1 Lógica Matemática

Exercício 1. Exemplifique os termos gerados por cada alfabeto $\mathcal{A}$ e respetivas operações indicadas em baixo, dando cinco exemplos:

1. $((\{\text{amarelo, azul, ...}\}), \text{misturado com})$;
2. $(\mathbb{Z}, +, -, *)$;
3. $(\{0,1\}, *, ^2)$;

Exercício 2. Exemplifique as proposições gerados pelos termos e símbolos de predicado correspondentes, dando cinco exemplos:

1. $((\mathbb{Q}, +, /), \text{está em forma irredutível})$;
2. $((\mathbb{Z}, +, -, *), =, <)$;
3. $((\mathbb{C}, +, *), \text{é um número real}, =)$

Exercício 3. Para cada um dos casos em baixo, defina termos, incluindo o alfabeto e operações, e símbolos de predicado apropriados para expressar propriedades:

1. sobre gestão e desporto;
2. sobre os números racionais;
3. sobre funções de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$.

E dê exemplo de 5 proposições.

Exercício 4. Escreva as proposições que representam as seguintes afirmações e diga o seu valor lógico:

1. a soma de 0.5 com 0.25 é maior que 1;
2. (o quadrado de -1 é igual a -1) ou (a soma de 1 com 2 é igual a 4);

3. a raiz quadrada de 5 não é maior que 2;

4. o modulo de -3 é maior que -2;

5. (1 é maior que 2) implica que ([2 é maior que 0] ou [a raiz quadrada de 4 é igual a -2]);

6. (π pertence a $\mathbb{R}$) é equivalente a (2 é maior que 3);

Exercício 5. Calcule a tabela de verdade das seguintes proposições e indique os valores lógicos que a tornam verdadeira:

1. $\neg p \vee q \Rightarrow r$
2. $[p \wedge \neg q] \vee \neg p$
3. $p \wedge [\neg q \vee \neg p]$
4. $[p \Rightarrow q] \Rightarrow r$
5. $p \Rightarrow [q \Rightarrow r]$
6. $[p \Rightarrow q] \Rightarrow [q \Rightarrow p]$
7. $\neg q \Leftrightarrow [p \vee \neg r]$
8. $p \Leftrightarrow [p \vee \neg q]$
9. $[p \Leftrightarrow r] \vee q$
10. $[p \wedge [p \Rightarrow q]] \Rightarrow q$
11. $[\neg[p \vee q]] \wedge p \Rightarrow q$
12. $[\neg[p \wedge q]] \vee p$
13. $p \vee q \Leftrightarrow p \vee \neg q$
14. $p \wedge (q \Leftrightarrow p)$
15. $\neg p \Rightarrow (p \vee \neg q)$

Exercício 6. Mostre que as seguintes equivalências são verdadeiras:

1. $p \Leftrightarrow \neg[\neg p]$
2. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
3. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
4. $p \vee [q \vee r] \Leftrightarrow [p \vee q] \vee r$
5. $p \wedge [q \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge q] \wedge r$
6. $p \vee [q \wedge r] \Leftrightarrow [p \vee q] \wedge [p \vee r]$
7. $p \wedge [q \vee r] \Leftrightarrow [p \wedge q] \vee [p \wedge r]$
8. $\neg[p \vee q] \Leftrightarrow [\neg p \wedge \neg q]$
9. $\neg[p \wedge q] \Leftrightarrow [\neg p \vee \neg q]$
10. $(\neg[p \Rightarrow q]) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$
11. $[p \Rightarrow q] \Leftrightarrow [(\neg q) \Rightarrow (\neg p)]$
12. $[p \Rightarrow (\neg q)] \Leftrightarrow \neg[p \wedge q]$
13. $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$
14. $[p \Leftrightarrow q] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$

Exercício 7. Para cada proposição seguinte, escreva uma proposição equivalente utilizando apenas as operações de negação $\neg$ e disjunção $\wedge$:

1. $p \vee \neg q$
2. $p \wedge [\neg q \vee \neg p]$
3. $[p \Rightarrow q] \Rightarrow r$
4. $p \Rightarrow [q \Rightarrow r]$
5. $[p \Rightarrow q] \Rightarrow [q \Rightarrow p]$
6. $\neg q \Leftrightarrow [p \vee \neg r]$

Exercício 8. Escreva a negação das seguintes proposições:

1. $p \vee \neg q$
2. $((\neg p) \wedge q) \vee r$
3. $p \Rightarrow q \wedge r$
4. $p \vee q \Rightarrow q$
5. $p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p)$
6. $p \Leftrightarrow [p \vee \neg q]$

Exercício 9. Identifique o conjunto das variáveis das designações seguintes e indique quais das variáveis são livres:

1. $x > 2$
2. $x = y$
3. $x < 1 \wedge y + 1 > 2$
4. $x > 1 \vee x < -1$
5. $x > y \vee x = 2 \Rightarrow y = 4$
6. $\forall_x \; x = 2$
7. $\exists_y \; x = 2 * y \vee y = 3$
8. $\exists_{x,y} \; x = 2 * y \vee y = 3$
9. $\forall_y \; \neg(x > y)$
10. $\exists_y \; x = y^2 \Rightarrow x \geq 0$

Exercício 10. Determine o valor lógico das seguintes proposições sobre os números reais:

1. $\forall_x \; x > 2$
2. $\forall_x \; x = 2$
3. $\exists_x \; (x < 1 \wedge x + 1 > 4)$
4. $(\exists_x \; x < 1) \wedge (\exists_x \; x + 1 > 4)$
5. $\exists_x \; x > 1 \vee x < -1$
6. $\forall_x \; |x + 2| = 1 \Rightarrow x = -1$
7. $\forall_x \; |x| < 2 \Rightarrow x < 2$
8. $\exists^1_x \; x^2 = 9$
9. $\exists^1_x \; x^3 = 3$
10. $\exists^1_x \; x^2 = -3$
11. $\exists_x \; \forall_y \; x = y$
12. $\forall_x \; \exists_y \; x = y$
13. $\forall_{x,y} \; x = y$
14. $\exists^1_{x,y} \; x * y = -3$
15. $\forall_x \; \exists_y \; x^2 = y \wedge y \geq 0$
16. $\forall_x \; \exists_y \; x^3 + y = -8 \wedge y > -1$

17. $\exists_x \ \forall_y \ x < 1 \wedge y + 1 > 2$
18. $\exists_y \ \forall_x \ x = 2 * y \vee y = 3$
19. $\exists_{x,y} \ x = 2 * y \vee y = 3$
20. $\exists_y \ \forall_x \ (y+2)^2 = x \Rightarrow x \geq 0$
21. $\forall_x \exists_y \ x * y = 0 \Rightarrow x = 0$
22. $\forall_x \ \exists_{y,z} \ x + z > y \vee x = 2 \Rightarrow y = 4$
23. $\exists_x \ \forall_{y,z} \ \neg(x > y * z)$
24. $\forall_x \ \exists_{y,z} \ x = y^2 \Rightarrow x + z \geq 0$

Exercício 11. Escreva a negação das seguintes designações:

1. $x > 2$
2. $x = y$
3. $x < 1 \wedge y + 1 > 2$
4. $x > 1 \vee x < -1$
5. $(x > y \vee x = 2) \Rightarrow y = 4$
6. $\forall_x \ x = 2$
7. $\exists_y \ x = 2 * y \vee y = 3$
8. $\exists_{x,y} \ x = 2 * y \vee y = 3$
9. $\forall_y \ \neg(x > y)$
10. $\exists_y \ x + z = y^2 \Rightarrow x \geq 0$

Exercício 12. Seja $A = \{1, 2, -1\}$ e $B = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{-1\}\}$.
a)Mostre que a seguinte proposição é verdadeira

$$\forall_x x \in A \Rightarrow x^2 > 0.$$

b) Mostre que a seguinte proposição é falsa

$$\forall_Y Y \subseteq A \Rightarrow Y \in B.$$

Exercício 13. Dados conjuntos A, B e C, mostre que as seguintes proposições são verdadeiras:

1. $A \cap B \subseteq B$
2. $A \subseteq A \cup B$
3. $A \subseteq A$
4. $(A^c)^c = A$
5. $A \setminus \emptyset = A$
6. $\emptyset \subseteq A$
7. $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$
8. $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
9. $A \setminus B = A \cap B^c$
10. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
11. $(A \cup B^c)^c = A^c \cap B$
12. $B \subseteq A \Rightarrow A \setminus (A \setminus B) = B$
13. $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A \wedge A \cup B = B$
14. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Exercício 14. Verifique se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas:

1. $-1 \in \mathbb{N}$
2. $-1 \in \mathbb{Z}$
3. $\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$
4. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
5. $\mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{Z} \cap \{x > 0\}$
6. $\{x^2 > 0\} \cup \{x < 1\} \subset \{x > -2\}$
7. $\imath^2 \in \mathbb{N}$
8. $3 \in \{1, \{1, 3\}\}$
9. $\{1\} \in \{1, \{1, 3\}\}$
10. $\{1, 3\} \subset \{1, \{1, 3\}\}$
11. $\{1\} \subset \{1, \{1, 3\}\}$

Exercício 15. Seja $A = \{2, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$.
a) Calcule explicitamente os conjuntos $\mathcal{P}(A)$, $A \times B$, $B \times A$ e A^3.
b) Dê um exemplo de um subconjunto de $A \times B$ que não seja dado pelo produto cartesiano de dois subconjuntos de A e B.

Exercício 16. Dado um conjunto A, mostre que todos subconjuntos de A^2 são dados pelo produto interno de dois subconjuntos de A se e só se A é o conjunto vazio ou tem apenas um elemento.

Exercício 17. Verifique se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas:

1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
3. $A \times \emptyset = A$
4. $A \subseteq A^2$
5. $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$
6. $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$

1.1 Princípio de indução

Exercício 18. Seja A um conjunto com n elementos. Prove por indução que o conjunto das partições de A, $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

Exercício 19. Prove por indução que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Exercício 20. Considere a sequencia de números inteiros dada por $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$ onde $u_1 = 3$ e $u_2 = 9$. Mostre usando o principio de indução que u_n é dado pela forma $2^{n+1} + (-1)^n$.

Exercício 21. Seja $A_1, A_2, A_3, \ldots$ subconjuntos de $\mathbb{R}$ e definimos o subconjunto U_n como a intersecção dos primeiros n subconjuntos A_i:

$$U_n = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

Mostre por indução matemática que o interior de U_n é igual a interseção do interior dos subconjuntos A_i:

$$int(U_n) = int(A_1) \cap int(A_2) \cap \cdots \cap int(A_n).$$

2 Números reais

Exercício 22. Calcule as soluções das seguintes equações:

1. $|x + 2| = 3$
2. $|2x + 3| = 2$
3. $|x^2 + x| = 2$
4. $|x + 3| = x$
5. $|x + 3| = -2$
6. $|x + 5| < 3$
7. $|2x + 1| \geq 3$
8. $|2x^2 + 1| > 2$
9. $x^3 - 3x > 0$
10. $\dfrac{|x|}{x} + x > 0$
11. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{6} \leq 0$
12. $x^2 + 3x - 2 = 0$
13. $x^2 - 4x + 4 \leq 0$
14. $x^2 + 6x + 15 \geq 0$
15. $5 + \dfrac{2}{x} > 2$

Exercício 23. Escreva o conjunto das soluções calculados no exercício anterior como a união de intervalos.

2.1 Topologia em $\mathbb{R}$

Exercício 24. Indique os majorantes, os minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos seguintes subconjuntos:

1. $\{2, 3, \pi, 7, \sqrt{2}\}$
2. $]-2, 3] \cup]4, 5[$
3. $[-3, 32[\cap \mathbb{Q}$
4. $\{x \in \mathbb{R} : |2x - 1| \geq 2\}$
5. $\{x \in \mathbb{R} : |2 - x| \geq 2\}$
6. $\{x \in \mathbb{R} : |2 + 5x| \leq 2\}$

7. $\{x \in \mathbb{R} : |2+2x| = |x+4|\}$
8. $\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq |2+2x| \leq 9\}$
9. $B = \{x \in \mathbb{R} : 11 < |3x+2| \leq 17\}$
10. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 9 \leq 3\}$
11. $\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x-1} \geq 3\}$
12. $\{0, 0.9, 0.99, 0.999, \dots\}$
13. $\{\dfrac{1}{2+n} : n \in \mathbb{N}\}$
14. $\{m + \dfrac{1}{n} : n, m \in \mathbb{N}\}$
15. $\{\dfrac{1}{m^2} + \dfrac{1}{n} : n, m \in \mathbb{N}\}$
16. $\{(-1)^n \dfrac{1}{n+2} : n, m \in \mathbb{N}\}$

Exercício 25. Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado. Mostre que existe M tal que $A \subseteq V_M(0)$.

Exercício 26. Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado. Definindo o subconjunto $-A = \{-a : a \in A\}$, mostre que $sup(A) = -inf(-A)$.

Exercício 27. Seja $A, B \subset \mathbb{R}$ limitados. Mostre que

$$sup(A \cap B) = min\{sup(A), sup(B)\} \text{ e } inf(A \cap B) = max\{inf(A), inf(B)\}.$$

Exercício 28. Determine o conjunto interior, fronteira e exterior dos conjuntos enunciados no exercício 24.

Exercício 29. Seja $A, B \subset \mathbb{R}$. Mostre que

1. $int(A) = ext(A^c)$
2. $fr(A) = fr(A^c)$
3. $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$
4. $ext(A \cup B) = ext(A) \cap ext(B)$
5. $ext(A) \cup ext(B) \subseteq ext(A \cap B)$
6. existem conjuntos A e B tais que $ext(A) \cup ext(B) \neq ext(A \cap B)$.

Exercício 30. Considerando os conjuntos enunciados no exercício 24, determine quais são abertos, fechados e/ou compactos.

Exercício 31. Considere o conjunto complementar dos números inteiros

$$\mathbb{Z}^c = \{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Z}\}.$$

Indique se $\mathbb{Z}^c$ é aberto, fechado e/ou compacto.

Exercício 32. Mostre que se A e B são fechados, então $A \cup B$ e $A \cap B$ são fechados.

3 Sucessões e séries em $\mathbb{R}$

Exercício 33. Indique quais das seguintes sucessões são crescentes, decrescentes, majoradas, minoradas e limitadas.

1. $a_n = n^2 + 4n - 5$
2. $b_n = n^3 + (-1)^n n$
3. $c_n = 2n^5 - 5n^2$
4. $d_n = \dfrac{1}{n^2} + 2 + \dfrac{(-2)^n}{3^n}$
5. $e_n = \dfrac{5^n}{7(n+5)^3}$
6. $f_n = \dfrac{2n^3 + n + 3}{n^2 + 4}$
7. $g_n = \sqrt{n+3} + \sqrt{n^2+5}$
8. $h_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n^2+5}$
9. $i_n = \dfrac{4n+2}{5n^5 + 6n^3 + 4}$
10. $j_n = \dfrac{4n^5 + 2}{5n^5 + 6n^3 + 4}$
11. $l_n = \dfrac{6n^{-2} + 3}{n^{-3} + n^{-2}}$
12. $m_n = \dfrac{2 + (-1)^n}{n^3 + 2}$
13. $o_n = \dfrac{(-5)^n}{2^n}$
14. $p_n = \dfrac{(-2)^n}{5^n}$
15. $q_n = \begin{cases} 3, & n \text{ é par} \\ \dfrac{2 + n + 3n^3}{n + n^2 + n^3}, & n \text{ é impar} \end{cases}$

Exercício 34. Determine as sucessões do exercício 33 são convergentes ou divergentes, e caso seja possível indique o seu limite.

Exercício 35. Considere a sucessão $u_n = \dfrac{n^3+2}{n^2+3} - \dfrac{n^2+2}{n+1}$. Determine se a sucessão é convergente ou divergente. Caso seja convergente, qual é o seu limite?

Exercício 36. Mostre que se u_n é decrescente e minorada, então u_n converge para o ínfimo do conjunto dos termos da sucessão.

Exercício 37. O banco oferece os seguintes dois portfólios de investimento. O portfólio A acumula anualmente 5% do capital investido inicialmente. O produto B acumula anualmente 4% do valor do portfólio no ano precedente. Ambos os portfólios são devolvidos ao cliente após 5 anos. O capital inicial é 1000€.

a) Qual dos portfólios é mais vantajoso para o cliente?

b) Qual é o ano em que o portfólio B passa a acumular uma quantidade maior do que o portfólio A?

Exercício 38. Um cliente pretende pedir um empréstimo ao seu banco. O banco cobra uma taxa de juro anual de 5%. Suponha que o cliente contraiu um empréstimo no valor de 100000€. E pretende pagar anualmente ao banco 7500€.

a) Escreva uma sucessão que descreva o valor anual em dívida.

b) Quantos anos demora o cliente a saldar a sua dívida?

c) Qual o custo total do empréstimo para o cliente?

Exercício 39. Indique quais das seguintes sucessões são progressões geométricas e determine a sua razão.

1. n^3
2. $\frac{n^2+2}{n+1}$
3. $10 * 2^n$
4. $n * 4^n$
5. n^n
6. 5^{2n}
7. $\frac{2^{n+2}}{3}$
8. 2^{n^2}
9. $\frac{3^n}{2^{3n}}$
10. $-\frac{7^2 n}{3^{n+2}}$
11. $\frac{(-4)^{3n}}{3^{n+5}}$
12. $(-2)^{n+1}$

Exercício 40. Determine se as seguintes séries geométricas são convergente e calcule o seu valor, sempre que possível.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{3^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} 3\frac{5^n}{2^n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{6^{n+3}}{7^n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$
5. $\sum_{n=4}^{\infty} 2\frac{2^n}{7^n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+3}}{7^{n+2}}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} -5\frac{(-3)^{2n+1}}{9^n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{5}$
9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{2^{3n}}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{7^2 n}{3^{n+2}}$
11. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-4)^{-2n}}{3^{n+5}}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^{-n+1}$
13. $\sum_{n=3}^{\infty} 3\frac{2^{2n}}{5^{n+2}}$

Exercício 41. Escreva os números racionais dados pelas seguintes expressões decimais na forma $\dfrac{p}{q}$.

1. 0.1111111111....
2. 2.5454545454....
3. 1.02541414141...
4. 0.123123123123...

(Primeiro escreva a expressão decimal como uma série geométrica e depois calcule o valor da série)

Exercício 42. Determine para que valores de x as seguintes séries geométricas são convergentes e indique o valor da série.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{9^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{-n}}{5}$
3. $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{(1+x^2)^n}{2^{3n}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^n}{(2x)^{n+2}}$
5. $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(x+2)^{2n}}{(x^2-4)^{n+5}}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (x^2)^n$

4 Funções reais de variável real

Exercício 43. Calcule o maior domínio onde a função dada pelas seguintes expressões está bem definida e faça um esboço do gráfico da função.

1. $a(x) = -x + 5$
2. $b(x) = x^2 + 5$
3. $c(x) = x^2 + 2x + 4$
4. $d(x) = x^2 + 2x + 2$
5. $e(x) = x^3$
6. $f(x) = -x^3 + x^2$
7. $g(x) = -x^4 + x^2$
8. $h(x) = |2x + 1|$
9. $i(x) = \sqrt{2x+2}$
10. $j(x) = \sqrt[3]{x+2}$
11. $l(x) = \dfrac{|x|}{x} + x$
12. $m(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2}$
13. $n(x) = e^{x^2}$
14. $o(x) = x - e^x$

15. $p(x) = \dfrac{1}{2^x}$

16. $q(x) = \dfrac{3^x}{x}$

Exercício 44. Determine quais das seguintes funções são injetivas.

1. $a(x) = -x + 5$
2. $b(x) = x^2 + 5$
3. $c(x) = x^2 + 2x + 4$
4. $d(x) = x^2 + 2x + 2$
5. $e(x) = x^3$
6. $f(x) = -x^3 + x^2$
7. $g(x) = -x^4 + x^2$
8. $h(x) = |2x + 1|$
9. $i(x) = \sqrt{2x + 2}$
10. $j(x) = \sqrt[3]{x + 2}$
11. $l(x) = \dfrac{|x|}{x} + x$
12. $n(x) = e^{x^2}$
13. $p(x) = \dfrac{1}{2^x}$

Exercício 45. Calcule o maior domínio onde a seguinte função está bem definida

$$f(x) = arccos(1 - x^2).$$

E diga se a função é injetiva no seu domínio.

Exercício 46. Estude as seguintes funções quanto a sua monotonia no seu domínio e um intervalo onde a função é estritamente monótona.

1. $a(x) = -x + 5$
2. $b(x) = x^2 + 5$
3. $c(x) = x^2 + 2x + 4$
4. $d(x) = x^2 + 2x + 2$
5. $e(x) = x^3$
6. $h(x) = |2x + 1|$
7. $i(x) = \sqrt{2x + 2}$
8. $j(x) = \sqrt[3]{x + 2}$
9. $l(x) = \dfrac{|x|}{x} + x$
10. $m(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x - 2}$
11. $n(x) = e^{x^2}$
12. $o(x) = x - e^x$
13. $p(x) = \dfrac{1}{2^x}$
14. $q(x) = \dfrac{3^x}{x}$

Exercício 47. Considere o polinómio $p(x) = x^6 - x^5 - x^4 + x^3$. Indique as raízes do polinómio incluindo as suas multiplicidades. Escreva a fatorização do polinómio em fatores irredutíveis.

Exercício 48. Determine a fatorização dos seguintes polinómios em fatores de grau 1 ou 2 irredutíveis. Para os fatores irredutíveis de grau 2, escreva-os como a soma ou subtração de dois quadrados.

1. $a(x) = -x + 5$
2. $b(x) = x^2 + 5$
3. $c(x) = x^2 + 2x + 4$
4. $d(x) = x^2 + 2x + 2$
5. $e(x) = x^3$
6. $f(x) = -x^3 + x^2$
7. $g(x) = -x^4 + x^2$
8. $h(x) = x^6 - x^5 - x^4 + x^3$

Exercício 49. Calcule o seguintes valores trigonométricos.

1. $cos(0)$
2. $cos(\pi/2)$
3. $cos(-5\pi/2)$
4. $sen(\pi)$
5. $sen(\pi/2)$
6. $sen(-\pi/2)$
7. $tg(0)$
8. $tg(\pi/4)$

Exercício 50. Resolva as seguintes equações trigonométricos.

1. $cos(x) = 0$
2. $cos(x) = 1$
3. $sen(x) = 1/2$
4. $sen(x) = -1$
5. $tg(x) = 1$
6. $tg(x) = 0$

Exercício 51. Mostre as seguintes igualdades trigonométricas:

1. $cos(x) = cos(-x)$
2. $cos(x + \pi) = -cos(x)$
3. $cos(\frac{\pi}{2} - x) = sen(x)$
4. $sen(x) = -sen(-x)$
5. $sen(x + \frac{\pi}{2}) = cos(x)$
6. $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$
7. $tg(x) = -tg(x)$
8. $tg(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{tg(x)}$

Exercício 52. Mostre que as seguintes funções são invertíveis no domínio indicado. Calcule a sua inversa indicando o domínio onde a função inversa está bem definido.

1. $a(x) = -x + 5$ em $\mathbb{R}$
2. $b(x) = x^2 + 5$ em $\mathbb{R}_0^+$
3. $c(x) = x^2 + 2x + 4$ em $[-1, +\infty[$
4. $d(x) = -x^4 + x^2$ em $\mathbb{R}_0^+$
5. $e(x) = |2x + 1|$ em $]-\infty, -1/2[$
6. $f(x) = \sqrt{2x+2}$ em $[-1, +\infty[$
7. $g(x) = \sqrt[3]{x+2}$ em $\mathbb{R}$
8. $h(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$
9. $i(x) = e^{x^2}$ em $\mathbb{R}_0^+$

Exercício 53. Seja $f(x) = \dfrac{9 - x^2}{3 + x^2}$ e $g(x) = \sqrt{3\dfrac{3-x}{1+x}}$. Calcule $f \circ g$ e $g \circ f$. A função f é invertível?

Exercício 54. Compute os seguintes valores:

1. $arccos(-1)$
2. $arccos(\sqrt{2}/2)$
3. $arcos(0)$
4. $arcsen(1)$
5. $arcsen(0)$
6. $arcsen(-1)$
7. $arctan(1)$
8. $arctan(0)$
9. $arctan(-1)$

Exercício 55. Calcule os seguintes limites:

1. $\lim\limits_{x\to 2} -x + 5$
2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$
3. $\lim\limits_{x\to -3} x^2 + 2x + 4$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 + 2x + 2$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^3 + 2}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x^3 + 2x^2}{x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-x^4 + x^2}{x^5 + 4x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} log(x)$
9. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 sen(1/x^2)$
10. $\lim\limits_{x\to 0} x sen(1/x^2)$
11. $\lim\limits_{x\to 1} arcsen(1/x)$

5 Continuidade de funções reais de variável real

Exercício 56. Verifique se as seguintes funções são continuas em $\mathbb{R}$:

1. $a(x) = \begin{cases} -x+6 & ,x \geq 3 \\ x^2-2x & ,x < 3 \end{cases}$

2. $b(x) = \begin{cases} arcsin(x/2) & ,|x| < 2 \\ x^2-4+\pi/2 & ,|x| \geq 2 \end{cases}$

3. $c(x) = \begin{cases} sin(x) & ,x < \pi \\ cos(x)+1 & ,x \geq \pi \end{cases}$

4. $d(x) = \begin{cases} e^{-x} & ,x < -1 \\ 1/(x^2+e) & ,-1 \leq x \leq 1 \\ e^{-x^2} & ,x \geq 1 \end{cases}$

Exercício 57. Determine o/s valore/s dos parâmetros, k, l que tornam as seguintes funções continuas.

1. $a(x) = \begin{cases} x^2+3x & ,x \geq 3 \\ kx-2 & ,x < 3 \end{cases}$

2. $b(x) = \begin{cases} sin(x\pi/2) & ,|x| < 2 \\ x^2-k & ,|x| \geq 2 \end{cases}$

3. $c(x) = \begin{cases} ke^x & ,x < 0 \\ cos(x)+k & ,x \geq 0 \end{cases}$

4. $d(x) = \begin{cases} ln(-x) & ,x < -1 \\ kcos(\pi x) & ,-1 \leq x \leq 1 \\ x^2+l & ,x \geq 1 \end{cases}$

Exercício 58. Determine o maior prolongamento por continuidade das seguintes funções:

1. $a(x) = e^{-1/x^2}$
2. $b(x) = \dfrac{x^3-4x}{x^2+x-6}$
3. $c(x) = (x^2-2x)sin(\dfrac{1}{x-2})$
4. $d(x) = \dfrac{1}{ln(x^2)}$
5. $f(x) = \dfrac{1-cos(2x)}{x-\pi}$

Exercício 59. Usando o Teorema do valor intermédio, mostre que as seguintes equações tem uma solução:

1. $x^5+5x^2 = 3$
2. $2^x = x^2+2x$
3. $sen(x) = e^x$
4. $e^x + ln(x) = 0$

6 Diferenciabiliade de funções reais de variável real

Exercício 60. Considere as funções dadas pelas seguintes expressões. Determine os pontos onde as funções são diferenciáveis e indique a sua derivada.

1. $-x+5$
2. x^2+5
3. x^2+2x+4
4. $-x^4+x^2+cos(x)$
5. $|2x+1|$
6. $\sqrt{2x+2}$
7. $\sqrt[3]{x^3+2}$
8. $\dfrac{x+2}{x-2}$
9. e^{x^2}
10. 2^x
11. $ln(x^2+2)$
12. $cos(x^2+x)+sen(x)$

Exercício 61. Indique o conjunto de pontos onde a seguinte função é diferenciável e calcule a sua função derivada:

$$g(x)=\begin{cases} e^{sen(x)}, & x\geq 0\\ x+2, & x<0\end{cases}$$

Exercício 62. Escreva a expressão da reta tangente ao gráfico das funções seguintes nos pontos indicados:

1. x^2+x em $(1,2)$
2. $cos(x)$ em $(\pi/4,\sqrt{2}/2)$
3. $ln(x^2-3)$ em $(2,1)$
4. $e^{x+2}+x^2$ em $(-2,4)$
5. $tan(x\pi)+e^{x-1}$ em $(1,1)$
6. $\dfrac{x^3+3}{e^x}$ em $(0,3)$

Utilize uma ferramenta gráfica para visualizar o gráfico das funções e a respetiva reta tangente.

Exercício 63. Seja $f(x)$ a função definida por $f(x)=x^2-2$ se $x\leq 2$, $f(x)=x$ se $2<x\leq 4$ e $f(x)=4-cos(x-4)$, se $x>4$.

a) Determine os pontos onde a função é continua.

b) Determine os pontos onde a função é diferenciável.

Exercício 64. Verifique se as seguintes funções são diferenciáveis em $\mathbb{R}$:

1. $a(x)=\begin{cases} -x+6 & ,x\geq 3\\ x^2-2x & ,x<3\end{cases}$
2. $b(x)=\begin{cases} arcsin(x/2) & ,|x|<2\\ x^2-4+\pi/2 & ,|x|\geq 2\end{cases}$

3. $c(x) = \begin{cases} sin(x) & ,x < \pi \\ cos(x) + 1 & ,x \geq \pi \end{cases}$

4. $d(x) = \begin{cases} e^{-x} & ,x < -1 \\ 1/(x^2 + e) & ,-1 \leq x \leq 1 \\ e^{-x^2} & ,x \geq 1 \end{cases}$

Exercício 65. Seja $f(x)$ a função definida por $f(x) = a\cos(x\pi)$ se $x \leq 2$ e $f(x) = bx$ se $x > 2$ onde a e b são parâmetros reais.

a) Determine os valores dos parâmetros a e b tais que a função f é continua em todo o seu domínio.

b) Determine os valores dos parâmetros a e b tais que a função f é diferenciável em todo o seu domínio, caso seja possível.

Exercício 66. Determine, caso seja possível, o/s valore/s dos parâmetros, k, l que tornam as seguintes funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$.

1. $a(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & ,x \geq 3 \\ kx - 2 & ,x < 3 \end{cases}$

2. $b(x) = \begin{cases} sin(x\pi/2) & ,|x| < 2 \\ x^2 - k & ,|x| \geq 2 \end{cases}$

3. $c(x) = \begin{cases} ke^x & ,x < 0 \\ cos(x) + k & ,x \geq 0 \end{cases}$

4. $d(x) = \begin{cases} ln(-x) & ,x < -1 \\ kcos(\pi x) & ,-1 \leq x \leq 1 \\ x^2 + l & ,x \geq 1 \end{cases}$

Exercício 67. Determine em que pontos as seguintes funções são diferenciáveis e calcule as suas derivadas:

1. $a(x) = arccos(x)$
2. $b(x) = arccos(1 - x^2)$
3. $c(x) = arctan(x^3 + x)$
4. $d(x) = \sqrt[5]{x^2 + 2x}$
5. $e(x) = x|x|$

Indique a reta tangente ao gráfico das funções anteriores no ponto onde $x = 0$.

Exercício 68. Calcule os seguintes limites:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{e^x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(x)}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{sen(x\pi)}{x - 2}$
4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{ln(x)}{x - 1}$

5. $\lim_{x\to 2\pi} \dfrac{1-cos(x)}{sen(x)}$

6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{sin(2x)}{1-cos(3x)}$

7. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2+2x}{3x^2+2}$

8. $\lim_{x\to \infty} (x^2+2x)e^{-x}$

9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{arctan(x)}{x^3}$

10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{2x} - \dfrac{2-x^3}{x^2}$

11. $\lim_{x\to} \dfrac{ln(x)}{tan(x)}$

12. $\lim_{x\to 1}(x^2+3x-4)ln(x-1)$

13. $\lim_{x\to 0}(tan(x))^x$

14. $\lim_{x\to 0} x^{(x^2)}$

15. $\lim_{x\to 0} x^{sen(x)}$

16. $\lim_{x\to \infty} (x^2+x) - ln(x)$

17. $\lim_{x\to \infty} e^x - ln(x)$

18. $\lim_{x\to \infty} e^x - 2^x$

Exercício 69. Calcule as segundas derivadas das funções definidas por as seguintes expressões:

1. $-x+5$
2. x^2+5
3. x^2+2x+4
4. $-x^4+x^2+cos(x)$
5. e^{2x+1}
6. $\sqrt{2x+2}$
7. $\sqrt[3]{x^3+2}$
8. $\dfrac{x+2}{x-2}$
9. e^{x^2}
10. 2^x
11. $ln(x^2+2)$
12. $cos(x^2+x)+sen(x)$
13. $arctan(x^2+x)$
14. $xln(x)$

Exercício 70. Seja $h(x) = xe^x$. Determine uma formula para a enésima derivada da função h, $h^{(n)}(x)$.

Exercício 71. Seja $f(x) = sen(x)$.

1) Calcule a reta tangente ao gráfico da função no ponto $x = \pi$.

2) Calcule o polinómio de Taylor de segundo grau centrado em $x = \pi$.

3) Calcule o polinómio de Taylor de terceiro grau centrado em $x = \pi$ e o respetivo resto de Langrage.

4) Calcule resto de Lagrange do polinómio de Taylor de grau 1 centrado em $x = \pi$ e obtenha uma aproximação para $sen(3)$.

Utilize uma ferramenta gráfica para visualizar o gráfico da função, a reta tangente e os polinómios de Taylor que calculou.

Exercício 72. Seja $f(x) = ln(x+1)$, $g(x) = e^x$, $h(x) = cos(x)$, $i(x) = x$ e $j(x) = \frac{x^3+x+2}{x+1}$. Para cada uma das funções anteriores:

1) Calcule o polinómio de Taylor de segundo grau centrado em $x = 0$.

2) Calcule o polinómio de Taylor de terceiro grau centrado em $x = 0$.

3) Indique a formula do polinómio de Taylor de grau n centrado em $x = 0$.

Utilize uma ferramenta gráfica para visualizar o gráfico da função e dos polinómios de Taylor que calculou.

Exercício 73. Determine e classifique os pontos críticos das seguintes funções.

1. $x^2 + 3x + 2$
2. $e^x - x$
3. e^{x^2+2}
4. $cos(x) + x$
5. $\sqrt{x^2 + x + 3}$
6. $\dfrac{x^2 + 1}{x + 2}$
7. $\sqrt[3]{x^3 + 2}$
8. $\dfrac{x + 2}{x - 2}$
9. e^{x^2}
10. 2^x
11. $ln(x^2 + 2)$
12. $cos(x^2 + x) + sen(x)$

7 Primitivas

Exercício 74. Calcule as primitivas das seguintes funções:

1. $x^2 + x$
2. $cos(x) + \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[5]{x + 2}}$
3. $e^{3x} + sen(2x) - \sqrt[4]{2x + 1}$
4. $e^{x+2} + x^2$
5. $tan(x\pi) + e^{x-1}$
6. $\dfrac{cos(x)}{1 + (sen(x))^2}$
7. $\dfrac{cos(x)sen(x)}{1 + (sen(x))^2}$
8. $x^2 e^{x^3}$
9. $\dfrac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x + 3}$

10. $\dfrac{1}{(2x+3)^2}$

11. $\dfrac{1}{x^3\sqrt{x}}$

12. $x^4 cos(x^5)$

13. 3^x

14. $sen(x)cos(x)$

15. $\dfrac{x}{(x+1)^2}$

Exercício 75. Utilizando a primitivação por partes, calcule as primitivas das seguintes funções:

1. $(x^2+x)e^{2x}$
2. $xcos(x)$
3. $sin(3x)e^x$
4. $ln(3x)$
5. $(x^2+2)ln(x)$
6. $arcsin(2x)$
7. $cos^2(2x)$
8. $sen^3(x)$
9. $sen^3(x)cos^2(x)$
10. $(x^3+2)3^x$
11. $Parctan(x)$

Exercício 76. Calcule a primitivas das seguintes funções racionais.

1. $\dfrac{x^2+2x}{x-1}$
2. $\dfrac{x^3+x+2}{x^2-3x+2}$,
3. $\dfrac{x+2}{x^2-2x+1}$
4. $\dfrac{x^3}{x^3-2x^2+x}$,
5. $\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$,
6. $\dfrac{2x+1}{x^3-1}$,
7. $\dfrac{x}{x^2+1}$,
8. $\dfrac{x^2+2}{(x^2+1)^2(x-2)}$,

Exercício 77. Calcule as seguintes primitivas usando a mudança de variável sugerida.

1. $\int \dfrac{1}{4+x^2}dx$, $x = 2tan(t)$
2. $\int \sqrt{9-x^2}dx$, $x = 3cos(t)$
3. $\int \dfrac{2}{(2+sin(x))tan(x)}dx$, $t = sen(x)$
4. $\int ln(1+e^x)e^x dx$, $t = e^x$
5. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $x = sen(t)$
6. $\int \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}dx$, $t = e^x$
7. $\int \dfrac{1}{1+e^x}dx$, $t = e^x$

8 Integrais

Exercício 78. Calcule geometricamente os seguintes integrais:

1. $\int_0^3 2x + 1dx$
2. $\int_1^4 2x - 1dx$
3. $\int_{-2}^1 |x|dx$
4. $\int_0^{2\pi} sin(x)dx$
5. $\int_2^4 f(x)dx$, onde
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 5/2 \\ 3, & 5/2 < x < 3 \\ -2, & x \geq 3 \end{cases}$$
6. $\int_{-4}^4 \sqrt{4 - x^2}dx$

Exercício 79. Calcule os seguintes integrais usando a formula de Barrow:

1. $\int_0^3 x^2 - 2x + 3dx$
2. $\int_0^2 xcos(x\pi)dx$
3. $\int_1^4 \frac{x}{x^2 + 2}dx$
4. $\int_{-1}^3 xe^{x^2}dx$
5. $\int_2^3 \frac{x^3 + x}{x - 1}dx$
6. $\int_0^3 2xarctan(x)dx$

Exercício 80. Represente graficamente os conjuntos limitados pelas seguintes curvas e calcule as suas áreas:

1. $y = x$ e $y = x^2$
2. $y = 2x^2$ e $y = x + 1$
3. $x = 1$, $y = e^x$ e $y = 1 - x$
4. $y = \frac{1}{x}$ e $y = -5x + 6$

Exercício 81. Estude a convergência dos seguintes integrais

1. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$
2. $\int_0^\infty arctan(x)dx$
3. $\int_{-\infty}^2 e^x dx$
4. $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$
5. $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$
6. $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$

7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} tan(x)dx$

8. $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}dx$

9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

10. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$

11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx$

Exercício 82. Estude a convergência dos seguintes limites e calcule o seu valor, caso exista.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x cos(y^2)dy}{x}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e(y^2)dy}{x^2}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \frac{e^y}{1+y^2}dy}{x}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 2\pi} \frac{\int_0^x sen(y)dy}{x-2\pi}$

Exercício 83. Seja $F(x) = \displaystyle\int_0^x cos(y^2)dy.$

a) Mostre que a função F é ímpar.

b) Determine e classifique os pontos críticos desta função.

c) Calcule o polinómio de Taylor da função F de ordem 2 centrado em $x = 0$.

Exercício 84. Seja $G(x) = \displaystyle\int_0^x (t-5)e^{-t^2}\,dt.$

a) Determine e classifique os pontos críticos desta função.

b) Calcule o polinómio de Taylor da função F de ordem 2 centrado em $x = 0$.