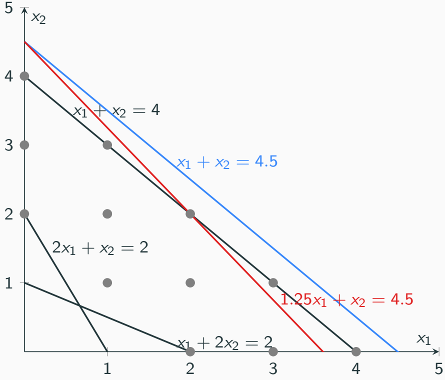
Algoritmo de planos de corte de Gomory

Definição

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^m$. Uma *desigualdade válida* para X é uma desigualdade $\pi_1 x_1 + \ldots + \pi_n x_n \leq \pi_0$ ($\pi x \leq \pi_0$) que é satisfeita por todos os pontos de X.

Exemplo

Seja $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : x_1 + x_2 \leq 4, x_1 + 2x_2 \geq 2, 2x_1 + x_2 \geq 2 \text{ e } x_1, x_2 \geq 0\}$. $\Longrightarrow$ Pontos cinzentos no gráfico.



A desigualdade $x_1 + x_2 \leq 4.5$ é uma desigualdade válida para X.

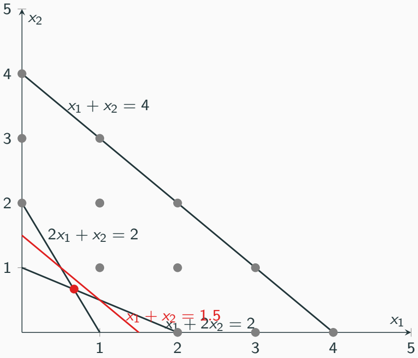
A desigualdade $1.25x_1 + x_2 \leq 4.5$ não é uma desigualdade válida para X. $\Longrightarrow$ Os pontos $(3, 1)$ e $(4, 0)$ pertencem a X e não satisfazem a desigualdade.

Definição

Sejam $X \subseteq \mathbb{R}^m$ e $x^* \notin X$. Uma desigualdade válida para X não satisfeita por x^*, diz-se um *plano de corte*.

Exemplo

Seja $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : x_1 + x_2 \leq 4, x_1 + 2x_2 \geq 2, 2x_1 + x_2 \geq 2 \text{ e } x_1, x_2 \geq 0\}$. $\Longrightarrow$ Pontos cinzentos no gráfico.



A desigualdade $x_1 + x_2 \geq 1.5$ é um plano de corte para $x^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, que é a SO da relaxação linear do problema

$$\min\{3x_1 + 2x_2 : (x_1, x_2) \in X\}.$$

- Esta é a ideia geral do algoritmo de planos de corte de Gomory.

Algoritmo de planos de corte de Gomory

Seja

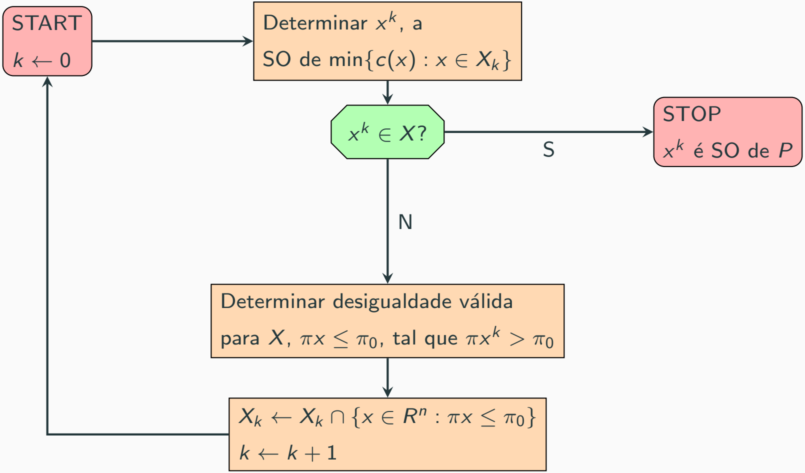
$$(P) \equiv \min\{c(x) : x \in X\},$$

com $X = \{x \in R^n : Ax \geq b$ e x_j inteiro, para $j \in J\}$ sendo J um subconjunto de $\{1, ..., n\}$.

Ideia geral: resolver uma sucessão de relaxações lineares até à solução obtida estar em X. Cada relaxação linear é obtida da anterior acrescentando-lhe planos de corte.

Algoritmo de planos de corte de Gomory

Seja $X_0 = \{x \in R^n : Ax \geq b\}$ (X sem as restrições de integralidade).



Algoritmo de planos de corte de Gomory

Como determinar planos de corte para a SO da relaxação linear?

- Procedimento de geração de cortes de Gomory, que é válido para qualquer PLIM

Procedimento de geração de cortes de Gomory

Seja

$$(P) \equiv z = \min\{c(x) : Ax \geq b,\ x \geq 0 \text{ e inteiros}\}.$$

Passo 1: Resolver a relaxação linear de P.

Passo 2: Escrever o sistema $Ax \geq b$ na forma aumentada.

Passo 3: Rescrever o sistema em função das VB da SO, isto é, $x_i + \sum_{j \in VNB} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i$ para toda a VB x_i.

Passo 4: O corte de Gomory é obtido através do seguinte procedimento:

$$x_i + \sum_{j \in VNB} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i \implies x_i + \sum_{j \in VNB} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leq \bar{b}_i \implies x_i + \sum_{j \in VNB} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor \bar{b}_i \rfloor$$

$$\implies \sum_{j \in VNB} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$$

Algoritmo de planos de corte de Gomory

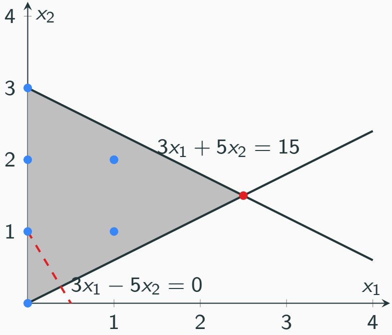
Definição

O *corte de Gomory* é $\sum_{j \in VNB} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$.

Exemplo

$$
\begin{aligned}
(P) \equiv \max z &= 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a:}\ \ & 3x_1 - 5x_2 \leq 0 \\
& 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}
$$

- Resolvendo a relaxação linear de P obtém-se $x^0 = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$.



Exemplo

- Escrevendo o sistema na forma aumentada obtemos:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$$

- A solução na forma aumentada é $x^0 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ e tem como VBs x_1 e x_2.

Exemplo

- Reescrevendo o sistema em função das VB obtemos:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{5}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ 3(\frac{5}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3) + 5x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} - \\ 5x_2 - x_3 + 5x_2 + x_4 = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{5}{3}(\frac{15}{10} + \frac{1}{10}x_3 - \frac{1}{10}x_4) - \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 - \frac{1}{10}x_3 + \frac{1}{10}x_4 = \frac{15}{10} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \\ x_2 - \frac{1}{10}x_3 + \frac{1}{10}x_4 = \frac{15}{10} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 = \frac{5}{2} \\ x_2 - \frac{1}{10}x_3 + \frac{1}{10}x_4 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Como ambos os $\bar{b}_i$ são fracionários podemos escolher qualquer restrição para gerar um corte de Gomory. $\Longrightarrow$ Vamos escolher a linha do x_1.

$$(\frac{1}{6} - 0)x_3 + (\frac{1}{6} - 0)x_4 \geq (\frac{5}{2} - 2) \iff \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \geq \frac{1}{2}$$

Exemplo

- Temos que escrever o corte $\frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \geq \frac{1}{2}$ em função de x_1 e x_2 para o conseguirmos representar no gráfico.
- Da forma aumentada de P tiramos que:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \iff x_3 = -3x_1 + 5x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15 \iff x_4 = 15 - 3x_1 - 5x_2 \end{cases}$$

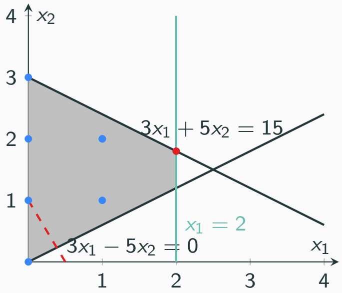
- Logo,

$$\frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \geq \frac{1}{2} \iff \frac{1}{6}(-3x_1 + 5x_2) + \frac{1}{6}(15 - 3x_1 - 5x_2) \geq \frac{1}{2}$$
$$\iff -\frac{3}{6}x_1 + \frac{5}{6}x_2 + \frac{15}{6} - \frac{3}{6}x_1 - \frac{5}{6}x_2 \geq \frac{1}{2} \iff -x_1 \geq -\frac{12}{6} \iff x_1 \leq 2$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
(P^1) \equiv \max z = 2x_1 + x_2 & \\
\text{s.a: } & 3x_1 - 5x_2 \leq 0 \\
& 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\
& x1 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}
$$

- Resolvendo a relaxação linear de P^1 obtém-se $x^1 = (2, \frac{9}{5})$.



Exemplo

- Escrevendo o sistema na forma aumentada obtemos:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15 \\ x_1 + x_5 = 2 \end{cases}$$

- A solução na forma aumentada é $x^1 = (2, \frac{9}{5}, 3, 0, 0)$ e tem como VBs x_1, x_2 e x_3.

Exemplo

- Reescrevendo o sistema em função das VB obtemos:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15 \\ x_1 + x_5 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} - \\ x_2 = 3 - \frac{3}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_4 \\ x_1 = 2 - x_5 \end{cases} \iff \begin{cases} - \\ x_2 = \frac{9}{5} + \frac{3}{5}x_5 - \frac{1}{5}x_4 \\ - \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3(2 - x_5) - 5(\frac{9}{5} + \frac{3}{5}x_5 - \frac{1}{5}x_4) + x_3 = 0 \\ - \\ - \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 + x_4 - 6x_5 = 3 \\ x_2 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{3}{5}x_5 = \frac{9}{5} \\ x_1 + x_5 = 2 \end{cases}$$

Vamos escolher a restrição associada a x_2 para gerar um corte de Gomory porque é a única com um $\bar{b}_i$ fracionário.

$$(\frac{1}{5} - 0)x_4 + (-\frac{3}{5} - (-1))x_5 \geq (\frac{9}{5} - 1) \iff \frac{1}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_5 \geq \frac{4}{5}$$

Exemplo

- Temos que escrever o corte $\frac{1}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_5 \geq \frac{4}{5}$ em função de x_1 e x_2 para o conseguirmos representar no gráfico.
- Da forma aumentada de P^1 tiramos que:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_4 = 15 \iff x_4 = 15 - 3x_1 - 5x_2 \\ x_1 + x_5 = 2 \iff x_5 = 2 - x_1 \end{cases}$$

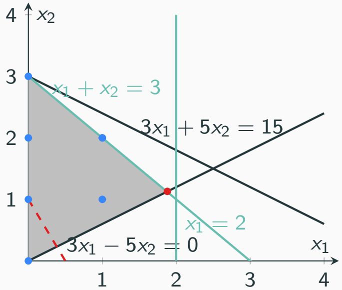
- Logo,

$$\frac{1}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_5 \geq \frac{4}{5} \iff \frac{1}{5}(15 - 3x_1 - 5x_2) + \frac{2}{5}(2 - x_1) \geq \frac{4}{5}$$
$$\iff x_1 + x_2 \leq 3$$

Exemplo

$$(P^2) \equiv \max z = 2x_1 + x_2$$
$$\text{s.a:}\ 3x_1 - 5x_2 \leq 0$$
$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$
$$x1 \leq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

- Resolvendo a relaxação linear de P^1 obtém-se $x^2 = (\frac{15}{8}, \frac{9}{8})$.



Exemplo

- Escrevendo o sistema na forma aumentada obtemos:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15 \\ x_1 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 3 \end{cases}$$

- A solução na forma aumentada é $x^2 = (\frac{15}{8}, \frac{9}{8}, 0, \frac{30}{8}, \frac{1}{8}, 0)$ e tem como VBs x_1, x_2, x_4 e x_5.

Exemplo

- Reescrevendo o sistema em função das VB obtemos:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15 \\ x_1 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 3 \end{cases} \iff \dots \iff \begin{cases} x_1 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{5}{8}x_6 = \frac{15}{8} \\ \frac{2}{8}x_3 + x_4 - \frac{30}{8}x_6 = \frac{30}{8} \\ -\frac{1}{8}x_3 + x_5 - \frac{5}{8}x_6 = \frac{1}{8} \\ x_2 - \frac{1}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_6 = \frac{9}{8} \end{cases}$$

Como todos os $\bar{b}_i$ são fracionários podemos escolher qualquer restrição para gerar um corte de Gomory. $\Longrightarrow$ Vamos escolher a linha do x_1.

$$(\frac{1}{8} - 0)x_3 + (\frac{5}{8} - 0)x_6 \geq (\frac{15}{8} - 1) \iff \frac{1}{8}x_3 + \frac{5}{8}x_6 \geq \frac{7}{8}$$

Exemplo

- Temos que escrever o corte $\frac{1}{8}x_3 + \frac{5}{8}x_6 \geq \frac{7}{8}$ em função de x_1 e x_2 para o conseguirmos representar no gráfico.
- Da forma aumentada de P^2 tiramos que:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \iff x_3 = -3x_1 + 5x_2 \\ x_1 + +x_2 + x_6 = 3 \iff x_6 = 3 - x_1 - x_2 \end{cases}$$

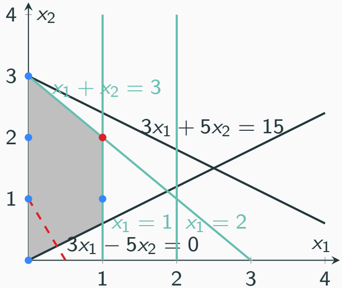
- Logo,

$$\frac{1}{8}x_3 + \frac{5}{8}x_6 \geq \frac{7}{8} \iff \frac{1}{8}(-3x_1 + 5x_2) + \frac{5}{8}(3 - x_1 - x_2) \geq \frac{7}{8}$$
$$\iff x_1 \leq 1$$

Exemplo

$$(P^3) \equiv \max z = 2x_1 + x_2$$
$$\text{s.a: } 3x_1 - 5x_2 \leq 0$$
$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$
$$x1 \leq 2,\ x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

- Resolvendo a relaxação linear de P^3 obtém-se $x^3 = (1, 2)$. Como x^3 é inteira é a SO de P. Logo, $z = 2 \times 1 + 2 = 4$. $\Longrightarrow$ *FIM.*



Técnicas de melhoria

- Para melhorar o desempenho dos algoritmos apresentados existem algumas técnicas que podemos adotar.

  - Pré-processamento.
    - Fixar variáveis e/ou melhorar limites superiores e inferiores de variáveis.
    - Remover restrições e/ou variáveis redundantes.
    - Melhorar coeficientes/termos independentes de restrições.

  - Adição de desigualdades válidas.
    - Juntar restrições que são redundantes para P mas que melhoram o valor da relaxação linear.

Pré-processamento

- Ideia geral: simplificar a formulação inicial.

- Algumas das técnicas utilizadas são:
  - Fixação de variáveis.
  - Eliminação de restrições redundantes.
  - "Fortelecer" restrições de forma a reduzir a RA do PLR.

- As técnicas utilizadas não podem cortar soluções admissíveis para o problema.

- Os softwares que resolvem problemas de PLIM aplicam algumas destas técnicas.

Pré-processamento

- Fixação de variáveis
  - É possível fixar o valor de algumas variáveis observando apenas as restrições do modelo.

- Exemplos:

Considere-se x_1, x_2 e x_3 variáveis binárias. $\implies x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3.$

1. $3x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \implies x_1 = 0$
2. $x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 2 \implies x_3 = 0$
3. $5x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 2 \implies x_1 = 0$
4. $x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2 \implies x_2 = 1$
5. $3x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 2 \implies x_3 = 0$ e $x_1 = 1$

- Ao fixarmos o valor de uma variável devemos substituí-la na formulação.

Pré-processamento

- Remoção de restrições redundantes

Definição

Considere-se $\pi x \leq \pi_0$ e $\mu x \leq \mu_0$ duas desigualdades válidas para X. Dizemos que $\pi x \leq \pi_0$ *domina* $\mu x \leq \mu_0$ se existe uma constante $u \in \mathbb{R}$ tal que $\pi \geq u\mu$, $\pi_0 \leq u\mu_0$ e $(\pi, \pi_0) \neq (u\mu, u\mu_0)$.

Definição

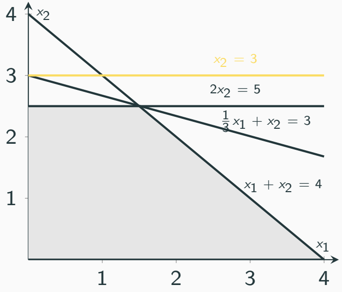
Uma desigualdade válida $\pi x \leq \pi_0$ é *redundante* para X se existem $k \geq 2$ restrições de P da forma $\mu^i x \leq \mu_0^i$ e pesos $u_i \geq 0$ com $i = 0, \ldots, k$ tais que $(\sum_{i=1}^k u_i \mu^i)x \leq \sum_{i=1}^k u_i \mu_0^i$ domina $\pi x \leq \pi_0$.

- Uma restrição redundante não é necessária para o modelo, podendo ser removida.

Exemplo

Seja

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 \leq 5,\ \frac{1}{3}x1 + x_2 \leq 3,\ x_1 + x_2 \leq 4 \text{ e } x_1, x_2 \geq 0\}.$$



- A desigualdade $x_2 \leq 3$ é dominada por $2x_2 \leq 5 \iff x_2 \leq \frac{5}{2}$, pois o lado esquerdo é igual e $\frac{5}{2} < 3$.
- A desigualdade $(1/3)x1 + x_2 \leq 3$ é redundante para X pois pode ser obtida como uma combinação linear de $2x_1 \leq 5$ e $x_1 + x_2 \leq 4$, isto é,

$$(1/3)(2x_1 \leq 5) + (1/3)(x_1 + x_2 \leq 4) \iff (1/3)x_1 + x_2 \leq 3$$

  - O conjunto X é o mesmo sem a restrição $(1/3)x_1 + x_2 \leq 3$.

Pré-processamento

- Fortalecimento de restrições
  - Em certos casos, é possível apenas por inspeção tornar as restrições mais fortes.
  - Existem algoritmos para tornar mais fortes restrições com variáveis binárias.
- Exemplos (por inspeção):

Sejam x_1 e x_2 variáveis inteiras não negativas e y_1 e y_2 variáveis binárias.

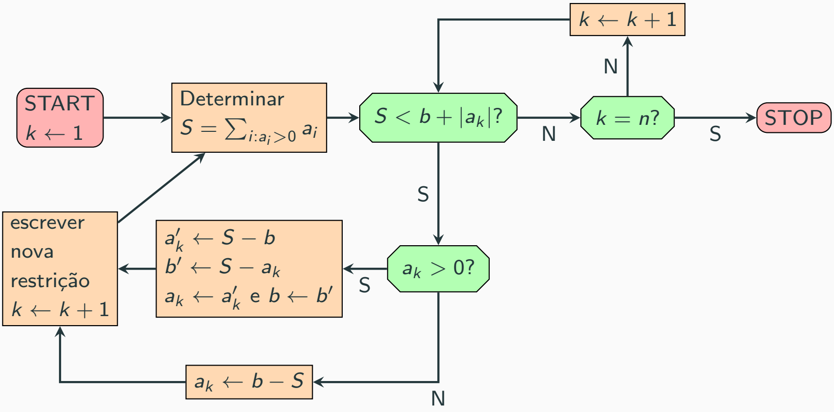
1. $x_1 + x_2 \leq 2.5 \implies x_1 + x_2 \leq 2$
2. $4y_1 + 3y_2 \leq 4 \implies y_1 + y_2 \leq 1$
3. $x_1 \leq 3$ e $x_1 \leq My_1$, com M suficientemente grande $\implies$ $x_1 \leq 3$ e $x_1 \leq 3y_1$

Pré-processamento

- Fortalecimento de restrições
- Algoritmo para fortalecer restrições com variáveis binárias

Considere-se uma restrição de $\leq$ com variáveis binárias, isto é,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \leq b, \; x_i \in \{0,1\}, i = 1 \ldots n.$$



Exemplo

- Fortalecer a restrição $4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 5$, com $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, 3, 4$.
- k = 1
  - S = 4 + 1 + 2 = 7
  - $S = 7 < b + |a_1| = 5 + 5 = 9$? Sim.
    - $a_1 = 4 > 0$? Sim.
    - $a_1' \leftarrow 7 - 5 = 2$, $b' \leftarrow 7 - 4 = 3$
    - Nova restrição: $2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3$
- k = 3
  - S = 2 + 1 + 2 = 5
  - $S = 5 < b + |a_3| = 3 + 1 = 4$? Não.
  - 3 = 4? Não.
- k = 2
  - S = 2 + 1 + 2 = 5
  - $S = 5 < b + |a_2| = 3 + 3 = 6$? Sim.
    - $a_2 = -3 > 0$? Não.
    - $a_2 \leftarrow 3 - 5 = -2$
    - Nova restrição: $2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3$
- k = 4
  - S = 2 + 1 + 2 = 5
  - $S = 5 < b + |a_4| = 3 + 2 = 5$? Não.
  - 4 = 4? Sim. FIM.

- A restrição fortalecida é $2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_5 \leq 3$.

Adição de desigualdades válidas

- Uma forma de tornar os algoritmos apresentados mais eficientes é "aproximando" a RA do PLR com o invólucro convexo do problema original. $\Longrightarrow$ Feito através da adição de desigualdades válidas, que cortem soluções fracionárias.

- Existem várias formas de obter desigualdades válidas para um problema.
  - Algoritmos de geração de desigualdades válidas. $\Longrightarrow$ Algoritmo de Chavátal-Gomory.
  - Desigualdades válidas baseadas nas especificidades do problema. $\Longrightarrow$ Famílias de desigualdades válidas.
    - Por exemplo, desigualdades de cobertura para o problema do saco-mochila.

Adição de desigualdades válidas

Considere-se o caso geral do problema do saco-mochila

$$\max\{c(x) : x \in X\},$$

com

$$X = \{x \in \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b\}.$$

Definição

Uma *cobertura* é um subconjunto de artigos $S \subseteq N$ que não cabem todos na mochila, isto é,

$$\sum_{i \in S} a_i > b.$$

Definição

Sendo S uma cobertura, uma desigualdade válida - *desigualdade cobertura* - para o problema do saco-mochila é

$$\sum_{i \in S} x_i \leq |S| - 1.$$

Exemplo

$$\begin{aligned} \max z &= 32x_1 + 20x_2 + 19x_3 + 13x_4 + 11x_5 + 8x_6 \\ \text{s.a: } & 12x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 3x_6 \leq 14 \\ & x_i \in \{0,1\}, \ i = 1, \ldots, 6 \end{aligned}$$

- Resolvendo (Solver) a relaxação linear do problema apresentado obtemos $z^{PLR} = 37.(6)$. $\Longrightarrow$ Quando temos variáveis binárias é necessário adicionar as restrições $x_i \leq 1$ à relaxação linear.

- Desigualdades de cobertura para a instância apresentada são, por exemplo:

1. $x_1 + x_2 \leq 1$
2. $x_1 + x_3 \leq 1$
3. $x_1 + x_6 \leq 1$
4. $x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$
5. $x_2 + x_3 \leq 1$ $\Longrightarrow$ Domina a desigualdade 4.

Adicionando estas desigualdades válidas à relaxação linear obtemos $z^{PLR^+} = 37.4$.

Notas sobre técnicas de melhoria

- Apesar de alguns softwares aplicarem técnicas de pré-processamento, devemos tentar sempre dar ao software uma formulação o mais "simplicada" possível. $\Longrightarrow$ Temos conhecimento sobre o nosso problema que o solver não tem.
- Uma técnica não abordada neste capítulo são as restrições de quebra de simetria.

Referências bibliográficas

Hillier, F. S. & Lieberman, G. J. (2021). *Introduction to Operations Research* Mc Graw-Hill, New York, USA, 11th edition.

Wolsey, L. A. (1998). *Integer programming*. John Wiley & Sons