Simulação e Otimização

Capítulo 1: Técnicas de resolução de problemas de otimização combinatória

Ano letivo 2023/2024

Relaxações

1. Considere os seguintes problemas de PLIM.

(a)

$$\begin{aligned} &\max\ 2x_1 + x_2 \\ &\text{s.a: } x_1 + x_2 \leq 5 \\ &\quad x_1 \geq 1 \\ &\quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} &\max\ 3x_1 + x_2 \\ &\text{s.a: } x_1 + x_2 \leq 5 \\ &\quad x_1 \geq 1 \\ &\quad x_2 \geq -2 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} &\max\ 2x_1 + x_2 \\ &\text{s.a: } \frac{2}{3}x_1 + x_2 \leq 4 \\ &\quad x_1 \geq 1 \\ &\quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} &\max\ x_1 + x_2 \\ &\text{s.a: } x_1 + x_2 \leq 5 \\ &\quad x_1 \geq 1 \\ &\quad x_2 \geq 0 \text{ e inteiro} \end{aligned}$$

Indique, justificando, quais são os problemas que formam um par (problema original, relaxação).

2. Considere os seguintes problemas de PLI:

(a)

$$\begin{aligned} &\max\ 5x_1 - 2x_2 \\ &\text{s.a: } 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ &\quad x_1 - x_2 \geq 0 \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} &\min\ 4x_1 + 3x_2 \\ &\text{s.a: } x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ &\quad 2x_1 + x_1 \geq 2 \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

Resolva a sua relaxação linear e indique o que pode concluir sobre o seu valor ótimo.

3. Indique uma relaxação, que não seja a linear, do seguinte problema de PLI:

$$\begin{aligned} &\min\ 3x_1 - x_2 \\ &\text{s.a: } x_1 + x_2 \leq 5 \\ &\quad 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ &\quad x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

4. Escreva a relaxação lagrageana dos seguintes PLI, relaxando as restrições assinaladas com (*).

(a)

$$\begin{aligned}
\max z = {} & 16x_1 + 10x_2 + 4x_4 \\
\text{sujeito a: } & 8x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 10 \qquad (*) \\
& x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_3 + x_4 \leq 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\min z = {} & 3x_1 + 2x_2 \\
\text{sujeito a: } & 2x_1 + 5x_2 \geq 3 \qquad (*) \\
& 5x_1 + 2x_2 \geq 3 \qquad (*) \\
& x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0
\end{aligned}$$

5. Resolva os problemas relaxados do exercício anterior considerando os seguintes multiplicadores de lagrange.

   (a) i. $u = 2$

   ii. $u = 0,5$

   iii. $u = 1$

   iv. $u = 6$

   (b) i. $u = (1, 1)$

   ii. $u = (\frac{3}{8}, \frac{3}{8})$

   iii. $u = (0, 1)$

   iv. $u = (0, \frac{1}{2})$

   Indique, em cada alínea, o valor do melhor limite encontrado.

6. Considere o seguinte problema de PLIM.

$$\begin{aligned}
\min z = {} & 7x_{11} + 8x_{12} + 3x_{21} + 5x_{22} + 7x_{31} + 9x_{32} + 150y_1 + 94y_2 + 105y_3 \\
\text{s. a: } & x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 41 \qquad (*) \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 55 \\
& x_{11} + x_{12} \leq 38y_1 \qquad (*) \\
& x_{21} + x_{22} \leq 32y_2 \\
& x_{31} + x_{32} \leq 30y_3 \\
& y_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, 2, 3 \\
& x_{ij} \geq 0 \qquad i, j = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

   (a) Atribuindo valores admissíveis aos multiplicadores de Lagrange defina e resolva a relaxação Lagrangeana do problema, relaxando as restrições assinaladas com $(*)$. Relacione o valor ótimo do problema resolvido com o valor ótimo do problema inicial (sem o resolver).

   (b) Escreva o enunciado de um problema que pudesse dar origem ao modelo apresentado e defina as variáveis de forma compatível.

   (c) Escreva um enunciado para uma nova restrição que inclua apenas as variáveis binárias e escreva a restrição correspondente a adicionar ao modelo inicial.

7. Considere o seguinte PLI

$$z = \max\{c(x) : Ax \geq b,\ Dx \leq d,\ Tx = t,\ x \in X \cap \mathbb{Z}^n\}.$$

   Deduza as expressões da relaxação lagrangeana e do problema dual lagrangeano considerando que todos os conjuntos de restrições (à exceção das restrições que definem X) devem ser relaxados.

8. Considere o seguinte PLI.

$$
\begin{aligned}
(P) \equiv \max z = &\ x_1 + 10x_2 \\
\text{s.a: } &\ 4x_1 + x_2 \leq 4 \\
&\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
&\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}
$$

(a) Resolva graficamente a relaxação linear de (P).

(b) Considere a relaxação Lagrangeana obtida relaxando a primeira restrição $4x_1 + x_2 \leq 4$.

i. Resolva para os seguintes valores dos multiplicadores: 0, $\frac{1}{4}$, 4.

ii. Determine a função dual Lagrangeana.

iii. Resolva o problema dual Lagrangeano. O que pode concluir sobre a solução ótima de P?

(c) Considere a relaxação lagrangeana obtida relaxando a segunda restrição $x_1 + 2x_2 \leq 3$.

i. Mostre que satisfaz a propriedade da integralidade.

ii. Determine o valor ótimo do problema dual Lagrangeano.