Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

Estatística II

Licenciatura em Gestão
2.º Ano/1.º Semestre
2023/2024

Aulas Teóricas N.ºs 1 e 2 (Semana 1)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teóricas (Semanas 1 a 5)	Aulas Teóricas (Semanas 5 a 7)	Aulas Teóricas (Semanas 7 a 9)	Aulas Teóricas (Semanas 10 a 13)
• **Capítulo 1**: Estimação	• **Capítulo 2**: Testes de Hipóteses	• **Capítulo 3**: Modelo de Regressão Linear	• **Capítulo 4**: Complementos ao Modelo de Regressão Linear

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

1. Estimação

a. Introdução
b. Métodos dos momentos
c. Método da máxima verosimilhança
d. Propriedade dos estimadores por pontos
e. Estimação por intervalos para populações normais
f. Estimação por intervalos para populações não normais (grandes amostras)

1ª semana (19/9 e 21/9)

T01 – Apresentação da UC e Introdução à Inferência Estatística

Breve revisão de aspetos fundamentais de amostragem.

T02 - Estimação - Método dos Momentos

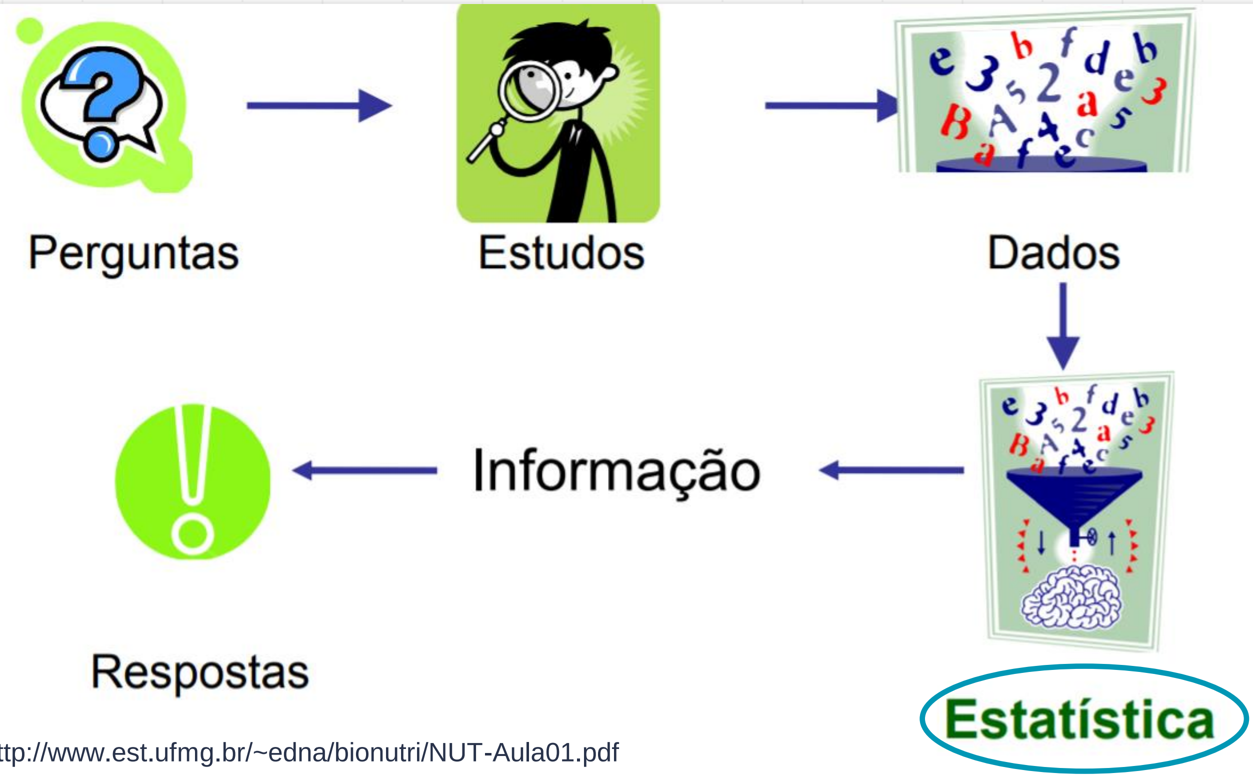
Estimação: Método dos Momentos. Exemplos

1

O Que é a Estatística?

"

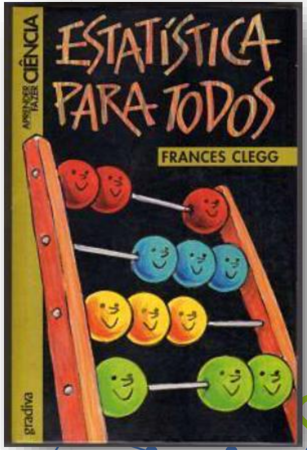
*A **Estatística** pode ser definida como um conjunto de métodos para Recolha, Análise e Interpretação de DADOS.*



http://www.est.ufmg.br/~edna/bionutri/NUT-Aula01.pdf

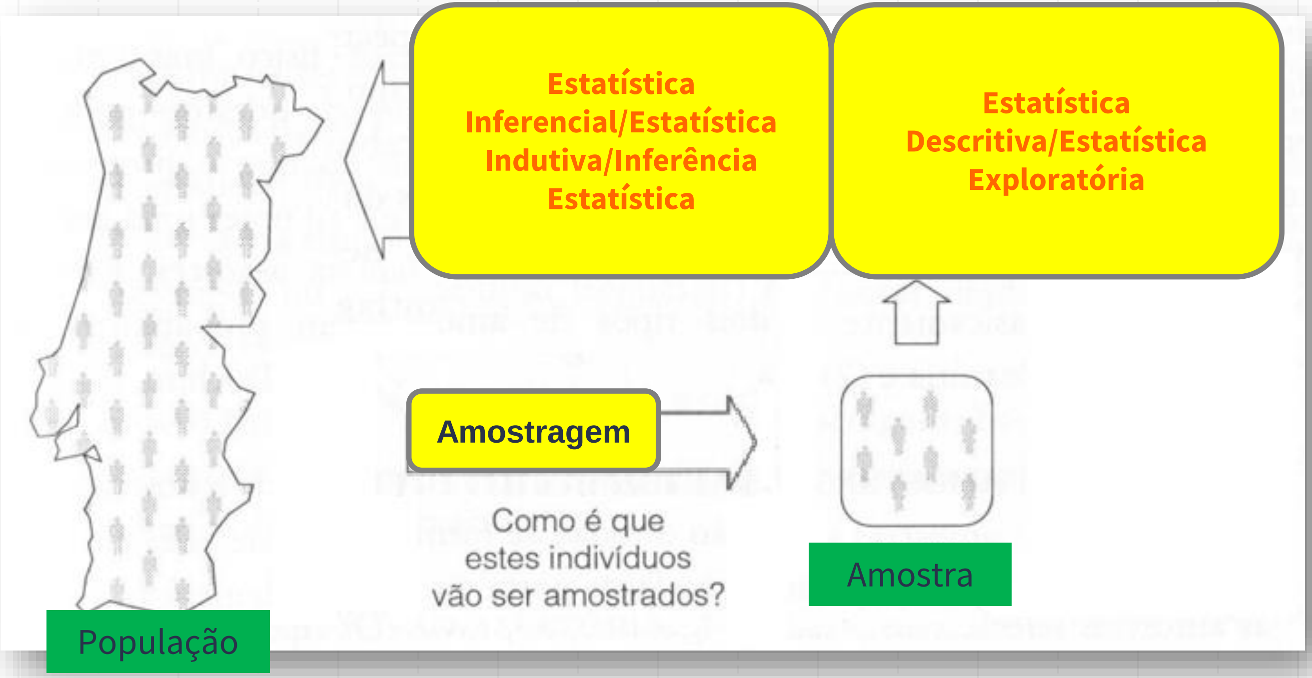
Os símbolos estatísticos são semelhantes aos símbolos usados em qualquer outro idioma. Para adquirir fluência num idioma necessitamos apenas de Tempo, Esforço e Prática.

A Estatística é para todos!

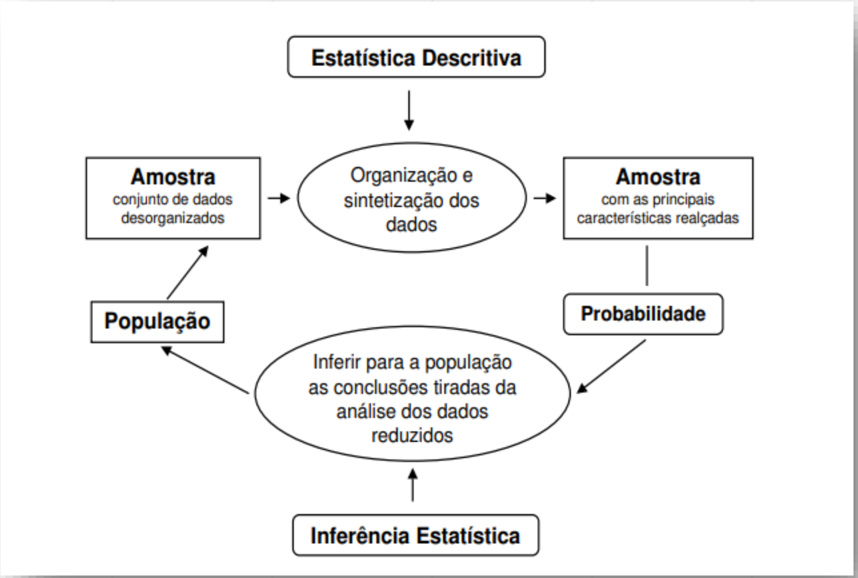


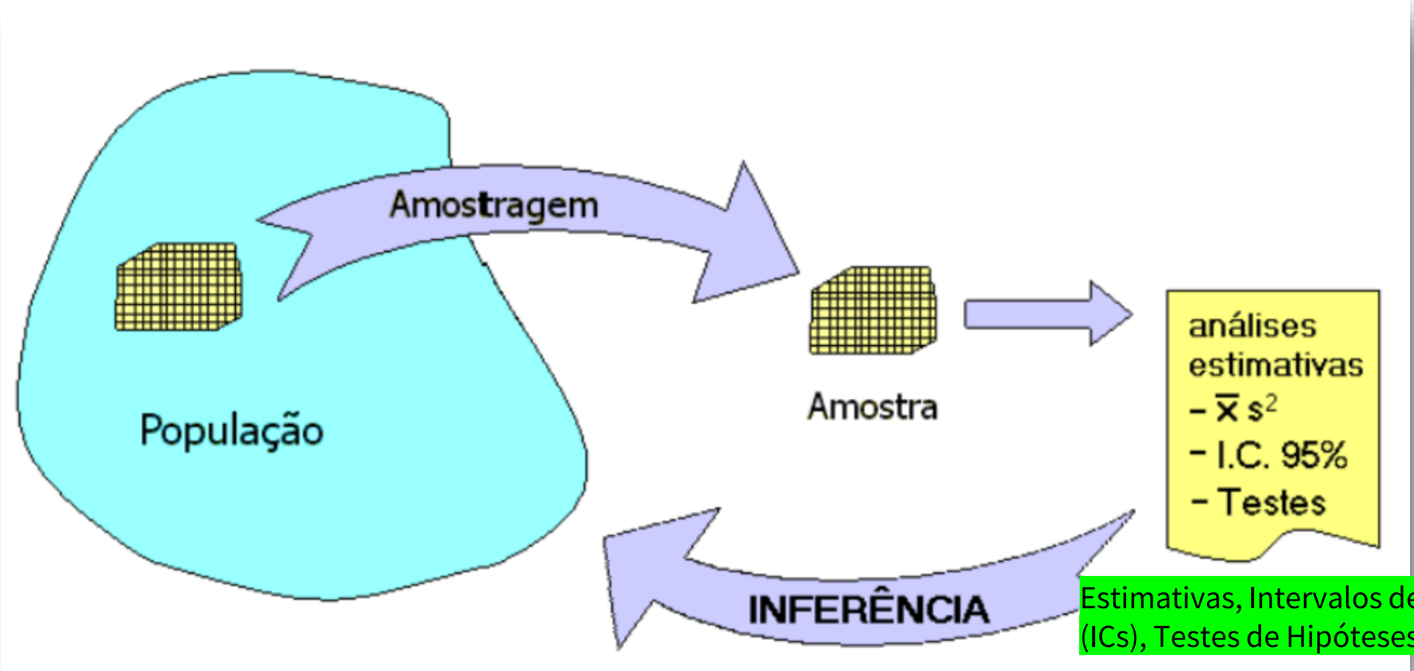
https://www.custojusto.pt

Estatística Exploratória vs. Estatística Inferencial



Estatística Descritiva vs. Inferência Estatística





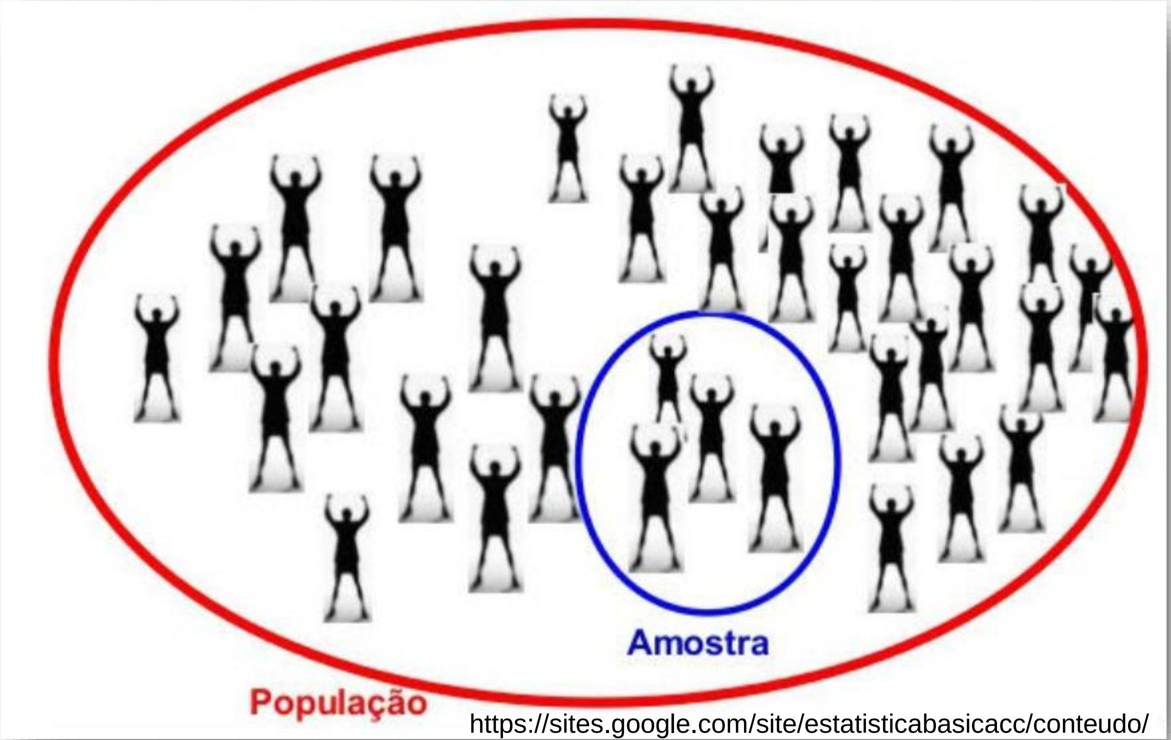
Estimativas, Intervalos de Confiança (ICs), Testes de Hipóteses…

https://sites.google.com/site/estatisticabasicacc

Inferência Estatística

Estimação Pontual e Estimação Intervalar

2



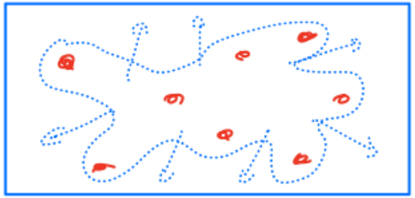
https://sites.google.com/site/estatisticabasicacc/conteudo/

- **POPULAÇÃO:**
  - é uma coleção completa de todos os elementos a serem estudados
- **AMOSTRA:**
  - é um subconjunto da população
- **CENSO:**
  - é uma coleção da dados relativos a todos os elementos de uma população:

https://slideplayer.com.br/slide/2627398

Amostra Aleatória

Perante "falta de informação" sobre a v.a. (população), vamos recolher uma amostra, estudar intensamente esta amostra e tentar extrapolar p/ a população.



Ω

• – elementos da população que vão ser estudados

$\Downarrow$

amostra

$(x_1, x_2, .., x_n)$

População vs Amostra Aleatória

população → recolher um subconjunto representativo da população →

(X)
↓
v.a. interesse

① $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

(amostra aleatória)

② estudar a amostra, através da estatística descritiva

→ ③ inferir ("extrapolar") os resultados da amostra p/ a população.

Amostragem

① Amostragem (Regras p/ assegurar a "bondade" dos resultados)

Amostra é representativa da população se tiver as seguintes características:

$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$: conjunto de variáveis aleatórias independentes entre si e têm todas a mesma distribuição, que é a distribuição da v.a. (população) X

a.a = amostra aleatória
i.i.d. = independentes e identicamente distribuídas

Slides Professora Claúdia Nunes

Distribuição de uma a.a.: V.a.´s Discretas

Qual é a distribuição da a.a. (X_1, …, X_n), sendo as v.a.´s X_i´s ($i = 1, \ldots, n$) iid a uma v.a. discreta X?

Distribuição de uma a.a.: V.a.´s Discretas

1ª consequência: Qual a distribuição de uma a.a.?

i) se X for uma v.a. discreta

$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$ [função de prob. conjunta da a.a.]

$\underset{\text{independentes}}{=} P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \ldots P(X_n = x_n)$

$\underset{\text{ident. distribuídas}}{=} P(X = x_1) P(X = x_2) \ldots P(X = x_n)$

$= \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i)$

Slides Professora Claúdia Nunes

Distribuição de uma a.a.: V.a.´s Poisson

Determine a seguinte função de probabilidade conjunta da a.a. $(X1, X2, X3)$: $P(X1=4, X2=3, X3=5)$, sendo Xi´s ($i = 1, 2, 3$) iid a $X \cap P(\lambda)$.

Distribuição de uma a.a.: V.a.´s Poisson

exemplo: $X \sim Poisson(\lambda)$ $\quad \lambda = ?$

$$P(X_1 = 4, X_2 = 3, X_3 = 5) = \prod_{i=1}^{3} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{4}}{4!}\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^{3}}{3!}\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^{5}}{5!} = \frac{e^{-3\lambda}\lambda^{12}}{4!\,3!\,5!}$$

Slides Professora Claúdia Nunes

Distribuição de uma a.a.: V.a.´s Contínuas

Qual é a distribuição da a.a. ($X1$, …, Xn), sendo Xi´s (i = 1, …, n) iid a uma v.a. Contínua X?

Distribuição de uma a.a.: V.a.´s Contínuas

ii) se X for uma v.a. contínua

$$f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$ [função de densidade de probabilidade conjunta]

$$\underset{\text{independentes}}{=} f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2) \ldots f_{X_n}(x_n)$$

$$= f_X(x_1)\, f_X(x_2) \ldots f_X(x_n)$$

identicamente distribuídas

$$= \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i)$$

Slides Professora Claúdia Nunes

Distribuição de uma a.a.: V.a.´s Exponenciais

Determine a seguinte função densidade de probabilidade conjunta da a.a. ($X1$, $X2$, $X3$, $X4$): $f(1.3, 0.5, 2.5, 0.78)$, sendo Xi´s ($i = 1, 2, 3, 4$) iid a $X \cap Exp(\lambda)$.

Distribuição de uma a.a.: V.a.´s Exponenciais

exemplo: $X \sim Exp(\mu)$

$x_1 = 1.3$; $x_2 = 0.5$; $x_3 = 2.5$; $x_4 = 0.78$

$$f_{X_1, X_2, X_3, X_4}(1.3, 0.5, 2.5, 0.78) = \mu e^{-\mu \times 1.3} \times \mu e^{-\mu \times 0.5}$$

$$\times \mu e^{-\mu \times 2.5} \times \mu e^{-\mu \times 0.78}$$

$$= \mu^4 e^{-\mu(1.3 + 0.5 + 2.5 + 0.78)} \; //$$

Média e Variância Amostrais

(2) Duas características da amostra frequentemente calculadas são:

média amostral: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

variância amostral: $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$ (*)

(*) porque: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 =$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + \bar{x}^2 - 2x_i\bar{x}) = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + n\bar{x}^2 - 2\bar{x}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i}_{n\bar{x}}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + n\bar{x}^2 - 2n\bar{x}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$

variância amostral corrigida: $S^2_{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

Slides Professora Claúdia Nunes

Inferência Estatística

③ Inferência estatística

síntese dos capítulos 6 e 7:

- X ✓ (v.a. de interesse)
- com distribuição conhecida D
- todos ou alguns parâmetros da distribuição são desconhecidos

parâmetros desconhecidos (θ)

Objectivo: "adivinhar" o valor de θ, com base na amostra

i.e.

estimar θ, com base na amostra

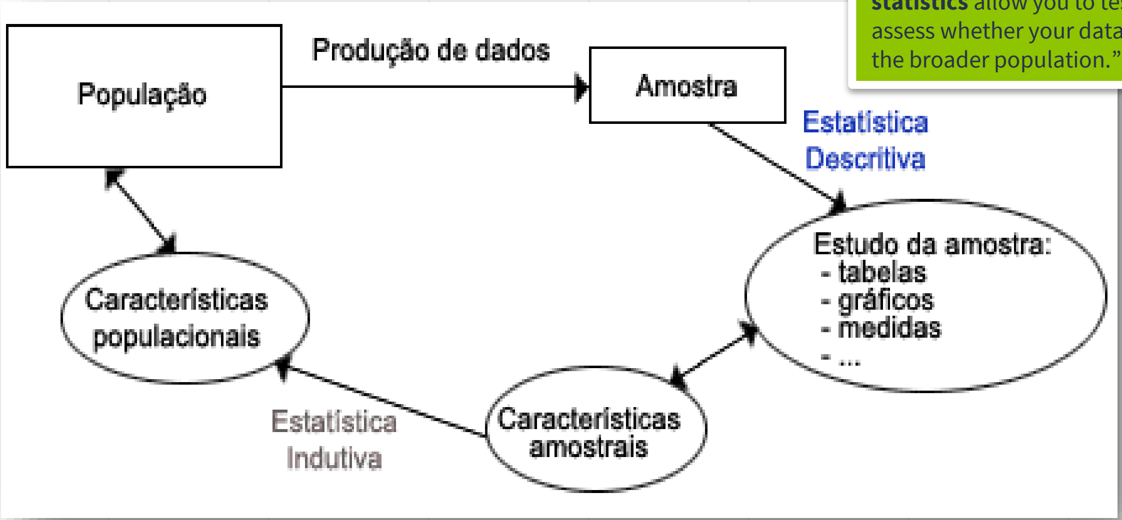
⇓

Estimação
- Pontual (cap. 6)
- Intervalar (cap. 7)

Slides Professora Claúdia Nunes

Estatística Exploratória/Descritiva vs. Inferência Estatística ou Estatística Inferencial/Indutiva

"**Descriptive statistics** summarize the characteristics of a data set. **Inferential statistics** allow you to test a hypothesis or assess whether your data is generalizable to the broader population."



https://umolharmatematico.weebly.com/descritivaindutiva.html

Estatística Inferencial

Estimação de Parâmetros (por pontos/pontual e por intervalos/intervalar)	Testes de Hipóteses
• Uma amostra é usada para estimar parâmetros **(estimadores/estimativas)** e construir **intervalos de confiança (ICs).** • **Exemplo**: Proporção de adolescentes de uma determinada escola que já realizaram uma dieta restritiva.	• Pretende-se **testar se o efeito observado tem significado estatístico na(s) população(ões).** • Uma amostra é usada para inferir para a(s) população(ões). • **Exemplo**: Duas dietas restritivas têm, em média, o mesmo efeito na perda de peso?

Estimação Pontual e Intervalar

Existem dois processos de estimação paramétrica:

✓**Estimação Pontual**: produção de um valor (estimativa), que se pretende que seja o melhor, para um determinado parâmetro da população, com base na informação amostral;

✓**Estimação Intervalar**: construção de um intervalo que, com certo grau de certeza previamente estipulado, se pretende que contenha o verdadeiro valor do parâmetro da população.

Um **estimador** dum parâmetro da população é uma variável aleatória (v. a.) ou função que depende da informação amostral e cujas realizações fornecem aproximações para o parâmetro desconhecido. A um valor específico assumido por este estimador para uma amostra em concreto chama-se **estimativa**.

Afonso & Nunes, 2019

Estimação Pontual

3

Estimadores e Estimativas

Estatística

i) **ESTATISTICA**: uma estatística é uma função (qualquer) que depende da amostra e não depende de nenhum parâmetro desconhecido.

Exemplo: $X \sim Poisson(\lambda)$ $\lambda = ?$

a.a. $(X_1, X_2, \ldots, X_{10})$

$T_1 = \bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$T_2 = 3$;

$T_3 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \lambda)^2$

Quais destas funções são estatísticas?

Slides Professora Claúdia Nunes

Estatística

i) <u>ESTATÍSTICA</u>: uma estatística é uma função (qualquer) que depende da amostra e não depende de nenhum parâmetro desconhecido.

<u>Exemplo</u>: $X \sim Poisson(\lambda)$ $\lambda = ?$

a.a. $(X_1, X_2, \ldots, X_{10})$

$T_1 = \bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{n} X_i$: É UMA ESTATÍSTICA

$T_2 = 3$: É UMA ESTATÍSTICA

$T_3 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \lambda)^2$ NÃO É ESTATÍSTICA!!

Slides Professora Claúdia Nunes

Estatística

DEF. 4: ESTATÍSTICA:

Uma estatística é uma função das variáveis observáveis, e é por si própria uma variável observável que não contém qualquer parâmetro desconhecido.

EXEMPLO 5: Seja a a.a. $[X_1, X_2, \dots, X_n]$. A média amostral $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ é uma estatística.

EXEMPLO 6: Seja a v.a $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com μ e σ^2 desconhecidos, então $x - \mu$ não é estatística porque não é observável, é função do parâmetro desconhecido μ.

EXEMPLO 6: Seja uma v.a. com distribuição $N(\mu;\sigma^2)$ Quais são Estatísticas?

a) $X^2-\mu$

b) $\frac{X}{\sigma^2}$

c) X^2-3

d) $X-4$

e) $X - \log X^3$

Quais destas funções são estatísticas?

apostila.PDF (ufpr.br)

Estimador

ii) ESTIMADOR: é uma estatística que toma valores no espaço do parâmetro desconhecido

Exemplo: $X \sim Ber(p)$ $p = ?$ $p \in [0,1]$

a.a. $(X_1, \dots, X_{20})$

$$T_1 = \sum_{i=1}^{20} X_i$$

$$T_2 = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} X_i$$

$$T_3 = \frac{\bar{X} - p}{1 - p}$$

Quais destas funções são estimadores do parâmetro p?

Slides Professora Claúdia Nunes

Estimador

ii) ESTIMADOR: é uma estatística que toma valores no espaço do parâmetro desconhecido

Exemplo: $X \sim Ber(p)$ $\quad p = ?$ $\quad p \in [0,1]$

a.a. $(X_1, \dots, X_{20})$

$T_1 = \cancel{\sum_{i=1}^{20}} x_i \in \{0,1,\dots,20\} \not\subset [0,1]$

$T_2 = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i = \bar{X} \in [0,1]$ ✓

$T_3 = \cancel{\frac{\bar{X} - p}{1-p}}$ não é estimador porque nem sequer é estatística

Estimador vs. Estimativa

Dada uma amostra aleatória $(X_1, X_2, ..., X_n)$ chama-se **estatística** a uma função da amostra aleatória que não envolve parâmetros desconhecidos.

Definição

Chama-se **estimador** de $\underline{\theta}$ a uma estatística que a cada amostra observada faz corresponder um valor que estima $\underline{\theta}$, a que chamamos uma **estimativa** de $\underline{\theta}$.

$\Theta^*(X_1, X_2, ..., X_n)$ é um estimador

$\theta^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ é uma estimativa

Não confundir

– estimador– variável aleatória

– estimativa–valor aproximado do parâmetro, obtido pelo estimador usando uma amostra particular

modulol_aula3_4_Estimação.pdf

Definição: Um estimador dum parâmetro da população é uma variável aleatória (v. a.) que depende da informação amostral e cujas realizações fornecem aproximações para o parâmetro desconhecido. A um valor específico assumido por este estimador para uma amostra em concreto chama-se **estimativa**.

Estimador vs. Estimativa

Exemplo: São estimadores

i) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i/n$ e ii) $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

Observada, por exemplo, a amostra $(1, 2, 0, 3, 1, 5)$

As estimativas associadas àqueles estimadores são:

i) $\overline{x} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = 2$ e ii) $s^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \overline{x})^2 = 3.2$

Consideremos o caso de termos uma dada população com distribuição $F(x|\theta)$, com um parâmetro desconhecido θ.

Como se podem definir vários estimadores de um parâmetro, põe-se o problema de escolher, se possível "o melhor". Há então que considerar certas propriedades que um estimador deve verificar.

modulol_aula3_4_Estimação.pdf

Conceitos Básicos

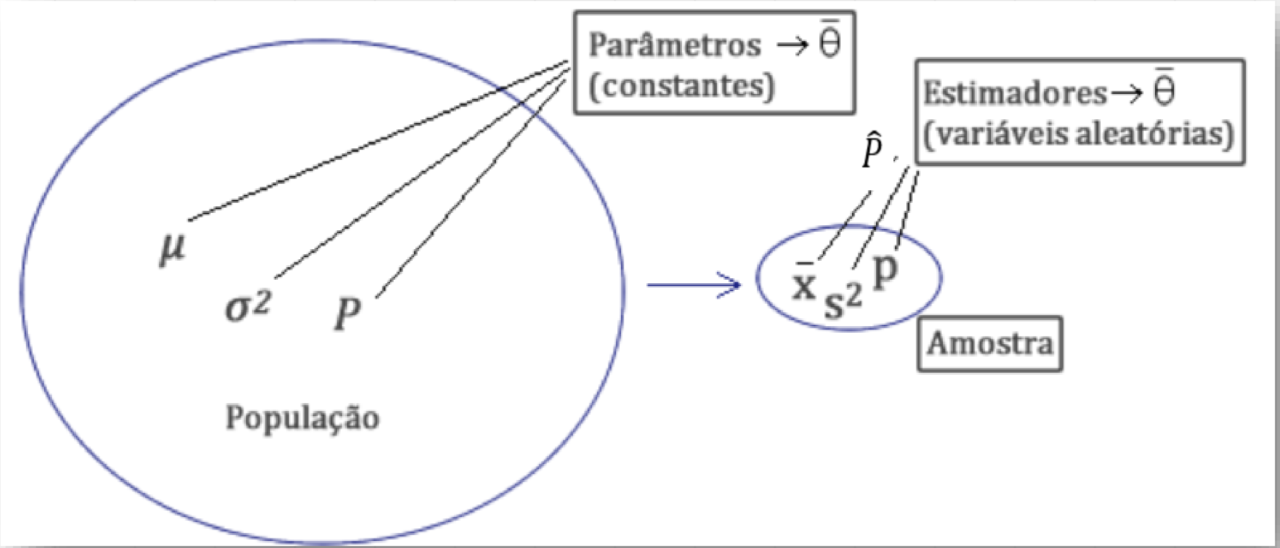
Parâmetro é uma quantidade numérica, em geral desconhecida, que descreve uma característica da população. Normalmente é representado por letras gregas como μ e σ, entre outras.

Estimador é uma função dos valores da amostra que utilizamos para estimar um parâmetro populacional. Os estimadores, em geral, são representados por letras gregas com acento circunflexo: $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$, etc.

Estimativa é o valor numérico obtido através do estimador.

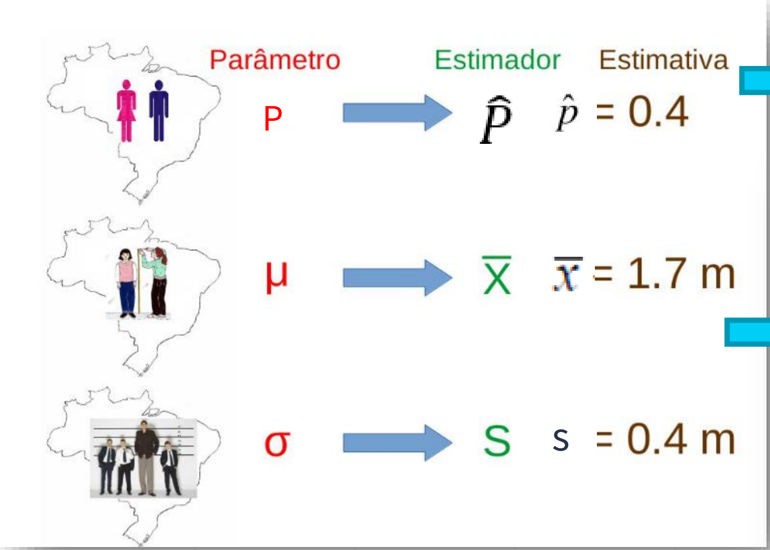
https://slideplayer.com.br/slide/2870987

Estimadores vs. Estimativas



http://tics.ifsul.edu.br/matriz/conteudo/disciplinas/est/uk/1/3.html

Estimadores vs. Estimativas



https://me323-unicamp.github.io/aulas/slides/parte10/parte10.html

$$\hat{p} = \frac{x}{n}$$

Sendo X o número de elementos da amostra (n) que apresenta a característica de estudo;

A estimativa do parâmetro da proporção populacional (P) é dada por esta fórmula; e o respetivo estimador é X/n.

Parâmetro Desconhecido	Estatística Estimador	Estimativa Pontual
μ	$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$	$\bar{x}$
σ^2	$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$	s^2

https://sites.google.com/site/estatisticabasicacc/conteudo

Variância corrigida (s^2)	Variância não corrigida ($s^{2`}$)
$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$	$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}$

Resumo dos Principais Estimadores e Estimativas em estudo...

Parâmetro a estimar	Estimador	Estimativa
μ	$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$	$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
σ^2	$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$
p	$\widehat{P} = \frac{X^{(a)}}{n}$	$\hat{p} = \frac{x^{(b)}}{n}$
$\mu_1 - \mu_2$	$\overline{X_1} - \overline{X_2}$	$\overline{x_1} - \overline{x_2}$
σ_1^2 / σ_2^2	S_1^2 / S_2^2	s_1^2 / s_2^2
$p_1 - p_2$	$\widehat{P_1} - \widehat{P_2}$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$

[a] X - v.a. que conta ... e ˜ [b] x - número observado de sucessos na amostra de dimensão n.

modulol_aula3_4_Estimação.pdf

4 Método dos Momentos

Estimadores

Métodos de Estimação

Vamos então falar dos principais métodos de estimação paramétrica.

Dos **métodos de estimação paramétrica** vamos referir:

o Método dos momentos e
o Método da Máxima verosimilhança

modulol_aula3_4_Estimação.pdf

Métodos dos Momentos

Introduzido por Karl Pearson no início do século XX, foi o primeiro método de estimação a ser apresentado e que tem uma filosofia muito simples.

O método consiste em:

– considerar como estimadores dos parâmetros desconhecidos as soluções das equações que se obtêm igualando os momentos teóricos aos momentos empíricos.

Momentos empíricos ou Momentos amostrais

Momentos teóricos ou Momentos populacionais

É um método de aplicação geral, tendo como única condição que a distribuição tenha um número suficiente de momentos (teóricos).

moduloI_aula3_4_Estimação.pdf

Métodos dos Momentos

Sejam $\theta_1, ..., \theta_k$ parâmetros desconhecidos de uma v.a. X.
O método dos momentos consiste em igualar momentos teóricos e momentos empíricos, i.e.,

$$E[X] = m'_1 \quad c/ \quad m'_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$E[X^2] = m'_2 \quad c/ \quad m'_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$
$$\vdots$$
$$E[X^k] = m'_k \quad c/ \quad m'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

$m'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$ são os chamados momentos empíricos, calculados à custa da amostra $(x_1, ..., x_n)$.

Aquelas igualdades dão-nos estimativas que são concretização dos estimadores com as expressões correspondentes.

modulol_aula3_4_Estimação.pdf

Métodos dos Momentos: Exemplo

Considere-se X ∩ N(μ, σ^2). Quais são os estimadores dos momentos de μ e σ^2?

Métodos dos Momentos: Exemplo

Exemplo

Consideremos $X \frown \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Quais os estimadores de momentos de μ e σ^2?

Tem-se :

$$E[X] = \mu \quad \text{e} \quad M_1' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$
$$E[X^2] = \sigma^2 + \mu^2 \quad \text{e} \quad M_2' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

donde

$$\mu^* = \overline{X}$$
$$(\sigma^2)^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^{*2} \Rightarrow (\sigma^2)^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$\begin{cases} \mu = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sigma^2 + \mu^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \overline{x} \\ \sigma^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2 \end{cases}.$$

moduloI_aula3_4_Estimação.pdf

Portanto, os estimadores são:

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \overline{X} \\ \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \left(\dfrac{n-1}{n}\right) S^2 \end{cases}.$$

Variância corrigida (s^2)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

Métodos dos Momentos

Os cálculos não são complicados, mas no cálculo dos momentos empíricos aparecem potências de expoente elevado quando há muitos parâmetros, conduzindo a estimativas instáveis.
Por isso, como regra prática deve evitar-se recorrer ao método dos momentos para mais de quatro parâmetros.

Nota: Os estimadores obtidos pelo método dos momentos são menos eficientes do que os estimadores de máxima verosimilhança, que passamos já a apresentar.

moduloI_aula3_4_Estimação.pdf

Método dos Momentos: Exercícios

Estimadores

5

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

Exercício 1: Suponha que X1, X2, ., Xn é uma a.a. proveniente de uma distribuição exponencial com o parâmetro λ. Determine o estimador dos momentos de λ.

Exercício 1: Estimador dos Momentos

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, 0 \leq x < \infty$$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

1° Momento da Amostra: $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \overline{X}$

1° Momento da População: $E[X] = \frac{1}{\lambda}$

Método dos Momentos: $E[X] = \overline{X}$

$$\frac{1}{\hat{\lambda}_{MM}} = \overline{X}$$

$$\hat{\lambda}_{MM} = \frac{1}{\overline{X}}$$

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

Exercício 2: Seja X1, X2, ., Xn uma a.a. que segue uma v.a. com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x|\alpha) = (\alpha + 1) \cdot x^{\alpha}\ I_{(0,1)}(x) \quad \alpha > 0.$$

Encontre um estimador para α utilizando o método dos momentos.

Exercício 2: Estimador dos Momentos

Solução pelo método dos momentos: $\mu_1' = m_n$

$$\mu_1' = E(X) = \int_0^1 x \cdot f(x|\alpha)\, dx = (\alpha+1) \cdot \int_0^1 x^{\alpha+1}\, dx = (\alpha+1) \cdot \left. \frac{x^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right|_0^1$$

Logo, $\mu_2' = \boxed{\dfrac{\alpha+1}{\alpha+2}}$

Tabela 1.1: Tabela de Primitivas Elementares

f	$P\,f = F$
$c, c \in IR$	$c\,x$
$x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\sec^2 x$	$\mathrm{tg}\,x$
$\mathrm{cosec}^2\,x$	$-\mathrm{cotg}\,x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}\,x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$

Tópico_08_.pdf (usp.br)

Exercício 2: Estimador dos Momentos

Assim,

$$m_1 = \mu_1' \Longrightarrow \frac{\widehat{\alpha}+1}{\widehat{\alpha}+2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

Segue que,

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}+1 &= (\widehat{\alpha}+2)\cdot\overline{X} \\ \widehat{\alpha}+1 &= \widehat{\alpha}\,\overline{X}+2\,\overline{X} \\ \widehat{\alpha}\,(1-\overline{X}) &= 2\,\overline{X}-1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\widehat{\alpha} = \frac{2\,\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$$

é o estimador para α pelo métodos dos momentos.

Obrigada!

Questões?