Simulação e Otimização

Capítulo 1: Técnicas de resolução de problemas de otimização combinatória

Raquel Bernardino

rbernardino@iseg.ulisboa.pt
Gabinete 511 Quelhas 6

Sumário

Sumário

Motivação

- Todos os dias estamos perante problemas de Investigação Operacional, como por exemplo:
  - Determinar o caminho rápido para vir para o ISEG.
  - Decidir onde fazer as compras para a semana (distância versus preços).

- Para formular estes problemas muitas vezes precisamos de variáveis inteiras.

Exemplos de aplicações de Investigação Operacional

European Journal of Operational Research
Volume 240, Issue 3, 1 February 2015, Pages 718-733

Decision Support

An optimization framework for the development of efficient one-way car-sharing systems

Burak Boyacı [a b], Konstantinos G. Zografos [b], Nikolas Geroliminis [a]

(a) 2017

European Journal of Operational Research
Volume 257, Issue 3, 16 March 2017, Pages 992-1004

Innovative Applications of O.R.

Inventory rebalancing and vehicle routing in bike sharing systems

J. Schuijbroek [a], R.C. Hampshire [1 b], W.-J. van Hoeve [c]

(b) 2019

European Journal of Operational Research
Volume 271, Issue 3, 16 December 2018, Pages 1085-1099

Innovative Applications of O.R.

Scheduling last-mile deliveries with truck-based autonomous robots

Nils Boysen [1 a], Stefan Schwerdfeger [b], Felix Weidinger [1 a]

(c) 2020

European Journal of Operational Research
Volume 292, Issue 1, 1 July 2021, Pages 250-275

Innovative Applications of O.R.

Building disaster preparedness and response capacity in humanitarian supply chains using the Social Vulnerability Index

Douglas Alem [a], Hector F. Bonilla-Londono [b], Ana Paula Barbosa-Povoa [c], Susana Relvas [c], Deisemara Ferreira [d], Alfredo Moreno [e]

(d) 2023

Figura 1: Prémio aplicações inovadoras da IO da revista científica *European Journal of Operations Research*.

Sumário

Introdução

Um problema de programação linear inteira mista (PLIM) é um problema de programação linear em que algumas variáveis têm obrigatoriamente valores inteiros. $\Longrightarrow$ Perda da propriedade da divisibilidade da PL.

- Num problema de programação linear inteira (PLI) todas as variáveis têm obrigatoriamente valores inteiros.
- Num problema de programação linear binária todas as variáveis têm obrigatoriamente valor binário, isto é, valor 0 ou 1.

Um problema de otimização combinatória (POC) é um PLIM cuja região admissível (RA) é um conjunto finito.

- A solução ótima é um subconjunto de um conjunto finito - a RA.

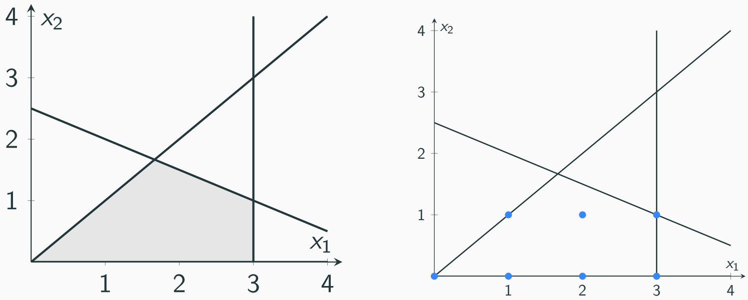


Figura 2: RA de um PL versus RA de um POC.

Introdução

Exemplos de problemas de otimização combinatória são:

- o problema da afetação;
- o problema dos transportes;
- o problema do saco-mochila;
- o problema do caixeiro viajante; ou
- o problema do roteamento de veículos.

■ O problema do caixeiro viajante e o problema do roteamento de veículos serão estudados no Capítulo 2.

Introdução

Como podemos resolver um problema de otimização combinatória?

- Como a RA é um conjunto finito, podemos calcular todas as soluções admissíveis (SA) e determinar a melhor. $\Longrightarrow$ Enumeração!

- A enumeração da RA de um POC pode ser um processo muito demorado.

Problema	#SA
Caixeiro viajante	$(n-1)!$
Problema do saco-mochila	2^n

- Uma instância do caixeiro viajante com 10 cidades tem 362880 SAs.
- Uma instância do saco-mochila com 10 itens tem 1024 SAs.
  - Estas são consideradas instâncias pequenas.

Introdução

- Como resolver um ~~COP~~ POC de forma eficiente?

Métodos de resolução

- Exatos
  - Branch-and-bound
  - Planos de corte de Gomory
  - Branch-and-cut
  - Branch-and-price
- Aproximados
  - Relaxações
  - Heurísticas

■ Nos métodos aproximados são calculados limites inferiores (minorantes) ou limites superiores (majorantes) para o valor ótimo.

- Num problema de minimização as relaxações dão minorantes e as heurísticas majorantes.
- Num problema de maximização as relaxações dão majorantes e as heurísticas minorantes.

Sumário

Relaxações

Ideia geral: Resolver uma versão "simplificada" do problema, que normalmente é obtida removendo restrições.

Definição: Relaxação

Um problema

$$(RP) \qquad z^R = \min\{f(x) : x \in T \subseteq \mathbb{R}^n\}$$

é uma *relaxação* de

$$(IP) \qquad z = \min\{c(x) : x \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}$$

se:

(i) $X \subseteq T$; e
(ii) $f(x) \leq c(x)$, $\forall x \in X$

→ Cond. (ii) verificada para pontos do problema original.

Relaxações

Problema maximização:
$z^R \geq z$

Proposição

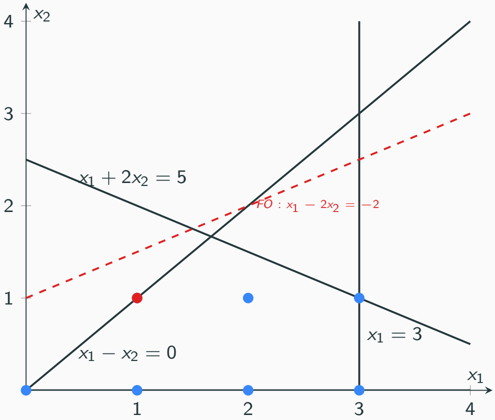
Se RP é uma relaxação de IP, então $z^R \leq z$.

Demonstração.

Se x^* é uma solução ótima de IP, então $x \in X$ e $z = c(x^*)$. Como RP é uma relaxação de IP sabemos que $X \subseteq T$ e $f(x^*) \leq c(x^*)$. Logo, $z^R \leq f(x^*) \leq c(x^*) \leq z$. □

Exemplo

$$(IP) \equiv \min z = x_1 - 2x_2$$
$$s.a : x_1 - x_2 \geq 0$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$
$$x_1 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

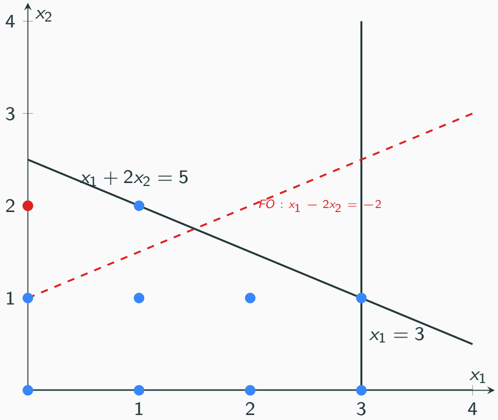


$$v(IP) = c(1,1) = 1 \times 1 - 2 \times 1 = -1$$

Exemplo

$$(RL_1) \equiv \min z = x_1 - 2x_2$$
$$s.a: x_1 + 2x_2 \leq 5$$
$$x_1 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

Removida a restrição $x_1 - x_2 \geq 0$.

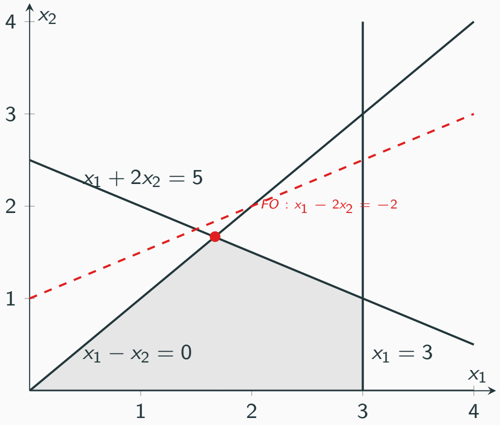


$$v(RL_1) = c(0,2) = 1 \times 0 - 2 \times 2 = -4$$

Exemplo

$$(RL_2) \equiv \min z = x_1 - 2x_2$$
$$s.a : x_1 - x_2 \geq 0$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$
$$x_1 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Removida a restrição de integralidade.

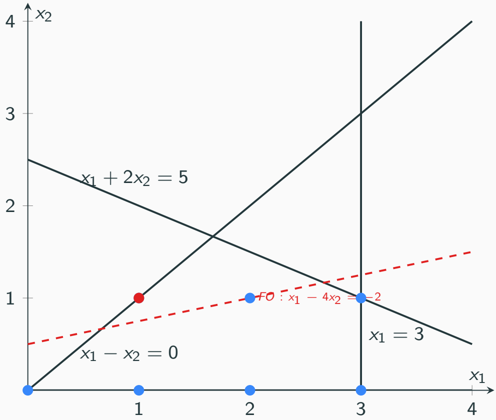


$$v(RL_2) = c(\tfrac{5}{3}, \tfrac{5}{3}) = \tfrac{5}{3} - 2 \times \tfrac{5}{3} = -\tfrac{5}{3} \approx -1.67$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
(RL_3) \equiv \min z = x_1 - 4x_2 \\
s.a: x_1 - x_2 \geq 0 \\
x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
x_1 \leq 3 \\
x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}
$$

A FO é $x_1 - 4x_2$ em vez de $x_1 - 2x_2$.



$v(RL_3) = c(1,1) = 1 \times 1 - 4 \times 1 = -3$

Propriedade

(i) Se a relaxação RP é impossível, então o problema original IP é impossível.

$e\ f(x) = c(x),\ \forall x \in X$

(ii) Seja x^* a SO da relaxação RP. Se $x^* \in X$, então x^* é a SO do problema IP.

Demonstração.

(i) Se RP é impossível, então $T = \emptyset$. Assim, como $X \subset T$ temos $T = \emptyset$ e podemos concluir que o problema original IP também é impossível.

$= f(x^*)$

(ii) Como x^* a SO da relaxação RP e $x^* \in X$, temos $z \leq c(x^*) = z^R$. Como RP é uma relaxação de IP temos $z^R \leq z$. Assim, $z = z^R$ e x^* é uma SO de IP, pois $z = c(x^*)$.

$\square$

Relaxação linear

A relaxação linear de um PLIM é obtida removendo as restrições de integralidade.

Definição: Relaxação linear

Dado o problema

$$(IP) \qquad z = \min\{c(x) : x \in X \subseteq \mathbb{Z}^n\},$$

a sua *relaxação linear* é

$$(PLR) \qquad z^{LR} = \min\{c(x) : x \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}.$$

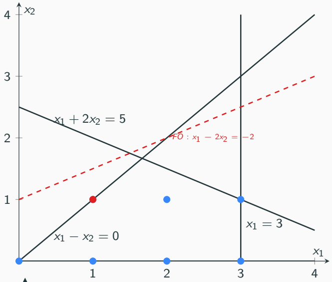
Para avaliar a qualidade do valor da relaxação linear podemos usar o gap.

$$gap = \frac{z - z^{LR}}{z}.$$

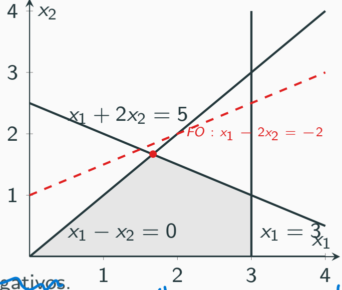
$$\frac{\text{"maior - menor"}}{\text{ótimo}}$$

Exemplo

$$(IP) \equiv \min z = x_1 - 2x_2$$
$$s.a : x_1 - x_2 \geq 0$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$
$$x_1 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$



$$(RL_2) \equiv \min z = x_1 - 2x_2$$
$$s.a : x_1 - x_2 \geq 0$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$
$$x_1 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



$gap = \frac{-1-(-5/3)}{|-1|}$[1] $= \frac{2}{3} \implies 66.67\%$.

[1] Usamos o módulo quando temos valores negativos.

no denominador

↳ o valor ótimo é negativo.

Relembrando a dualidade

Definição

Os dois problemas

$$(IP) \qquad z = \max\{c(x) : x \in X\}$$

e

$$(D) \qquad w = \min\{w(u) : u \in U\}$$

formam um *par de problemas duais fraco* se $c(x) \leq w(u), \forall x \in X$ e $u \in U$. Quando $z = u$, temos um *par de problemas duais forte*.

- Num par de problemas duais, o valor de qualquer SA do problema de máximo é um minorante para o valor ótimo problema de mínimo.
  - O par de problemas duais apenas está definido para problemas de programação linear.

Relaxação Lagrangeana

- Considere-se o seguinte problema inteiro

$$(IP) \equiv z = \min\{c(x) : Dx \overset{\geq}{\cancel{\leq}} d \text{ e } x \in X\},$$

onde $Dx \overset{\geq}{\cancel{\leq}} d$ é o conjunto de restrições "complicadas".

Proposição

O problema

$$IP(u) \equiv z(u) = \overset{\min}{\cancel{\max}}\{c(x) + u(d - Dx) : x \in X\}$$

é uma relaxação de IP para todo $u \geq 0$.

Demonstração.

Temos que $\{Dx \overset{\geq}{\cancel{\leq}} d \text{ e } x \in X\} \subseteq X$ e $c(x) + \overset{\geq 0}{u}\overbrace{(d - Dx)}^{\leq 0} \overset{\leq}{\cancel{\geq}} c(x)$, logo pela definição de relaxação $IP(u)$ é uma relaxação de IP. □

Considere-se

$$(IP) \equiv z = \min\{c(x) : Dx \geq d \text{ e } x \in X\}$$

e

$$IP(u) \equiv z(u) = \overset{\text{min}}{\cancel{\max}}\{c(x) + u(d - Dx) : x \in X\},$$

com $u > 0$.

Definição

$IP(u)$ é a *relaxação Lagrangeana* de (IP) de parâmetro u.

Exemplo

$$
\begin{aligned}
(IP) \equiv \overset{z\,=\,\min}{\cancel{\min z =}}\; & x_1 - 2x_2 \\
s.a: & x_1 - x_2 \geq 0 \implies \text{Restrições "complicadas"} \\
& x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}
$$

- A relaxação lagrangeana é:

$$
\begin{aligned}
IP(u) \equiv \overset{z(u)\,=\,\min}{\cancel{\min z(u) =}}\; & x_1 - 2x_2 + u(0 - x_1 + x_2) = (1-u)x_1 + (-2+u)x_2 \\
s.a: & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}
$$

Em $IP(u)$ as restrições "complicadas" são adicionadas à função objetivo com uma penalidade u.

- O valor u é o multiplicador de Lagrange associado às restrições $Dx \cancel{\leq} \geq d$.
- Na FO a penalidade é multiplicada pela pela "violação" da restrição relaxada.

O problema $IP(u)$ é a relaxação Lagrangeana de IP de parâmetro u.

- O valor ótimo de $IP(u)$ depende do valor de u.

Relaxação Lagrangeana

Como o $IP(u)$ é uma relaxação de IP, sabemos que $z(u) \leq z$. Contudo, $z(u)$ depende do valor de u.

- Para encontrar o melhor minorante possível para o valor ótimo de IP temos que otimizar o valor de u. $\Longrightarrow$ Resolver o *problema dual lagrangeano*.

Definição

O *problema dual Lagrangeano* define-se como

$$(LD) \equiv w_{DL} = \max\{z(u) : u \geq 0\}.$$

Exemplo

- O problema dual lagrangeano que queremos resolver é:

$$w_{DL} = \max_{u \geq 0} \boxed{z(u) = \min_{(x_1,x_2) \in X} (1-u)x_1 + (-2+u)x_2}$$

com $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : x_1 + 2x_2 \leq 5,\ x_1 \leq 3 \text{ e } x_1, x_2 \geq 0\}$.

- Queremos determinar a expressão de $z(u)$ para conseguirmos determinar o seu mínimo. Contudo, $z(u)$ depende da solução do PLI $\min\{(1-u)x_1 + (-2+u)x_2 : (x_1, x_2) \in X\}$.
  - Vamos determinar que pontos em X é que podem ser SOs do PLI referido.

Exemplo

- Suponhamos que $u \leq 1$

$$z(u) = \underbrace{(1-u)}_{\geq 0} x_1 + \underbrace{(-2+u)}_{<0} x_2$$

Como queremos minimizar, a SO é $(0, 2)$ e

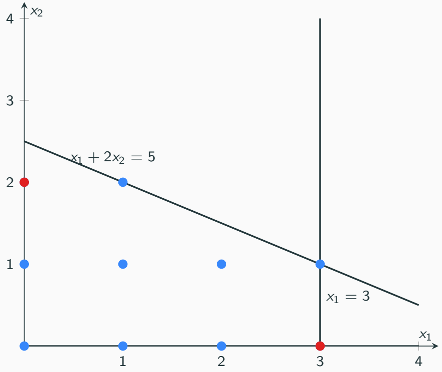
$$z(u) = (1-u) \times 0 + (-2+u) \times 2 = -4 + 2u.$$

- Suponhamos que $u \geq 2$

$$z(u) = \underbrace{(1-u)}_{<0} x_1 + \underbrace{(-2+u)}_{\geq 0} x_2$$

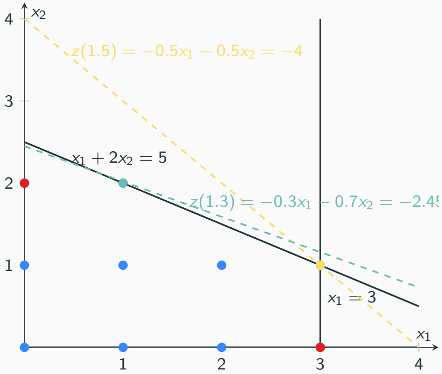
Como queremos minimizar, a SO é $(3, 0)$ e

$$z(u) = (1-u) \times 3 + (-2+u) \times 0 = 3 - 3u.$$



- O que acontece para $1 \leq u \leq 2$?
  - Que outros pontos em X podem ser soluções ótimas de $z(u)$?

Exemplo

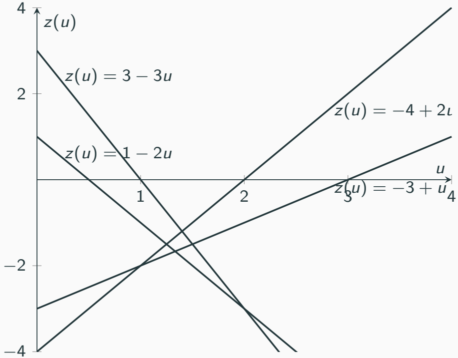


Para determinados valores de u, as soluções $(1, 2)$ e $(3, 1)$ também podem ser SO do problema.

Exemplo

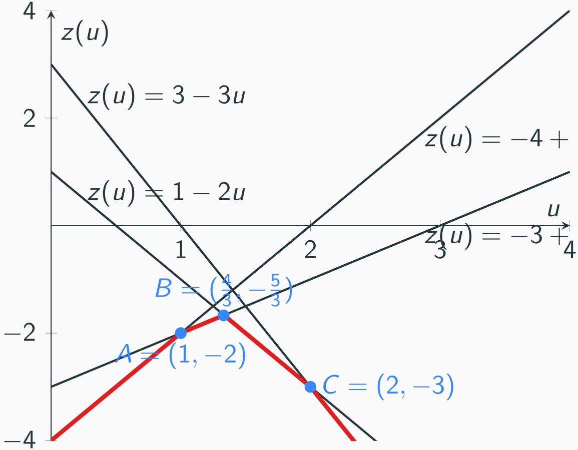
- Temos então as seguintes expressões para $z(u)$:
  - Ponto $(0,2) \implies z(u) = (1-u) \times 0 + (-2+u) \times 2 = 2u - 4$
  - Ponto $(3,0) \implies z(u) = (1-u) \times 3 + (-2+u) \times 0 = -3u + 3$
  - Ponto $(1,2) \implies z(u) = (1-u) \times 1 + (-2+u) \times 2 = u - 3$
  - Ponto $(3,1) \implies z(u) = (1-u) \times 3 + (-2+u) \times 1 = -2u + 1$

Resta-nos verificar qual é o mínimo de $z(u)$, isto é, para que valores de u são válidas.



Exemplo

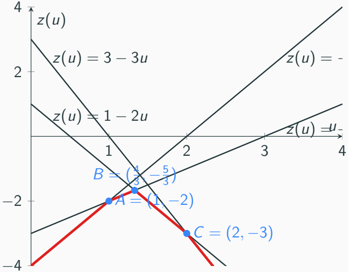
- Queremos determinar a reta que está a baixo (é o mínimo) de todas as outras.



Exemplo

Assim, a expressão da função que queremos maximizar é:

$$z(u) = \begin{cases} 2u - 4, & u \leq 1 \\ u - 3, & 1 \leq u \leq \frac{4}{3} \\ -2u + 1, & \frac{4}{3} \leq u \leq 2 \\ -3u + 3, & u \geq 2 \end{cases}$$



Qual o valor de u que maximiza $z(u)$? $\Longrightarrow$ $u = \frac{4}{3}$ (ponto B).

Para obtermos o melhor minorante possível agora temos que calcular $z(\frac{4}{3})$.

$$z\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3}$$

Relaxação Lagrangeana

Relembremos que $IP(u) \equiv z(u) = \overset{\min}{\cancel{\max}}\{c(x) + u(d - Dx) : x \in X\}$.

Proposição

Se $u \geq 0$, e

(i) $x(u)$ é uma SO de $IP(u)$, e

(ii) $Dx(u) \overset{\geq}{\cancel{\leq}} d$, e

(iii) $(Dx(u))_i = d_i$ sempre que $u_i > 0$ (relações de complementaridade),

então $x(u)$ é SO de (IP).

Demonstração.

Por (i), como $x(u)$ é uma SO de $IP(u)$ temos $w_{DL} \geq z(u)$.

Além disso, $x(u)$ é admissível para o problema original (IP) pois $x \in X$ e satisfaz as restrições complicadas por (ii). Logo, $z(u) \geq z$.

Finalmente, por (iii), $z(u) = cx(u) + u(d - Dx(u)) = cx(u)$, pois quando $u > 0$ as restrições são satisfeitas na igualdade.

Como o problema dual lagrangeano é uma relaxação de (IP) temos $w_{DL} \leq z$. Logo, $w_{DL} = z$ e podemos concluir que $x(u)$ é uma SO de (IP). $\square$

Relaxação Lagrangeana

- Caso as restrições a relaxar não estejam na forma $\geq$ as restrições de sinal da variável u alteram-se no problema dual lagrangeano.

Caso $\geq$ "standard"

$(PLI) \equiv z = \min\{c(x) : Ax \geq b \text{ e } x \in X\}.$

$IP(u) \equiv z(u) = \min\{c(x) + u(b - Ax) : x \in X\}.$

$(DL) \equiv w_{DL} = \max\{z(u) : u \geq 0\}.$

Caso $\leq$ "ñ standard"

$(PLI) \equiv z = \min\{c(x) : Dx \leq d \text{ e } x \in X\}.$

$IP(v) \equiv z(v) = \min\{c(x) + v(d - Dx) : x \in X\}.$

$(DL) \equiv w_{DL} = \max\{z(v) : v \leq 0\}.$

Caso $=$

$(PLI) \equiv z = \min\{c(x) : Tx = t \text{ e } x \in X\}.$

$IP(y) \equiv z(y) = \min\{c(x) + y(t - Tx) : x \in X\}.$

$(DL) \equiv w_{DL} = \max\{z(y) : y \text{ livre }\}.$

Relaxação Lagrangeana

- Quão bom é o limite da relaxação lagrangeana?

Considere-se

$$\begin{aligned}(P) \equiv z = \min cx& \\ \text{s.a: } Ax \geq b& \implies \text{A relaxar} \\ x \in X&\end{aligned}$$

e

$$(DL) \equiv w^{DL} = \max_{u \geq 0} L(u)$$

com

$$L(u) \equiv z(u) = \min\{c(x) + u(b - Ax) : x \in X\}.$$

Proposição

$w^{DL} \geq z^{LR}$

- O valor da relaxação lagrangeana é melhor ou igual ao valor da relaxação linear. $\implies$ A igualdade obtém-se quando os pontos extremos de X são inteiros.

Notas sobre a relaxação Lagrangeana

- Para obter o melhor valor possível para os multiplicadores de Lagrange é necessário resolver o problema dual Lagrangeano, que é não-linear.
  - Resolvido com métodos específicos. $\Longrightarrow$ Método do subgradiente.

- É possível relaxar simultaneamente vários conjuntos de restrições.
  - Temos tantos multiplicadores de Lagrange quantas restrições a relaxar.
    Exemplo:

$$(P) \equiv \min\{c(x) : Ax \geq b, Dx \geq d, x \in X\}$$
$$z(u_1, u_2) = \min\{c(x) + u_1(b - Ax) + u_2(d - Dx) : x \in X\}$$
$$w^{DL} = \max\{z(u_1, u_2) : u_1, u_2 \geq 0\}$$