Estatística II

Licenciatura em Gestão
2.º Ano/1.º Semestre
2023/2024

Aulas Teóricas N.ºs 3 e 4 (Semana 2)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teóricas (Semanas 1 a 5)	Aulas Teóricas (Semanas 5 a 7)	Aulas Teóricas (Semanas 7 a 9)	Aulas Teóricas (Semanas 10 a 13)
• **Capítulo 1**: Estimação	• **Capítulo 2**: Testes de Hipóteses	• **Capítulo 3**: Modelo de Regressão Linear	• **Capítulo 4**: Complementos ao Modelo de Regressão Linear

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

1. Estimação

a. Introdução
b. Métodos dos momentos
c. Método da máxima verosimilhança
d. Propriedade dos estimadores por pontos
e. Estimação por intervalos para populações normais
f. Estimação por intervalos para populações não normais (grandes amostras)

2ª semana (26/9 e 28/9)

T03 - Estimação - Método da Máxima Verosimilhança

Introdução. Apresentação do método. Exemplos

T04 - Propriedades dos Estimadores

Introdução. Estimadores centrados. Estimadores eficientes (introdução). Exemplos

Método da Máxima Verosimilhança

Estimadores

1

Métodos de Estimação

Até aqui falámos em estimadores e nas propriedades que devem possuir. Interessa ter procedimentos que construam estimadores com boas propriedades.

Vamos então falar dos principais métodos de estimação paramétrica.

Dos **métodos de estimação paramétrica** vamos referir:

o Método dos momentos e
o Método da Máxima verosimilhança

modulol_aula3_4_Estimação.pdf

Função de Verosimilhança

Seja X uma v.a. cuja distribuição depende de um parâmetro θ, desconhecido, e $(X_1, ..., X_n)$ uma amostra aleatória. Seja $(x_1, ..., x_n)$ a amostra observada.

Definição

Chama-se **verosimilhança da amostra** e representa-se por $\mathcal{L}(\theta | x_1, x_2, ..., x_n)$ a

$$f(x_1, ..., x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) \qquad \text{caso contínuo}$$

$$P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i|\theta) \quad \text{caso discreto}$$

modulol_aula3_4_Estimação.pdf

Método da Máxima Verosimilhança

O método da máxima verosimilhança, proposto por Fisher em 1922 e desenvolvido em 1925 consiste em escolher como estimativa de θ o valor que **maximiza a verosimilhança** $\mathcal{L}(\theta|\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$, face a uma amostra observada $(x_1, \ldots, x_n)$.

moduloI_aula3_4_Estimação.pdf

Função de Log-Verosimilhança

Em muitas situações as funções de verosimilhança satisfazem condições que permitem que o valor para o qual a versomilhança é máxima seja obtido por derivação.

Porém, e como a função logarítimca é monótona, regra geral é mais cómodo trabalhar com a função **log-verosimilhança**,

$$\log \mathcal{L}(\theta|\underline{x})$$

modulol_aula3_4_Estimação.pdf

Método da Máxima Verosimilhança (MMV)

Então, no caso de existirem derivadas (e para um único parâmetro θ), o valor do maximizante é obtido de modo que:

$$\frac{d \log \mathcal{L}}{d\theta} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2 \log \mathcal{L}}{d\theta^2} < 0$$

Note-se que $\quad \dfrac{d \log \mathcal{L}}{d\theta} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{d \log f(x_i|\theta)}{d\theta}$

A solução, $\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ é **a estimativa de máxima verosimilhança,** que é uma realização da v.a. $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(X_1, \ldots, X_n)$.

modulol_aula3_4_Estimação.pdf

MMV: Exemplo 1

Considere-se $X \cap P(\lambda)$ e a amostra (0, 0, 2, 5, 3, 1). Determine uma estimativa de máxima verosimilhança de λ?

MMV: Exemplo 1

Exemplo $X \sim Poi(\lambda)$

$(0, 0, 2, 5, 3, 1)$

emv(λ) [estimativa de máxima verosi-

milhança de λ com base nesta amostra)

Passo 1: $\mathcal{L}(\lambda; 0, 0, 2, 5, 3, 1) =$

$$= \prod_{i=1}^{6} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!} = \left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}\right]\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}\right]\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}\right]$$

$$\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^5}{5!}\right]\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^3}{3!}\right]\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!}\right]$$

$$= e^{-6\lambda} \frac{\lambda^{11}}{2!\,5!\,3!\,1!} \equiv g(\lambda)$$

Slides Professora Claúdia Nunes

MMV: Exemplo 1

Passo 2 $\quad g'(\lambda) = \dfrac{-6\, e^{-6\lambda} \lambda^{11} + 11\, e^{-6\lambda} \lambda^{10}}{2!\,3!\,5!\,1!}$

$= 0 \Leftrightarrow -6\lambda + 11 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{11}{6}$

$g''(\lambda) = 36\, e^{-6\lambda} \cdots \Big|_{\lambda = \frac{11}{6}} < 0$

$emv(\lambda) = \dfrac{11}{6}$

Passo 2*: Em vez de $\max_{\lambda}$ $g(\lambda)$

vamos $\max_{\lambda}$ $\log g(\lambda)$

$g(\lambda) = \dfrac{e^{-6\lambda} \lambda^{11}}{0!\,2!\,5!\,3!\,1!}$

$\ln g(\lambda) = -6\lambda + 11 \log \lambda - \log(\ \ )$

$[\ln g(\lambda)]' = -6 + \dfrac{11}{\lambda}$

$[\ln g(\lambda)]'' = -\dfrac{11}{\lambda^2} < 0, \forall \lambda$

emv: $-6 + \dfrac{11}{\hat{\lambda}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\hat{\lambda} = \dfrac{11}{6}}$

1. $y = u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1}u'$;
2. $y = c \Rightarrow y' = 0$, onde k é uma constante real;
3. $y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$
4. $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
5. $y = a^u \Rightarrow y' = a^u(\ln a)u', (a > 0, a \neq 1)$
6. $y = e^u \Rightarrow y' = e^u u'$
7. $y = \log_a u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u} \log_a e$
8. $y = \ln u \Rightarrow y' = \dfrac{1}{u} u'$
9. $y = u^v \Rightarrow y' = vu^{v-1}u' + u^v(\ln u)v'$
10. $y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$
11. $y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$
12. $y = \tan u \Rightarrow y' = u' \sec^2 u$, desde que $x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$;
13. $y = \cot u \Rightarrow y' = -u' \csc^2 u$, desde que $x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$;

Slides Professora Claúdia Nunes

A Mais Completa Tabela de Derivadas e Integrais (matematicasimplificada.com)

MMV: Exemplo 2

Considere-se a v.a. $X \cap Exp(\mu)$ e a amostra (1.2, 0.5, 3).
Determine uma estimativa de máxima verosimilhança de μ?

MMV: Exemplo 2

Exemplo 2 : $X \sim Exp(\mu)$ $\quad f_X(x) = \mu e^{-\mu x}, \ x \geq 0$

amostra: (1.2; 0.5; 3)

$$\text{emv}(\mu) = \hat{\mu} = \frac{3}{1.2+0.5+3}$$

Como X é v.c. contínua:

- $$\mathcal{L}(\mu; x_1, x_2, x_3) = \prod_{i=1}^{3} \mu e^{-\mu x_i} =$$
$$= \mu^3 e^{-\mu \sum x_i} = \mu^3 e^{-\mu(1.2+0.5+3)}$$

- $$\ln \mathcal{L}(\mu) = 3 \ln \mu - 4.7 \mu$$
$$[\ln \mathcal{L}(\mu)]' = \frac{3}{\mu} - 4.7 = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{4.7}$$
$$[\ln \mathcal{L}(\mu)]'' = -\frac{3}{\mu^2} < 0, \ \forall \mu$$

$$\Rightarrow \text{e.m.v.}(\mu) = \hat{\mu} = \frac{3}{4.7}$$

Slides Professora Claúdia Nunes

Propriedade Fundamental dos EMV: Invariância

Propriedade fundamental dos EMV : Invariância

$$EMV(h(\theta)) = h(EMV(\theta))$$

exemplo :

$$EMV(\lambda) = \bar{X}$$

$$EMV(\ln \lambda) = \ln(EMV(\lambda)) = \ln \bar{X}$$

Slides Professora Claúdia Nunes

Método da Máxima Verosimilhança: Exercícios

2

Estimadores

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

3. Considere uma população com distribuição de Bernoulli, com parâmetro p, com $0 < p < 1$.
   a) Derive o estimador de máxima verosimilhança para o parâmetro p.
   b) Foi obtida uma amostra de dimensão $n = 3$, cujos valores observados foram (1, 1, 0).
      i. Esboce o gráfico da função de verosimilhança e interprete-o.
      ii. Forneça uma estimativa para p com base no método da máxima verosimilhança.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 2 a): Estimação de Máxima Verosimilhança

a) Função de probabilidade (f. p.):

$$f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x}, \qquad x = 0, 1, \text{com } 0 < p < 1.$$

Função de verosimilhança:

$$\mathcal{L}(p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Logaritmo da função de verosimilhança:

$$\ln(\mathcal{L}(p)) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln(1-p).$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 2 a): Estimação de Máxima Verosimilhança

Condição de 1ª ordem:

$$\frac{\partial \ln(\mathcal{L}(p))}{\partial p} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{1}{p}\right) + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\frac{-1}{1-p}\right) = 0 \Leftrightarrow (1-p)\sum_{i=1}^{n} x_i - p\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - pn = 0 \Leftrightarrow p = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}.$$

Condição de 2ª ordem:

$$\frac{\partial^2 \ln L(p\,;x)}{\partial p^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p^2} + \frac{(n - \sum_{i=1}^{n} x_i)(-1)}{(1-p)^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p^2} - \frac{(n - \sum_{i=1}^{n} x_i)}{(1-p)^2} < 0,$$

pois $x_i \geq 0, p^2 > 0, n > 0, (1-p)^2 > 0$ e $n \geq \sum_{i=1}^{n} x_i$ pois $x_i = 0$ ou 1.
Portanto, o estimador de máxima verosimilhança é:

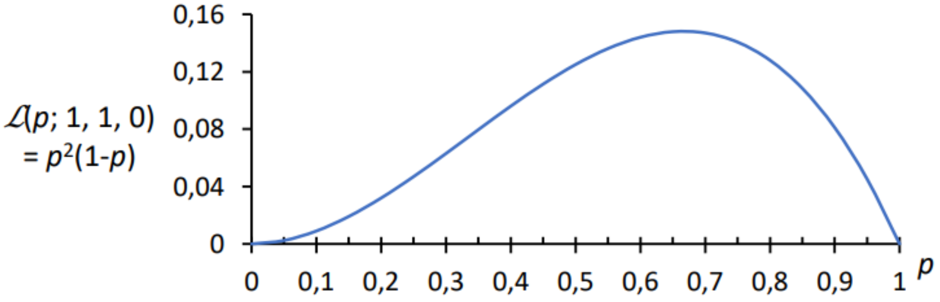
$$\hat{p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 2 b) i e ii: Estimação de Máxima Verosimilhança

b) i) Substituindo em $\mathcal{L}(p)$, (x_1, x_2, x_3) pelos valores observados na amostra, $(1, 1, 0)$, obtemos,

$$\mathcal{L}(p) = p^2(1-p).$$



A função de verosimilhança atinge o seu valor máximo quando o p se situa perto de 0,65, sendo este o valor de p mais provável que deu origem à observação desta amostra.

ii) $\hat{p} = \frac{2}{3} = 0{,}6667$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

2. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a. a. de uma distribuição Normal, $X \sim N(\mu;\ \sigma)$. Estime os parâmetros μ e σ pelo método:

b) Da máxima verosimilhança.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 2: Estimação de Máxima Verosimilhança

b) Função densidade de probabilidade (f. d. p.):

$$f(x;\ \mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \qquad -\infty < \mu < +\infty, \qquad \sigma > 0.$$

Função de verosimilhança:

$$\mathcal{L}(\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i\,;\mu\,,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma^2}\right)^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}.$$

Logaritmo da função de verosimilhança:

$$\ln\left(\mathcal{L}(\mu,\sigma^2)\right) = -\frac{n}{2}\left(\ln(2) + \ln(\pi) + \ln(\sigma^2)\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 2: Estimação de Máxima Verosimilhança

Condições de 1ª ordem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L\,(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \ln L\,(\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sigma^2}\left(-2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i + 2n\mu\right) = 0 \\[2ex] -\dfrac{n}{2}\dfrac{1}{\sigma^2} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\,\dfrac{2}{4\sigma^4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \\[2ex] -n\sigma^2 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n} \\[2ex] \sigma^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \overline{x} \\[2ex] \sigma^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\overline{x})}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \overline{x} \\[2ex] \sigma^2 = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)s^2 \end{cases}$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 2: Estimação de Máxima Verosimilhança

Condições de 2ª ordem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu^2} = -\dfrac{1}{2\sigma^2} 2n < 0 \\ \dfrac{\partial^2 \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma^4} = \dfrac{n}{2}\dfrac{1}{\sigma^4} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^6} < 0 \end{cases},$$

pois $n > 0, \sigma^2 > 0, \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^6} > \frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^4}$.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 2: Estimação de Máxima Verosimilhança

Portanto, os estimadores de máxima verosimilhança obtidos foram:

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \\ \hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n} = \frac{n-1}{n} S^2 \end{cases}.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Propriedades dos Estimadores

3

Estimador Centrado, Consistente e Eficiente

Principais Propriedades dos Estimadores

Principais propriedades desejáveis nos estimadores:

- *Não enviesamento* – em termos médios, o estimador atinge o valor real do parâmetro;
- *Eficiência* – o estimador é mais eficiente quanto menor for a sua variância;
-
- *Consistência* – para n grande, o estimador deve ser aproximadamente igual ao parâmetro.

Estimador Centrado ou não Enviesado

Definição: Um estimador $\hat{\theta}$ diz-se **não enviesado** ou **centrado** do parâmetro θ se:

$$E(\hat{\theta}) = \theta.$$

Definição: Seja $\hat{\theta}$ um estimador do parâmetro θ. O **enviesamento** (Env) de $\hat{\theta}$ é dado por:

$$Env(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta.$$

Viés ou Bias

ProbabilidadesEstatistica2019.pdf

Estimador Eficiente

Definição: Sejam $\hat{\theta}$ e $\tilde{\theta}$ dois estimadores centrados do parâmetro θ, baseados no mesmo número de observações. Então:

- $\hat{\theta}$ diz-se **mais eficiente** do que $\tilde{\theta}$ se: $Var(\hat{\theta}) < Var(\tilde{\theta})$
- A **eficiência relativa** do primeiro estimador relativamente ao segundo é dada por:

$$\text{Eficiência relativa} = \frac{Var(\hat{\theta})}{Var(\tilde{\theta})}.$$

$\hat{\theta}$ é um estimador eficiente de θ se ele satisfizer as seguintes condições: (i) $\hat{\theta}$ é não viesado; (ii) $Var(\hat{\theta}) \leq Var(\tilde{\theta})$, onde $\tilde{\theta}$ é qualquer outro estimador não viesado de θ.

Para comparar dois estimadores enviesados utiliza-se o critério do erro quadrático médio.

Microsoft Word - PROPRIEDADES DOS ESTIMADORES.docx (usp.br)

Definição: Seja $\hat{\theta}$ um estimador do parâmetro θ. O **erro quadrático médio** (EQM) de $\hat{\theta}$ é dado por:

$$EQM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + \left(Env(\hat{\theta})\right)^2.$$

Observação: Se $\hat{\theta}$ um estimador centrado para o parâmetro θ, então $Env(\hat{\theta}) = 0$ e, por conseguinte, $EQM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta})$.

estimador viesado jamais será eficiente, por menor que seja o viés.

Microsoft Word - PROPRIEDADES DOS ESTIMADORES.docx (usp.br)

Definição: Sejam $\hat{\theta}$ e $\tilde{\theta}$ dois estimadores. Diz-se que $\hat{\theta}$ é "melhor" que $\tilde{\theta}$ se:

$$EQM(\hat{\theta}) < EQM(\tilde{\theta}).$$

ProbabilidadesEstatistica2019.pdf

Erro Quadrático Médio (EQM)

3. Erro quadrático médio

Chama-se erro quadrático médio do estimador $\mathbf{\Theta^*}$ a $\boldsymbol{EQM(\Theta^*) = E\left[(\Theta^* - \theta)^2\right]}$.

Esta propriedade é um dos critérios mais usados para comparar estimadores.

É muito fácil mostrar que

$$EQM(\Theta^*) = Var[\Theta^*] + [b_\theta(\Theta^*)]^2$$

Se Θ^* é um estimador centrado de um parâmetro então o erro quadrático médio $\equiv$ variância, i.e.

$$E\left[(\Theta^* - \theta)^2\right] = Var(\Theta^*)$$

moduloI_aula3_4_Estimação.pdf

Exatidão vs Precisão

O termo exactidão (accuracy) refere-se à proximidade de uma medição ou estimativa ao verdadeiro valor.
O termo precisão ou variância (precision) refere-se ao “grau de concordância numa sucessão de medições”.

moduloI_aula3_4_Estimação.pdf

Eficiência Relativa vs Eficiência Absoluta

Observações:

- A eficiência exige a existência de momentos de segunda ordem dos estimadores.
- A definição de eficiência apresenta dois conceitos diferentes:
  - O primeiro estabelece uma relação entre dois estimadores centrados para θ, sendo portanto uma eficiência ***relativa***.
  - O segundo é um conceito de eficiência ***absoluta*** na classe dos estimadores centrados para θ.
- Para obter estimadores mais eficientes recorre-se à **desigualdade de Fréchet-Cramér-Rao**.

Teorema 7.1 – Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra casual de população com função densidade (função probabilidade) $f(x \mid \theta)$, *satisfazendo certas condições de regularidade*, e seja $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ um estimador centrado de θ. Então,

$$\mathrm{Var}(T) \geq \frac{1}{n\Im(\theta)},$$

onde,

$$\Im(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(X \mid \theta)}{\partial \theta}\right]^2\right\} = -E\left\{\left[\frac{\partial^2 \ln f(X \mid \theta)}{\partial \theta^2}\right]\right\} \text{ (quantidade de informação de Fisher)}$$

Slides Andrade e Silva

Estimador Centrado de Variância Mínima

Conhecido o limite inferior dado pela desigualdade de Fréchet-Cramér-Rao, compara-se a variância do estimador centrado em análise com este limite:

- caso sejam iguais → não existe nenhum outro estimador centrado de variância inferior sendo o estimador em análise o mais eficiente;
- caso contrário → o quociente, $\left[n\Im(\theta)\right]^{-1} / \mathrm{Var}(T)$, fornece uma indicação sobre a eficiência relativa do estimador T face ao hipotético estimador de variância igual ao limite inferior da desigualdade.

Slides Andrade e Silva

Estimador Convergente ou Consistente

Definição: Um estimador $\hat{\theta}$ diz-se **consistente** quando para qualquer valor positivo δ, se verifica a condição:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[|\hat{\theta} - \theta| < \delta\right] = 1.$$

Teorema: As condições:

- $\lim_{n\to+\infty} E(\hat{\theta}) = \theta;$
- $\lim_{n\to+\infty} Var(\hat{\theta}) = 0.$

são suficientes para que $\hat{\theta}$ seja estimador **consistente**.

ProbabilidadesEstatistica2019.pdf

Estimador dos Momentos vs EMV

Propriedades dos estimadores obtidos pelo método dos momentos

- Em condições bastante gerais, são consistentes e possuem distribuição aproximadamente normal quando a dimensão da amostra é muito grande (distribuição assintótica).

Propriedades dos estimadores obtidos pelo método da máxima verosimilhança

- Os estimadores de máxima verosimilhança não são necessariamente centrados.
- Em condições muito gerais eles são consistentes.
- Demonstra-se que, se existir estimador mais eficiente (na óptica do teorema de Fréchet-Cramér-Rao) ele é solução única da equação $dL/d\theta = 0$ e portanto estimador de máxima verosimilhança.
- Verificadas certas condições de regularidade, os estimadores da máxima verosimilhança seguem assintoticamente uma distribuição normal. Caso haja apenas 1 parâmetro desconhecido, tem-se

$$\sqrt{n\Im(\theta)}(\hat{\theta} - \theta) \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

Slides Andrade e Silva

Obrigada!

Questões?