right) = P \frac{2t^3}{1+t} \\ &= P \left( 2t^2 - 2t + 2 - \frac{2}{1+t} \right) \\ &= \frac{2t^3}{3} - t^2 + 2t - 2 \ln(1+t) \\ &= \frac{2}{3} (\sqrt{x})^3 - x + 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}), \end{aligned}$$

dado que

$$x = \varphi(t) \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{x},$$

pois  $t \in \mathbb{R}_0^+$ .

- 2) No cálculo da primitiva de  $\sqrt{a^2 - x^2}$  em que  $a \in \mathbb{R}^+$  e  $x \in I = [-a, a]$ , considerando  $\varphi : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-a, a]$  definida por  $\varphi(t) = a \sin t$ , e aplicando (9.2), tem-se

$$\begin{aligned} P \sqrt{a^2 - x^2} &= P \left( \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2} \cdot a \cos t \right) = P (a^2 \cos^2 t) \\ &= a^2 P \cos^2 t = a^2 P (1 - \sin^2 t) = a^2 (t - P \sin^2 t) \\ &= a^2 \left( t - \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin t \cos t \right) \\ &= a^2 \left( \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin t \cos t \right) \\ &= \frac{a^2}{2} \left( \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) + \frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{a} \right) \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2}, \end{aligned}$$

dado que

$$\begin{aligned} x = \varphi(t) &\Rightarrow x = a \sin(t) \Rightarrow \sin(t) = \frac{x}{a} \\ &\Rightarrow t = \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) \text{ e } \cos(t) = \sqrt{1 - \left( \frac{x}{a} \right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}. \end{aligned}$$

## 9.6 A integração e a primitivação

O integral de uma função  $f$  não negativa, i.e., tal que  $f(D_f) \subseteq \mathbb{R}_0^+$ , calculado num intervalo  $[a, b] \subseteq D_f$  pode ser interpretado como a área da região do plano limitada pelo gráfico de  $f$ , o eixo dos  $x$  e as retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ , conforme exemplificado na figura 9.1.

**Definição 9.6.1.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a < b$ . Chama-se **integral definido** da função  $f$  no intervalo  $[a, b]$ , e representa-se por  $\int_a^b f(x) dx$ , ao valor real  $F(b) - F(a)$ , onde  $F$  é uma primitiva de  $f$  em  $[a, b]$ .*

*Tem-se assim a designada **fórmula de Barrow***

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

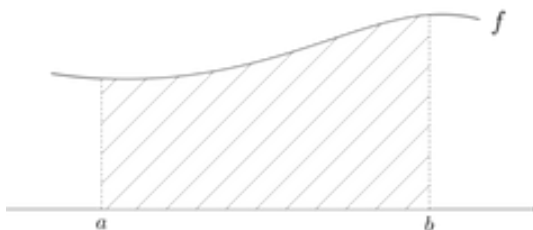


Figura 9.1: Representação a tracejado da região limitada pelo gráfico de uma função  $f$ , o eixo dos  $x$  e as retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ .

em que  $[F(x)]_a^b$  representa o cálculo de  $F(b) - F(a)$ .

**Proposição 9.6.2.** *Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas, seja  $k \in \mathbb{R}$  e seja  $c \in ]a, b[$ . Tem-se que:*

1.  $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx .$
2.  $\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx .$
3.  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$

*Demonstração.* Ver [5]. □

**Observação 9.6.3.**

1.  $\int_a^a f(x) dx = 0 .$

*Demonstração.* Exercício. □

2.  $\int_a^c f(x) dx = - \int_c^a f(x) dx .$

*Demonstração.* Exercício.. □

**Teorema 9.6.4 (Integral definido por partes).** *Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções com derivadas contínuas em  $[a, b]$  (i.e.,  $f, g \in C^1([a, b])$ ). Então*

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx .$$

*Demonstração.* Ver [5]. □

**Exemplo 9.6.5.**

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx &= [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \\ &= [-x \cos x + \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \end{aligned}$$

**Teorema 9.6.6 (Integral definido por substituição).** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e seja  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  uma função bijetiva e diferenciável tal que para  $t \in [c, d]$ ,  $\varphi'(t) \neq 0$ . Se a função  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  for primitivável em  $[c, d]$ , então  $f(x)$  é primitivável em  $[a, b]$ , e nesse caso tem-se*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt.$$

*Demonstração.* Ver [5]. □

**Exemplo 9.6.7.**

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt \\ &= \left[ \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin t \cos t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

## 9.7 Integral definido e cálculo de áreas

Se  $f(x) = c$ , com  $c \in \mathbb{R}^+$ , se  $a < b$ , tem-se

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b c \, dx = [cx]_a^b = c[x]_a^b = c(b-a) > 0.$$

Na realidade, este integral da função constante  $f(x) = c$  calculado no intervalo  $[a, b]$  corresponde à área da região do plano compreendida entre o gráfico de  $f$ , o eixo do  $x$ , e as retas  $x = a$  e  $x = b$ , conforme representado na figura 9.2.

E se  $c < 0$ ? Seja  $g(x) = c$ , com  $c \in \mathbb{R}^-$ . Se  $a < b$ , tem-se

$$\int_a^b g(x) \, dx = c(b-a) < 0.$$





Figura 9.2: Representação a tracejado da região limitada pelo gráfico da função constante  $f(x) = c > 0$ , o eixo dos  $x$  e as retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ .

Neste caso, o integral da função constante  $g(x) = c$ , com  $c < 0$ , calculado no intervalo  $[a, b]$  corresponde à área da região do plano compreendida entre o gráfico de  $g$ , o eixo do  $x$ , e as retas  $x = a$  e  $x = b$ , mas com sinal negativo, conforme representado na figura 9.3.



Figura 9.3: Representação a tracejado da região limitada pelo gráfico da função constante  $f(x) = c < 0$ , o eixo dos  $x$  e as retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ .

Suponha-se agora que  $f(x) = d$  e  $g(x) = c$  com  $d > c > 0$ . Nestas condições

$$\int_a^b f(x) - g(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = d(b-a) - c(b-a) = (d-c)(b-a),$$

que corresponde à área da região do plano compreendida entre os gráficos de  $f$  e de  $g$ , e as retas  $x = a$  e  $x = b$ , conforme representado na figura 9.4.

Mais geralmente:

- se  $f$  é uma função contínua e positiva em  $[a, b]$ , o integral definido

$$\int_a^b f(x) dx$$

é a área da região do plano compreendida entre o gráfico de  $f$ , o eixo do  $x$ , e as retas  $x = a$  e  $x = b$ , conforme representado na figura 9.5.



Figura 9.4: Representação a tracejado da região limitada entre os gráficos das funções constantes  $f(x) = d$  e  $g(x) = c$ , o eixo dos  $x$  e as retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ .

- se  $g$  é uma função contínua e negativa em  $[a, b]$ , o integral definido

$$\int_a^b g(x) dx$$

é a área da região do plano compreendida entre o gráfico de  $f$ , o eixo do  $x$ , e as retas  $x = a$  e  $x = b$ , mas com sinal negativo, conforme representado na figura 9.5.

- se  $f$  e  $g$  são funções contínuas e positivas em  $[a, b]$  mas tais que  $f > g$  no intervalo  $[a, b]$ , o integral definido

$$\int_a^b f(x) - g(x) dx$$

é a área da região do plano compreendida entre os gráficos de  $f$  e  $g$ , o eixo do  $x$ , e as retas  $x = a$  e  $x = b$ , conforme representado na figura 9.6.

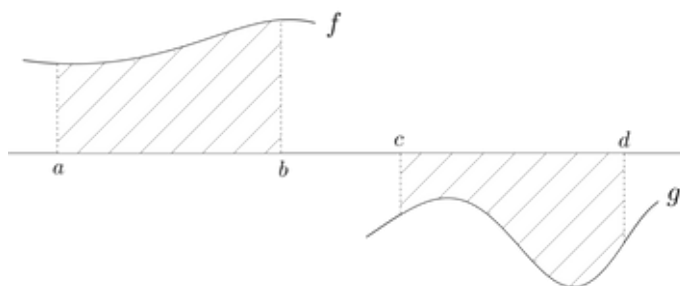


Figura 9.5: Representação a tracejado da região limitada entre o gráfico da função positiva  $f$ , o eixo dos  $x$  e as retas verticais  $x = a$  e  $x = b$  (à esquerda), e da região limitada entre o gráfico da função negativa  $g$ , o eixo dos  $x$  e as retas verticais  $x = c$  e  $x = d$  (à direita).

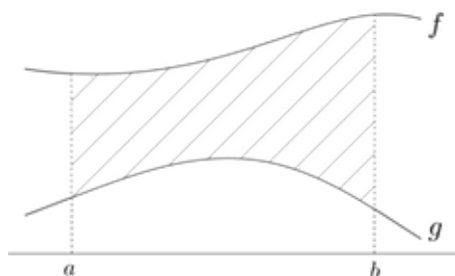


Figura 9.6: Representação a tracejado da região limitada entre os gráficos das funções positivas  $f$  e  $g$  tais que  $f > g$  no intervalo  $[a, b]$ , o eixo dos  $x$  e as retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ .

E se a função  $f$  mudar de sinal no intervalo  $[a, b]$ ? Seja  $f$  uma função contínua definida no intervalo  $[a, b]$  tal que  $f(x) > 0$  para  $x \in [a, c]$  e  $f(x) < 0$  para  $x \in ]c, b]$ . Nesse caso, se se quiser calcular a área da região do plano limitada entre o gráfico da função  $f$  e as retas  $x = a$  e  $x = b$ , temos de calcular o integral da função  $|f(x)|$  no intervalo  $[a, b]$ , ou seja, tem-se

$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx,$$

conforme exemplificado na figura 9.7.

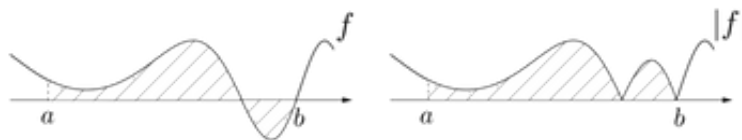


Figura 9.7: Representação a tracejado da região limitada entre o gráfico da função  $f$ , o eixo dos  $x$  e as retas verticais  $x = a$  e  $x = b$  (à esquerda), e da região limitada entre o gráfico da função  $|f|$ , o eixo dos  $x$  e as retas verticais  $x = a$  e  $x = b$  (à direita).

**Exemplo 9.7.1.** Seja  $f(x) = \sin x$ . Tem-se que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0,$$

e

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 -\sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 2.$$

**Exemplo 9.7.2.** A área da região do plano definida pelo conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq |x|\},$$

representada geometricamente na figura 9.8, é

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |x| - x^2 dx &= \int_{-1}^0 |x| - x^2 dx + \int_0^1 |x| - x^2 dx \\ &= \int_{-1}^0 -x - x^2 dx + \int_0^1 x - x^2 dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

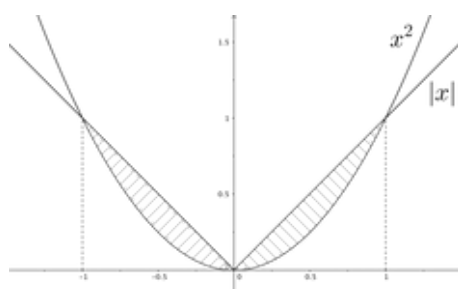


Figura 9.8: Representação a tracejado da região do plano definida pelo conjunto  $A$ .

## 9.8 Integrais impróprios

Na teoria da integração que se viu até agora, exige-se que a função  $f$  seja contínua no intervalo  $[a, b]$ , o que implica que seja limitada em  $[a, b]$ . Exigiu-se ainda que o intervalo  $[a, b]$  seja limitado, i.e., nem  $a$  nem  $b$  podem ser  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Então, se por exemplo,  $f$  estiver definida em  $[a, b[$  ou  $]a, b]$  e que seja limitada nesse conjunto? E se  $a$  ou  $b$  forem  $+\infty$  ou  $-\infty$ ? Veja-se a seguinte definição.

**Definição 9.8.1 (integral impróprio).** Chamam-se **integrais impróprios** aos integrais com intervalo de integração ilimitado ou com a função integranda ilimitada no intervalo de integração.

Vão-se considerar dois tipos de integrais impróprios:

- integral com *intervalo de integração ilimitado* - quando um dos extremos do intervalo de integração é  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Neste caso, tem-se

- i)  $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ , supondo que  $a \in \mathbb{R}$  e a função  $f$  definida em  $[a, +\infty[$  é integrável em qualquer intervalo  $[a, t]$  com  $t > a$ ;
- ii)  $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$ , supondo que  $b \in \mathbb{R}$  e a função  $f$  definida em  $] -\infty, b[$  é integrável em qualquer intervalo  $[t, b]$  com  $t < b$ ;
- iii)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$ , ;

- integral com *função integranda ilimitada* - quando a função num dos extremos do intervalo de integração atinge valores de  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Neste caso,

- i) se  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$ ,  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$ , supondo que  $a, b \in \mathbb{R}$ , com  $a < b$ , e a função  $f$  definida em  $[a, b[$  é integrável em qualquer intervalo  $[a, t]$  com  $a < t < b$ ;
- ii) se  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ,  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$ , supondo que  $a, b \in \mathbb{R}$ , com  $a < b$ , e a função  $f$  definida em  $]a, b]$  é integrável em qualquer intervalo  $[t, b]$  com  $a < t < b$ .

**Definição 9.8.2 (convergência do integral).** *O integral impróprio diz-se:*

- **convergente**, quando existe e é finito o limite em causa;
- **divergente**, caso contrário, ou seja, o valor do limite é infinito ou não existe.

**Exemplo 9.8.3.**

1) *Tem-se que o integral impróprio*

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [\arctan(x)]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan(t) - \underbrace{\arctan(0)}_{=0} \\ &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

donde, o integral impróprio  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$  é convergente.

2) Tem-se que o integral impróprio

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} [-2\sqrt{1-x}]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \underbrace{-2\sqrt{1-t} + 2\sqrt{1-0}}_{=0} \\ &= 2, \end{aligned}$$

donde, o integral impróprio  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$  é convergente.

3) Tem-se que o integral impróprio

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [\ln x]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t - \underbrace{\ln 1}_{=0} \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

donde, o integral impróprio  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  não é convergente, dizendo-se por isso que é divergente.

## 9.9 Teorema fundamental do cálculo integral

**Teorema 9.9.1 (Teorema fundamental do cálculo integral).** *Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$ . Então a função  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é diferenciável, e para cada  $x \in [a, b]$ ,

$$F'(x) = f(x).$$

**Observação 9.9.2.** *Pode-se assim derivar funções do tipo  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  onde  $f$  é contínua, sendo  $F'(x) = f(x)$ , em qualquer intervalo que contenha o ponto  $a$ .*

**Exemplo 9.9.3.**

1) A função  $F(x) = \int_0^x \frac{t^3 + 1}{t^2 + 1} dt$  tem derivada  $F'(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$ .

2) A função  $F(x) = \int_x^1 \sin(t^2) dt$  pode escrever-se como  $F(x) = \int_1^x -\sin(t^2) dt$ , donde a sua derivada é  $F'(x) = -\sin x^2$ .

3) Qual a derivada da função  $F(x) = \int_2^{x^2} e^{-t^2} dt$ ? Considerando  $h(x) = x^2$  e  $G(y) = \int_2^y e^{-t^2} dt$ , tem-se que  $F(x) = (G \circ h)(x)$ . Assim, pelo Teorema da derivada da função composta (ver Teorema 8.4.1) tem-se que  $F'(x) = G'(h(x))h'(x) = 2xe^{-x^4}$ .

4) Qual a derivada da função  $F(x) = \int_x^{x^2} \ln\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt$ ? Usando uma propriedade dos integrais, tem-se que

$$F(x) = \int_x^0 \ln\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt + \int_0^{x^2} \ln\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt,$$

$$\text{donde } F'(x) = 2x \ln\left(\frac{1}{1+x^4}\right) - \ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right).$$

**Observação 9.9.4.** Se  $F(x) = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t) dt$  então

$$F'(x) = h_2'(x)f(h_2(x)) - h_1'(x)f(h_1(x)).$$

# Bibliografia

- [1] T.M. Apostol, *Cálculo*, (Vol.1. Portugues), Editorial Reverté, 1985.
- [2] I. Cabral, C. Perdigão, and C. Saiago, *Álgebra linear: teoria, exercícios resolvidos e exercícios propostos com soluções*, Escolar Editora, 3<sup>a</sup> ed., 2012.
- [3] Jaime Campos Ferreira, *Introdução à análise matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian, 2008.
- [4] Maria do Rosário Grossinho, *Lições de matemática - notas teóricas*, ISEG, 2013.
- [5] Carlos Sarrico, *Análise matemática leituras e exercícios*, Gradiva, 2013.
- [6] K. Sydsæter and P.J. Hammond, *Essential mathematics for economic analysis*, FT Prentice Hall, 2008.



# Index

- ínfimo, 50
- coeficientes, 36
- cofator, 30
- complemento algébrico, 30
- conjunto
  - aberto, 54
  - aderência, 54
  - compacto, 54
  - derivado, 53
  - exterior, 53
  - fechado, 54
  - fecho, 54
  - fronteira, 53
  - interior, 53
  - limitado, 51
  - limitado inferiormente, 51
  - limitado superiormente, 51
  - majorado, 50
  - minorado, 50
- denso, 49
- dependência linear, 7
- derivada, 76
  - da função composta, 78
  - da função inversa, 79
  - Regra de Cauchy, 80
  - regras de derivação, 78
- Desigualdade triangular, 7
- determinante, 29
- diagonal principal, 13
- distância, 6
- equação linear, 36
  - homogénea, 36
  - solução, 36
- extremante, 81
- extremo global ou absoluto, 81
- extremos locais ou relativos, 81
- fórmula de Barrow, 98
- Fórmula de Mac-Laurin, 84
- Fórmula de Taylor, 83
- função
  - ímpar, 66
  - contradomínio, 63
  - domínio, 63
  - continua, 74
  - continuidade num ponto, 74
  - crescente, 66
  - decrecente, 66
  - injetiva, 65
  - limitada, 66
  - par, 66
  - polinomial, 64
- função derivada, 77
- independência linear, 7
- indução matemática, 46
  - hipótese de indução, 46
  - tese de indução, 46
- integrais impróprios, 104
- integral convergente, 105
- integral definido, 98
  - por partes, 99
  - por substituição, 100
- integral divergente, 105
- intervalo
  - aberto, 50
  - fechado, 50
  - semiaberto, 50
- limite, segundo Cauchy, 74

- máximo, 51
- máximo global ou absoluto, 81
- máximo local ou relativo, 81
- método de indução matemática, 46
- método dos coeficientes indeterminados, 92
- módulo, 52
- mínimo, 51
- mínimo global ou absoluto, 81
- mínimo local ou relativo, 81
- majorante, 50
- matriz, 12
  - característica, 19
  - condensação, 21
  - equivalente por linhas, 21
  - forma de escada, 20
  - igualdade de matrizes, 14
  - inversa, 23
  - invertível, 23
  - matriz anti-simétrica, 19
  - matriz coluna, 13
  - matriz diagonal, 13
  - matriz identidade, 14
  - matriz nula, 14
  - matriz quadrada, 13
  - matriz simétrica, 19
  - matriz triangular inferior, 13
  - matriz triangular superior, 13
  - pivô, 20
  - potência, 18
  - produto de matrizes, 16
  - produto por um escalar, 15
  - soma de matrizes, 14
  - transposta, 18
  - matriz linha, 12
- maximizante, 81
- minimizante, 81
- minorante, 50
- monotonia, 66
  
- números inteiros, 48
- números naturais, 48
- números racionais, 48
  
- números reais, 48
  
- par ordenado, 3
- paradoxo de Zenão, 57
- paradoxo do corredor, 57
- polinómio, 64
- Polinómio de Taylor, 83, 84
  - Resto de Lagrange, 84
- ponto
  - de acumulação, 53
  - exterior, 53
  - fronteiro, 53
  - interior, 53
  - isolado, 53
- ponto crítico, 81
- ponto de inflexão, 86
- primitivas, 88
  - fração elementar, 91
  - funções racionais, 90
  - primitivação por substituição, 97
  - primitivação por partes, 95
  - primitivas imediatas, 89
  - propriedades, 89
- progressão geométrica, 56
- prolongamento por continuidade, 74
  
- relação de ordem, 49
- reta tangente, 85
  
- série
  - de potências, 64
- série exponencial, 65
- série geométrica, 61
  - razão da, 61
- série harmónica, 60
- série numérica, 59
- sistema de equações lineares, 37
  - discussão do sistema, 38
  - forma matricial, 38
  - grau de indeterminação, 41
  - graus de liberdade, 41
  - homogéneo, 37
  - impossível, 38

- Método de eliminação de Gauss, 41
- Método de eliminação de Gauss-Jordan, 41
- matriz simples, 39
- possível, 38
- possível e determinado, 38
- possível e indeterminado, 38
- Regra de Cramer, 43
- resolução do sistema, 38
- sistema de Cramer, 43
- sistemas equivalentes, 39
- solução, 37
- solução trivial, 37
- transformação elementar sobre as linhas, 20
- sucessão, 55
  - convergente, 55
  - definição por recorrência, 55
  - divergente, 55
  - limitada, 56
  - limite, 55
  - termo geral, 55
  - termos da sucessão, 55
- supremo, 50
  
- Teorema de Fermat, 81
- Teorema de Lagrange, 82
- Teorema de Laplace, 30
- Teorema de Rolle, 82
- Teorema fundamental do cálculo integral, 106
- termo independente, 36
  
- valor absoluto, 52
- vetor, 3
  - igualdade, 3
  - multiplicação por um escalar, 4
  - norma, 6
  - norma, propriedades, 6
  - produto interno, 5
  - produto interno, propriedades, 5
  - soma de vetores, 4
  - adição de vetores, propriedades, 4
  - multiplicação por um escalar, propriedades, 4
  - vizinhança, 53