Lista de Exercícios

Questões difíceis encontram-se marcadas com *.

Integral de Riemann

1. Seja A um intervalo de $\mathbb{R}^n$ e $f, g \in \mathscr{R}(A)$. Prove que:
   (a) $\alpha f + \beta g \in \mathscr{R}(A)$ e $\int_A (\alpha f + \beta g) = \int_A f + \int_A g, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   (b) se $f \leq g$, então $\int_A f \leq \int_A g$.

2. Mostre que $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ é integrável à Riemann e calcule o seu integral:
   (a) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & y \geq 1/3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
   (b) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
   (c) $f(x,y) = xy$

3. Encontre um exemplo de uma função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $|f|$ seja integrável à Riemann e f não o seja.

4. (*) Mostre que $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/q$ quando x é racional e $x = p/q$ na forma irredutível, e $f(x) = 0$ caso contrário é integrável à Riemann. Calcule $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5. Seja $f \in \mathscr{R}(A)$. Mostre que $|f| \in \mathscr{R}(A)$ e $\int_A f \leq \int_A |f|$.

6. Calcule:
   (a) $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{y} + x - 3xy^2\,dx\,dy$
   (b) $\int_0^\pi \int_0^\pi \sin^2(x)\sin^2(y)\,dx\,dy$
   (c) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin(x+y)\,dx\,dy$
   (d) $\int_0^\pi \int_0^\pi |\cos(x+y)|\,dx\,dy$
   (e) $\int_1^2 \int_1^2 y^{-3} e^{2x/y}\,dx\,dy$
   (f) $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 xy^2 z^3\,dx\,dy\,dz$

7. Calcule o volume da região por baixo do gráfico da função $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1-x-y, & x+y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

8. Esboce S e calcule $\int_S f$ onde

   (a) $f(x,y) = x\cos(x+y)$ e S é o triângulo formado pelos vértices $(0,0)$, $(0,\pi)$ e (π,π).

   (b) $f(x,y) = e^{x+y}$ e $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| + |y| \leq 1\}$.

   (c) $f(x,y,z) = xy^2z^3$ e S é o sólido limitado pelos três planos coordenados, pela superfície $z = xy$ e pelo plano $x+y=1$.

   (d) $f(x,y,z) = (1+x+y+z)^{-3}$ e S é o sólido limitado pelos três planos coordenados e pelo plano $x+y+z=1$.

   (e) $f(x,y,z) = \sqrt{1+y}$ e $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2-1 \leq y \leq 1,\, x \geq 0,\, 0 \leq z \leq y\}$.

9. Calcule a área e o centroide de

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leq 1,\, x+y \leq 1,\, y \leq x\}.$$

10. Sabendo que a densidade de massa do objecto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y \leq 2x - x^2\}$$

é $\rho(x,y) = (1-y)/(1+x)$, determine a sua massa e o seu centro de massa.

11. (*) Calcule a distância média entre um canto de um quadrado e os pontos do seu interior.

12. Considere o conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leq 1,\, |x| \leq y\}.$$

   (a) Calcule $\int_S \cos(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

   (b) Determine o centroide de S.

13. Use uma mudança linear de coordenadas para calcular

$$\int_S (x-y)^2 \sin^2(x+y)\, dx\, dy$$

onde S é o paralelogramo com vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ e $(0, \pi)$.

14. Seja f uma função de variável real integrável à Riemann. Mostre que:

(a)
$$\int_S f(x+y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} f(u)\, du$$
onde $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| + |y| \leq 1\}$.

(b)
$$\int_S f(xy)\, dx\, dy = \log(2) \int_1^2 f(u)\, du$$
onde S é a região no primeiro quadrante de $\mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$ e $y = 4x$.

15. Considere o conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 < x < 2,\, x^2 < y < x^2 + 1\}$$

e a função $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x,y) = (x, y - x^2)$.

(a) Mostre que g é uma mudança de coordenadas.

(b) Use g para calcular $\int_S x^2\, dx\, dy$.

16. Considere o conjunto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < x < 1,\, x^2 - 1 < y < x^2,\, x^3 < z < x^3 + 2\}$$

e a função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $g(x,y,z) = (x, y - x^2, z - x^3)$.

(a) Mostre que g é uma mudança de coordenadas.

(b) Use g para calcular
$$\int_S \frac{z - x^3}{1 + x^2}\, dx\, dy\, dz.$$

17. Calcule o volume tri-dimensional dos seguintes conjuntos:

(a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 0,\, y > 0,\, x^2 + y^2 < z < \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

(b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0,\, y^2 + z^2 \leq x + 1/2,\, x \leq 3/2 - \sqrt{y^2 + z^2}\}$.

(c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 0,\, y > 0,\, 0 < z < \sqrt{x^2 + y^2},\, x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

18. (*) Para cada $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto

$$B_n(a) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le a \right\}.$$

Prove que o volume n-dimensional de $B_n(a)$ é dado por

$$\mathrm{vol}_n(B_n(a)) = \frac{(2a)^n}{n!}.$$

(Sugestão: Mostre que $\mathrm{vol}_n(B_n(a)) = a^n \,\mathrm{vol}_n(B_n(1))$ e que $\mathrm{vol}_{n+1}(B_{n+1}(1)) = 2/(n + 1)\,\mathrm{vol}_n(B_n(1))$ para todo $n \in \mathbb{N}$)

Integral de Lebesgue

19. Sejam A e B conjuntos mensuráveis à Jordan. Mostre que,

    (a) $\emptyset$, $A \cap B$, $A \cup B$ e $A \setminus B$ são mensuráveis à Jordan,

    (b) $\operatorname{vol}(A) \geq 0$,

    (c) $\operatorname{vol}(A \cup B) \leq \operatorname{vol}(A) + \operatorname{vol}(B)$,

    (d) se $A \cap B = \emptyset$, então $\operatorname{vol}(A \cup B) = \operatorname{vol}(A) + \operatorname{vol}(B)$,

    (e) se $A \subset B$, então $\operatorname{vol}(A) \leq \operatorname{vol}(B)$,

    (f) $A + x = \{a + x \colon a \in A\}$ é mensurável à Jordan e $\operatorname{vol}(A + x) = \operatorname{vol}(A)$.

20. Mostre que $m^*(A) \leq \overline{\int}_A 1$ para qualquer conjunto limitado A. Dê um exemplo de um conjunto limitado A onde a desigualdade é estrita.

21. Considere o intervalo $A_0 = [0, 1]$. Divida-o em três partes iguais e retire o intervalo aberto do meio $I_1 =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Obtém-se assim $A_1 = I_0 \cup I_2$ onde $I_0 = [0, \frac{1}{3}]$ e $I_2 = [\frac{2}{3}, 1]$. Repita-se o processo para I_0 e I_2, obtendo $A_2 = I_{00} \cup I_{0,2} \cup I_{20} \cup I_{22}$ onde $I_{00} = [0, \frac{1}{9}]$, etc. Desta forma, tem-se uma sucessão de conjuntos $(A_n)_{n \geq 0}$.

    (a) Prove que o conjunto[1] $A = \bigcap_{n \geq 0} A_n$ é não vazio.

    (b) Mostre que A é mensurável à Lebesgue.

    (c) Mostre que A é mensurável à Jordan.

    (d) Calcule $m(A)$.

    (e) (*) Prove que A não é numerável.
    Sugestão: Escreva $x \in [0, 1]$ na base 3 na forma $x = (0.a_1 a_2 a_3 \cdots)_3$ onde

    $$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

    e $a_n \in \{0, 1, 2\}$. Note que $x \in A$ sse $a_n = 0, 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

22. (*) Seja $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ um intervalo e $f \colon A \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então o seu gráfico

    $$G(f) = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) \in A \times \mathbb{R} \colon y = f(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$

    é mensurável à Jordan e $\operatorname{vol}(G(f)) = 0$.
    Sugestão: Use o facto de f ser uniformemente contínua em A, i.e., dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe uma partição finita de A tal que a oscilação de f em cada subintervalo gerado pela partição é menor que ε.

23. Sejam A e B dois conjuntos mensuráveis à Lebesgue tais que $A \subset B$ e $m(A) < \infty$. Mostre que $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$.

---
[1] Conhecido por conjunto de Cantor

24. Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ mensuráveis à Lebesgue. Mostre que

    (a) Se $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, então
    $$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} m(A_n).$$

    (b) Se $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ e $m(A_1) < \infty$, então
    $$m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} m(A_n).$$

25. (Lema de Borel-Cantelli) Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ mensuráveis à Lebesgue. Mostre que

    (a) $\{x \in \mathbb{R}^n \colon x \in A_n \text{ para uma infinidade de } n\text{'s}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k$.

    (b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$, então
    $$m(\{x \in \mathbb{R}^n \colon x \in A_n \text{ para uma infinidade de } n\text{'s}\}) = 0.$$

26. (*) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ mensurável à Lebesgue. Mostre que
    $$m(A) = \inf\{m(U) \colon U \text{ é aberto de } \mathbb{R}^n \text{ e } A \subset U\}.$$

27. (*) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere o conjunto $A_\alpha = \alpha + \mathbb{Q}$.

    (a) Determine $\cup_{\alpha\in\mathbb{R}} A_\alpha$ e $m^*(A_\alpha)$.

    (b) Mostre que $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ sse $A_\alpha \neq A_\beta$ sse $\alpha - \beta \notin \mathbb{Q}$.

    (c) Considere o conjunto E constituído por um único elemento a_α de cada A_α distinto[2]. Seja então $E_n = q_n + E$, $n \in \mathbb{N}$, onde q_n representa uma sucessão que ordena os racionais.

       i. Determine $\cup_n E_n$, $m^*((\cup_n E_n) \cap [0,1])$ e $m^*(E_n \cap [0,1]) - m^*(E \cap [0,1])$.

       ii. Mostre que $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$.
       Sugestão: Suponha que existe $x \in E_i \cap E_j$.

       iii. Calcule $\sum_n m^*(E_n \cap [0,1])$ e compare com $m^*((\cup_n E_n) \cap [0,1])$. Conclua que $E \cap [0,1]$ não é mensurável à Lebesgue, i.e. $E \cap [0,1] \notin \mathcal{M}$.

28. Indique quais das seguintes proposições são válidas m-q.t.p:

    (a) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ está numa recta de declive irracional que passa na origem.

    (b) $x \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} n \sin(x/n) \in \mathbb{Q}$.

    (c) A função $f(x, y, z) = \lim_{n\to+\infty}[1 + \|(x, y, z)\|^n]^{-1}$ é contínua em $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

[2] Este conjunto existe pela aplicação do axioma da escolha.

29. Dê um exemplo de um conjunto limitado em $\mathbb{R}^2$ com medida nula cuja fronteira não tenha medida nula.

30. Indique quais dos seguintes conjuntos têm medida de Lebesgue nula:

    (a) $\{\log(|q|+1) \colon q \in \mathbb{Q}\}$.

    (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = \sin x\}$.

    (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \lim_{n\to+\infty}(\sin(xy))^n = 1\}$.

    (d) $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e não-vazio.

    (e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

    (f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x+y+z=0,\ x-y+z=1\}$.

    (g) $\{x \in \mathbb{R}^4 \colon x_4 = e^{x_1 - x_2 \sin x_3}\}$.

31. Indique se, para uma função mensurável f, o conjunto de nível $f^{-1}(a)$ é mensurável para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

32. Mostre que qualquer função monótona $f \colon A \to \mathbb{R}$ com $A \in \mathcal{M}$, é mensurável.

33. Verifique as seguintes proposições para uma sucessão de funções $f_k \colon A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}^n$:

    (a) Se $g = \sup_{k\geq 1} f_k$, temos que
    $$g^{-1}(]a,+\infty[) = \bigcup_{k\geq 1} f_k^{-1}(]a,+\infty[)$$
    para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

    (b) Se $g = \inf_{k\geq 1} f_k$, temos que
    $$g^{-1}([a,+\infty[) = \bigcap_{k\geq 1} f_k^{-1}([a,+\infty[)$$
    para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

34. Seja $f \colon E \to \mathbb{R}$ limitada e mensurável à Lebesgue com $E \in \mathcal{M}$ tal que $m(E) < +\infty$. Considerando a função $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
    $$F(x) = m\left(\{y \in E \colon f(y) \leq x\}\right),$$
    determine:

    (a) $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

    (b) $\lim_{x\to-\infty} F(x)$

    (c) a monotonia de F

    (d) $\lim_{x\to a^+} F(x)$

(e) $\lim_{x\to a^-} F(x)$

(f) se $m(f^{-1}(\{a\})) = 0$ implica que F é contínua em a.

35. Indique quais as funções simples e para essas calcule os integrais relativamente à medida de Lebesgue:

(a) $f = \chi_{[1,+\infty[} + \chi_{]-\infty,-1[}$

(b) $f = 2\chi_{[0,+\infty[} - 3\chi_{]1,+\infty[}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^{-1}, & x \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x, & x^{-1} \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/2,\ 0 \leq y \leq 1 \\ -3, & 1/2 < x < 1,\ 0 \leq y \leq 1/2 \\ 2, & 1/2 < x < 1,\ 1/2 < y < 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

(f) $f = \sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k k^{-1} \chi_{]0,1/k[}$

(g) $f(x) = [x]\chi_{[-100,100]}$

(h) $f(x,y) = ([x] + [y])\chi_{[0,2]\times[0,2]}(x,y)$

(i) $f(x,y) = \left(\left[\frac{3}{1+x}\right] \chi_{]0,2[}(y) - \left[\frac{2}{1+y}\right] \chi_{]0,3[}(x) \right) \chi_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[}(x,y)$

36. Mostre que se $f \leq g$, então $f^+ \leq g^+$ e $f^- \geq g^-$.

37. (Desigualdade de Markov) Seja $X \in \mathcal{M}$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável não-negativa, i.e., $f \geq 0$. Dado $\varepsilon > 0$, mostre que

$$m(\{x \in X\colon f(x) \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X f\, dm.$$

38. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim \int_0^{+\infty} \frac{r^n}{1+r^{n+2}} dr$

(b) $\lim \int_0^{\pi} \frac{\sqrt[n]{x}}{1+x^2}\, dx$

(c) $\lim \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \cos^n(x)\, dx$

(d) $\lim \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)^n} dx\, dy$

(e) $\lim \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1+\cos^n(x-y)}{(x^2+y^2+1)^2}\, dx\, dy$

39. Mostre que para $x \geq 1$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\, dt = \log x.$$

40. Calcule
$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \chi_{[0,n]}\, dm$$

41. (*) Podemos escrever um número $x \in [0,1]$ em base 3 com
$$x = (0.a_1a_2a_3\cdots)_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$
onde $a_n \in \{0,1,2\}$. Considere a função de Cantor $f\colon [0,1] \to [0,1]$ dada por
$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{2^n}$$
onde $N = \inf\{k\colon a_k = 1\}$ e $b_k = a_k/2$ se $k < N$ e $b_k = a_N = 1$, com $x = (0.a_1a_2a_3\cdots)_3$ (note que podemos ter $N = +\infty$). Ou seja, consideramos os algarismos da representação em base 3 de x até aparecer um 1. Por exemplo, se $x = (0.02002212001)_3$, então $N = 7$ e temos os algarismos 020022. Dividimos por 2 cada um de forma a obter os b_k's 010011 e definimos $b_7 = 1$. Finalmente, $f(x)$ é o número cuja representação em base 2 é $(0.0100111)_2$.

(a) Mostre que:

i. $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$.

ii. f é crescente e constante em cada subintervalo de $[0,1] \setminus A$, onde
$$A = \{x = (0.a_1a_2\cdots)_3 \in [0,1]\colon a_n \in \{0,2\}\, \forall\, n \in \mathbb{N}\}.$$

iii. f é contínua. *Sugestão*: Mostre que sendo monótona e sobrejectiva, então tem de ser contínua.

iv. $f' = 0$ m-q.t.p. Sugestão: Calcule a medida de A.

v. $f(1-x) = 1 - f(x)$ e $2f(x/3) = f(x)$.

(b) Uma função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ é absolutamente contínua sse g' existe q.t.p. e é integrável à Legesgue satisfazendo
$$g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t)\, dm(t)$$
para qualquer $x \in [a,b]$. Determine se a função de Cantor é absolutamente contínua.

Integral de linha

42. Calcule o comprimento dos caminhos:

    (a) $r(t) = (r\cos t, r\sin t)$ com $t \in [0, 2\pi]$.

    (b) $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$ com $t \in [0, 2\pi]$.

    (c) $r(t) = (t, \log(\cos t), 2)$ com $t \in [\pi/6, \pi/4]$.

43. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente C^1 (diferenciável com derivada contínua).

    (a) Mostre que o comprimento do gráfico de f é dado por

    $$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

    (b) Calcule o comprimento do gráfico de $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ onde:

    i. $f(x) = \log x$

    ii. $f(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$

44. Considere a curva em $\mathbb{R}^2$ dada por

    $$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 9x^2 + 4y^2 = 36\}.$$

    Calcule o integral em Γ da função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \sqrt{81x^2 + 16y^2}$.

45. Esboce o caminho $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ com $t \in [0, 4\pi]$ e calcule a sua massa assumindo que a densidade ao longo da curva é $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

46. (*) Considere o caminho $r\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dado por

    $$r(t) = \begin{cases} (0,0), & t = 0 \\ (t, t^{3/2}\cos(\pi/t^2)), & 0 < t \leq 1 \end{cases}.$$

    (a) Esboce o caminho r.

    (b) Mostre que r é um caminho contínuo e a restrição de r a $]0,1]$ é de classe C^1.

    (c) Mostre que r não é rectificável.

47. Considere o caminho $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dado por

    $$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$

    Calcule

    (a) o comprimento da curva $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$.

    (b) o integral de linha $\int_\Gamma X \cdot d\gamma$ onde

    $$X(x,y,z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, 1).$$

48. Calcule o integral do campo vectorial X ao longo do caminho indicado:
    (a) $X(x,y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ na curva $y = x^2$ entre $(-1,1)$ e $(1,1)$.
    (b) $X(x,y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ na curva $y = 1 - |1-x|$ entre $(0,0)$ e $(2,0)$.
    (c) $X(x,y) = (2a - y, x)$ no caminho $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ com $t \in [0, 2\pi]$.
    (d) $X(x,y) = (x+y, x-y)$ na elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ numa volta no sentido anti-horário.
    (e) $X(x,y,z) = (2xy, x^2 + z^2, y)$ no segmento de recta que une $(1,0,2)$ e $(3,4,1)$.
    (f) $X(x,y,z) = (x, y, xz - y)$ no caminho $\gamma(t) = (t^2, 2t, 4t^3)$ com $t \in [0,1]$.

49. Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $F(x,y,z) = (y^2, 2xy + z, y + 5)$.
    (a) Determine se F é o gradiente de uma função escalar.
    (b) Calcule $\int_\Gamma F \cdot d\gamma$ para o caminho $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$ e a curva $\Gamma = \gamma([0,\pi])$.

50. Considere o caminho $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\gamma(t) = (e^t, \sin t, t)$$

e o campo vectorial

$$X(x,y,z) = \left(-\frac{2x}{(x^2-y^2)^2}, \frac{2y}{(x^2-y^2)^2}, z^2\right).$$

    (a) Mostre que X é o gradiente de uma função escalar.
    (b) Calcule o integral do campo X ao longo de $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$.

51. Seja D o disco de raio $R > 0$ com centro $(0,0)$. Verifique o teorema de Green quando:
    (a) $P(x,y) = xy^2$ e $Q(x,y) = -yx^2$.
    (b) $P(x,y) = x + y$ e $Q(x,y) = y$.

52. Seja C a fronteira do quadrado $[-1,1]^2$ com a orientação anti-horária. Use o teorema de Green para calcular

$$\int_C y\,dx - x\,dy.$$

53. Seja $r(t) = (x(t), y(t)$ com $t \in [a,b]$ uma caminho de classe C^1 fechado e simples. Considere a região A delimitada pelo caminho r. Mostre que

$$\text{Area}(A) = \frac{1}{2}\int_a^b y'(t)x(t) - y(t)x'(t)\,dt.$$

54. (*) Um aro circular de raio 1 rola sem deslizar ao longo de uma linha recta.
    (a) Calcule o comprimento da trajetória descrita por um ponto do aro entre dois contactos consecutivos com o solo.
    (b) Seja B a curva descrita no ponto anterior. Calcule a área da região delimitada entre a curva B e o eixo das abcissas.

Variedades

55. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função $f(x,y) = x^3 - 3x - y^2$. Determine os valores regulares de f. Esboce o conjunto de nível $f^{-1}(\{-2\})$.

56. Mostre que o conjunto de solução do sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 + w^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 4 \end{cases}$$

é uma variedade e determine a sua dimensão. Calcule o espaço tangente no ponto $(x,y,z,w) = (1,1,-1,-1)$.

57. Descreva parametricamente cada uma das seguintes curvas:

    (a) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2/4 = 1\}$.

    (b) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1,\ z = 3\}$.

    (c) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = 1/2\}$.

58. Dados $a, b > 0$, seja $\phi_{a,b}\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ a função dada por

$$\phi_{a,b}(t) = (\sin(at), \sin(bt)).$$

    (a) Esboce o conjunto $\phi_{1,2}([0,2\pi])$ e indique se é uma variedade.

    (b) (*) Esboce os conjuntos $\phi_{1,3}([0,2\pi])$ e $\phi_{2,3}([0,2\pi])$.

    (c) Determine os valores de a e b tal que $\phi_{a,b}(0) = \phi_{a,b}(2\pi)$.

59. Descreva parametricamente e determine a dimensão de cada uma das seguintes variedades. Calcule o espaço tangente e o espaço normal no ponto p.

    (a) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1,\ y > |x|,\ |z| < 2\}$, $p = (0,1,0)$.

    (b) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (\sqrt{x^2+y^2} - 4)^2 + z^2 = 1\}$, $p = (4,0,1)$.

    (c) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2/4 + z^2/9 = 3\}$, $p = (1,2,3)$.

60. Seja $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y^2 = r^2\}$ onde $r \neq 0$. Mostre que $x = \pm r\cosh t$ e $y = r\sinh t$ define uma parametrização de M em torno de cada $(x,y) \in M$ onde

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Conclua que M é uma 1-variedade e determine o seu espaço tangente no ponto $(x,y) = (r,0)$.

61. Considere uma escada encostada a uma parede na vertical. Marque um ponto p na escada localizado a $2/3$ do seu comprimento. Quando a escada escorrega no seu ponto de apoio, qual a curva descrita pelo ponto p?

62. Determine a dimensão, o espaços tangente e normal no ponto p de cada uma das variedades M:

    (a) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1,\, z = x^2 - y^2\}$, $p = (1, 0, 1)$.

    (b) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z^2 + 1,\, 0 < z < 2\}$, $p = (0, \sqrt{2}, 1)$.

63. (*) Calcule o espaço tangente e o espaço normal num ponto do gráfico de uma função $f \colon W \to \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^1 onde W é um aberto de $\mathbb{R}^m$.

64. (*) Seja $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ o conjunto das matrizes quadradas $n \times n$ com entradas reais. Mostre que o conjunto

$$O(n) = \{X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \colon X^\top X = \mathrm{id}\}$$

é uma variedade de dimensão $\frac{1}{2}n(n-1)$. (*Sugestão*: Mostre que id é um valor regular da função $f(X) = X^\top X$)

Integral em variedades

65. Calcule a área das seguintes superfícies:

    (a) Paraboloide,
    $$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x^2 + y^2,\, z \leq 1\}.$$

    (b) Cone circular
    $$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = \frac{R^2}{h^2}(z - h)^2,\, 0 < z < h\right\}$$
    onde $h > 0$ é a altura do cone e $R > 0$ o raio da base.

    (c) Toro
    $$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2\right\}$$
    com $0 < r < R$.

66. Calcule o centróide de
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0\}, \quad r > 0.$$

67. Considere a superfície
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 2x,\, x^2 + y^2 = z^2\}.$$
Calcule $\iint_S f\, dS$ onde
$$f(x, y, z) = x^4 - y^4 + y^2 z^2 - x^2 z^2 + 1.$$

68. Seja $f \colon V \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 definida num conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^2$ e
$$M = \{(x, y, z) \in V \times \mathbb{R} \colon z = f(x, y)\}.$$
Mostre que
$$\operatorname{vol}_2(M) = \int_V \sqrt{1 + \|\nabla f(x, y)\|^2}\, dx\, dy.$$

69. (*) É possível uma superfície ter área finita, mas o volume do sólido que delimita ser infinito? Construa um exemplo.

70. Calcule o fluxo de X através de M segundo a normal exterior ν onde:

    (a) $X(x, y, z) = (x, y, z)$ e $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

    (b) $X(x, y, z) = (-y, x, 0)$ e $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z^2,\, 0 < z < 1\}$.

71. Considere a superfície
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2,\, z > 0\}, \quad 0 < r < R.$$

(a) Determine a normal unitária ν com terceira componente positiva em cada ponto de M.

(b) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de X através de M segundo a normal ν onde

i. $X(x,y,z) = (0,1,1)$

ii. $X(x,y,z) = (x + \arctan(y^2+z^3), e^{z-x^3}, z^2 - z + 1)$.

72. (*) Considere o campo vectorial $X\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$X(x,y,z) = (xg(z), -yg(z), z)$$

onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1.

(a) Mostre que o fluxo de X através do cilindro

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x^2+y^2 = 4,\ 0 < z < 1\}$$

segundo uma normal à sua escolha não depende da função g.

(b) Mostre que existe uma função $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $X = \nabla h$ sse g é constante.

Extremos condicionados

73. Determine e classifique os extremos de f em M:

    (a) $f(x,y) = x$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 2y^2 = 3\}$
    (b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $M = \{(x,2) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R}\}$
    (c) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $M = \{(x, \cos x) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R}\}$
    (d) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$
    (e) $f(x,y) = xy$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 2a^2$, $a \neq 0$
    (f) $f(x,y,z) = x^2 + 2y - z^2$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x - y = 0,\, x + z = 6\}$
    (g) $f(x,y,z) = x$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 2,\, x + z = 1\}$
    (h) $f(x,y,z) = x + y$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon xy = 16\}$
    (i) $f(x,y,z) = xyz$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 5,\, xy + xz + yz = 8\}$

74. Calcule os pontos de

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 = y^2 + z^2,\, 2x + z = 2\}$$

    mais próximos e mais distantes da origem.

75. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar as dimensões do retângulo de maior perímetro que pode ser inscrito na elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ com $a, b > 0$.

76. Seja $f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i$ e

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}.$$

    (a) Determine o valor máximo de f em M.
    (b) (*) Deduza a desigualdade entre a média geométrica e a média aritmética:

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \quad a_i > 0.$$

    Sugestão: $x_i = (a_i/(a_1 + \cdots + a_n))^{1/2}$.