Análise Matemática IV

LISTA 1 [1]

Revisão da integração em $\mathbb{C}$, séries de Laurent

(1) Calcule os seguintes integrais para o caminho γ (sentido anti-horário) que circunda o quadrado com vértices nos pontos 0, 1, i e $1+i$:
  (a) $\int_\gamma \Re z \, dz$
  (b) $\int_\gamma (z^2+1)\, dz$
  (c) $\int_\gamma \overline{z}\, dz$

(2) Encontre dois caminhos regulares γ_1 e γ_2 com pontos inicial e final iguais, tais que
$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz \neq \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz.$$
Explique porque isto não viola o teorema fundamental do cálculo.

(3) Calcule:
  (a) $\int_{|z|=1} (\overline{z})^{-1} dz$.
  (b) $\int_\gamma (z-a)^n dz$ onde $n \in \mathbb{Z}$ e γ determina a circunferência de raio r centrada em $a \in \mathbb{C}$.

(4) *Mostre que para qualquer caminho fechado regular por troços $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ com $w \notin \gamma([a,b])$ temos que
$$\operatorname{rot}(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-w} \in \mathbb{Z}.$$
Note que o número acima $\operatorname{rot}(\gamma, w)$ (chamado número de rotação de γ em torno de w) indica o número de "voltas" dadas pelo caminho em redor do ponto w.

Sugestão: Considere a função
$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-w} ds, \quad t \in [a,b].$$
Queremos então provar que $h(b) \in \mathbb{Z}$. Para isso verifique que $[\gamma(t) - w]e^{-2\pi i h(t)}$ é constante.

(5) Determine a convergência de $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ em $D_r(0)$.

(6) Mostre que $\sum_{n\geq 0} z^n$ converge em $D_1(0)$ para a função $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Prove que a convergência é uniforme e absoluta em qualquer conjunto $\overline{D_r(0)}$ com $r < 1$.

[1] As questões mais difíceis encontram-se marcadas com *. A colaboração entre colegas é encorajada, mas cada estudante/grupo deve escrever as suas próprias soluções, compreendê-las e dar crédito aos seus colaboradores.

(7) Mostre que a função zeta (ζ) de Riemann[2]

$$\zeta(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-z}$$

é analítica em $A = \{z \in \mathbb{C} \colon \Re z > 1\}$.

(8) Escreva a série de Laurent de

(a) $f(z) = \sin \frac{1}{z^2}$ para $0 < |z| < 1$.

(b) $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ para $0 < |z| < 1$ e $0 < |z-1| < 1$.

[2]Riemann (1826 - 1866) observou que a frequência dos números primos entre os naturais é muito parecida com o comportamento da função ζ. A famosa "Hipótese de Riemann" conjectura que todas as soluções de $\zeta(z) = 0$ encontram-se na recta vertical $\{z \in \mathbb{C} \colon \Re z = \frac{1}{2}\}$. Isto já foi verificado para as primeiras 10^{13} soluções (Fev 2022). Porém, uma demonstração formal para qualquer caso não é conhecida. No caso de ter alguma boa ideia, gostará de saber que há um prémio de \$$10^6$ USD (873.315€ à cotação de 4/2/2022) para quem resolver este problema. Veja em: http://www.claymath.org/millennium-problems/riemann-hypothesis