Estatística I

Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)

2.º Ano/1.º Semestre

2023/2024

Aulas Teórico-Práticas N.ºs 3 e 4 (Semana 2)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas TP (Semanas 1 e 3)	Aulas TP (Semanas 3 a 6)	Aulas TP (Semanas 7 a 9)	Aulas TP (Semanas 10 a 12)
• **Capítulo 1**: Análise Descritiva • **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	• **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Variáveis Aleatórias Especiais

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

1. Introdução à Estatística

1.1. Estatística Descritiva

2. Probabilidades

2.1. Introdução

2.2. Experiência aleatória. Espaço de resultados. Acontecimentos

2.3. Medida de probabilidade. Axiomática de Kolmogorov

2.4. Interpretações do conceito de probabilidade

2.5. Probabilidade condicionada.

2.6. Teorema da probabilidade total e teorema de Bayes

2.7. Acontecimentos independentes

1

Conceitos Básicos de Probabilidade

Noção de Probabilidade, Probabilidade da União, Probabilidade da Interseção e Probabilidade da Diferença

É possível saber a chance/possibilidade de algo acontecer?

Imagem: Webmaster-chx / Creative Commons paternité – partage à l'identique 3.0 (non transposée)

Noção de Probabilidade

Sim, é possível medir a chance/possibilidade de algo acontecer. Essa medida é chamada de PROBABILIDADE!

PROBABILIDADE (proporção ou percentagem) mede a possibilidade de ocorrência de um evento ou acontecimento.

Definições de Probabilidade

Definição frequencista de probabilidade

- Probabilidade de um acontecimento *A* é o valor para que tende a frequência relativa desse acontecimento quando o número de repetições da experiência aleatória é elevado, e representa-se por

$$P(A) \sim \text{frequência(A)}$$

Definição clássica de probabilidade (Lei de Laplace)

- Probabilidade de um acontecimento *A* é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Então, a probabilidade de *A* é dada por

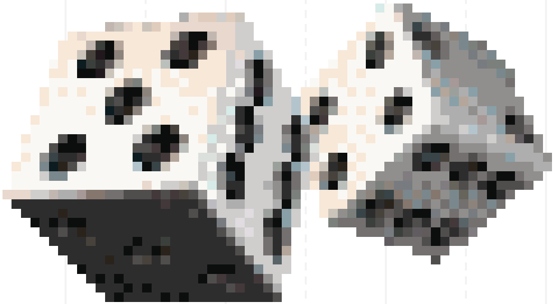
$$P(A) = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos favoráveis}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos possíveis}} = \frac{m}{n}$$

Nota: Aplica-se a definição clássica de probabilidade se os acontecimentos possíveis são equiprováveis, ou seja, ocorrem com a mesma probabilidade. Utiliza-se a definição frequencista de probabilidade caso os acontecimentos sejam equiprováveis ou não.

$P(A)$ é um número entre 0 e 1 ou 0% e 100%.

Tipos de Probabilidades

- Probabilidade simples;
- Probabilidade complementar;
- Probabilidade da união ou reunião;
- Probabilidade da interseção ou conjunta;
- Probabilidade da diferença;
- Probabilidade condicional.



Baseada em https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Simples: Exemplo

Exame com 15 questões com 4 alternativas. Qual é a probabilidade de um aluno acertar todas as questões ao acaso?

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Simples: Exemplo

É fácil acertar em 15 questões, ao acaso, no exame?

$$\boldsymbol{P(15) = \frac{1}{4^{15}} = 9{,}31323E{-}10}$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Complementar

– Probabilidade de um determinado evento A **não** ocorrer.

– Denota-se por P^c , $P(Ac)$ ou $P(\bar{A})$

– $A^c = \Omega - A$.

Probabilidade da diferença

– $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Complementar: Exemplo

No lançamento simultâneo de dois dados, qual é a probabilidade de não sair a soma 4?

$$
\begin{aligned}
P(\text{não sair a soma } 4) &= 1 - P(\text{sair a soma } 4) \\
&= 1 - 3/(6 \times 6) = 11/12 \\
&= 0{,}92 = 92\%
\end{aligned}
$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Axiomática de Probabilidade

- $0 \leq P(A) \leq 1, \;\; \forall A \in$ Espaço dos acontecimentos

- $P(\Omega) = 1$

- $P(\{\}) = 0$

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ e $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

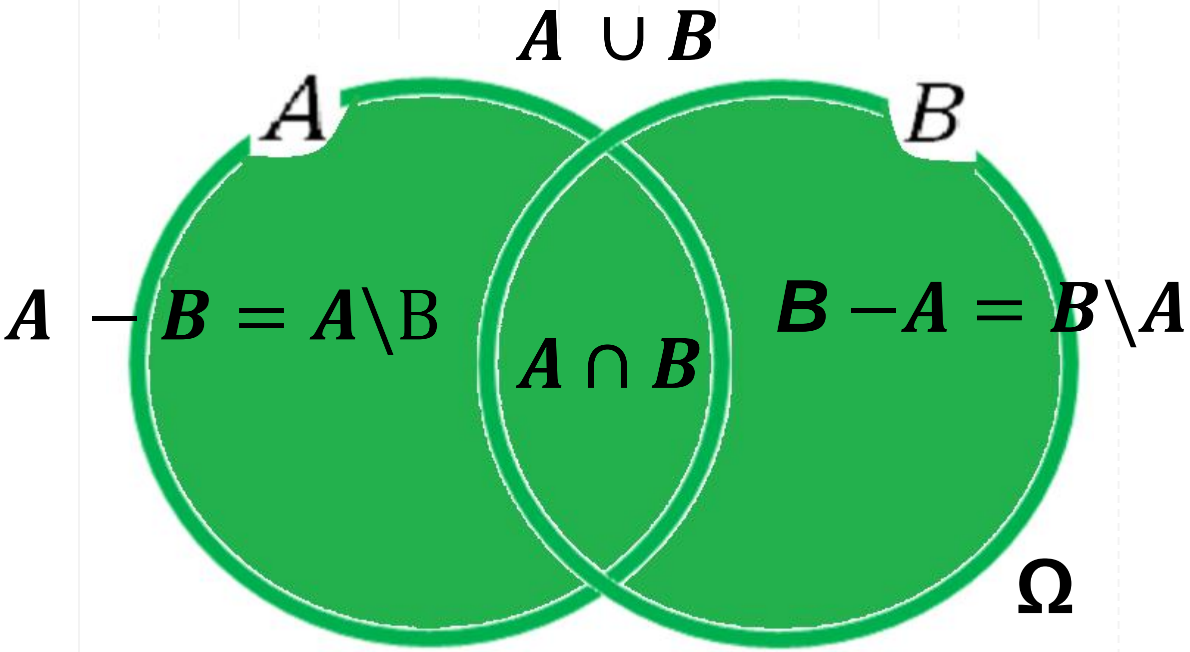
- Se $A \subseteq B$ (Se a realização do acontecimento B implica a realização do acontecimento A), então $P(A) \leq P(B)$

Probabilidade da diferença: P(A-B) = P(A/B) e P(B-A) = P(B/A)

- $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$

<u>**Nota**</u>: A abordagem frequencista e a definição clássica de probabilidade respeitam esta axiomática (axiomática de Kolmogorov - caso finito).

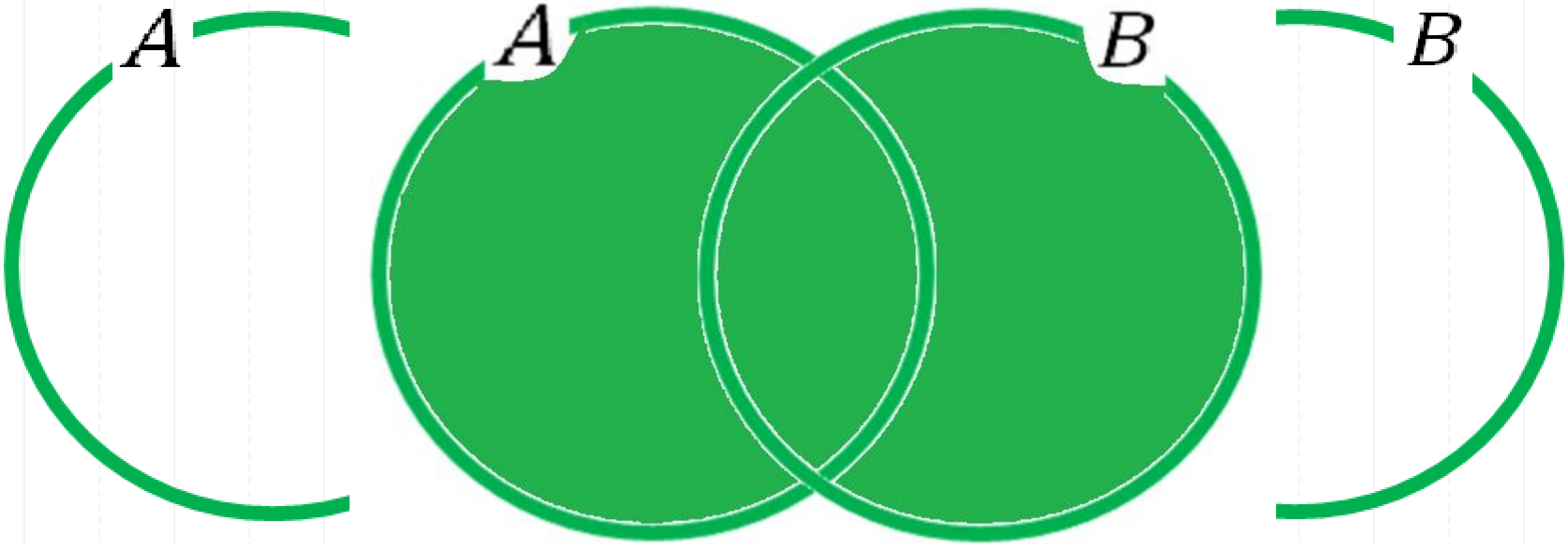
Diagrama de Venn



Baseado em https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade da União/Reunião

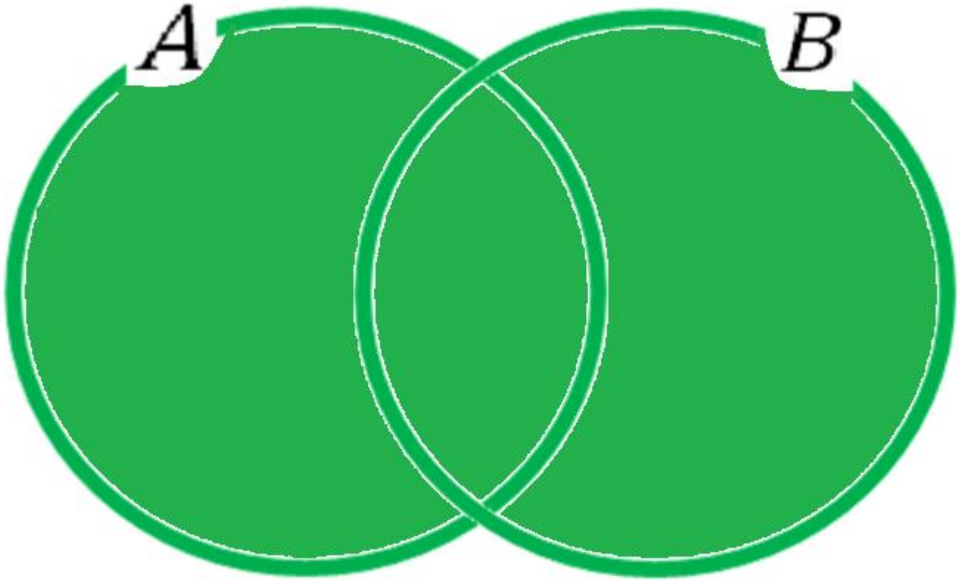
$$A \cup B$$



https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade da União/Reunião

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$



https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade da União: Exemplo

Numa comunidade de 1000 habitantes, 400 são sócios do clube *A*, 300 do clube *B* e 200 de ambos. Qual é a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ser sócia de *A* ou de *B*?

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = \mathrm{P(A) + P(B) - P(A \cap} B)}$$
$$\mathbf{= (400\text{+}300\text{-}200)/1000 = 0{,}5 = 50\%}$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Axiomática de Probabilidade

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \; \forall A, B \in$ Espaço dos acontecimentos (Probabilidade da reunião de acontecimentos)

Os **acontecimentos disjuntos**, mutuamente exclusivos ou incompatíveis não têm elementos comuns.

  - Sejam <u>A e B dois acontecimentos mutuamente exclusivos ou incompatíveis</u>, definidos em Ω, ou seja, $A \cap B = \varnothing$, então tem-se
    $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,
    caso contrário $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

    Escrito de outra forma: $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,
    $A, B \in$ Espaço dos acontecimentos

- Regra de Inclusão-exclusão:
  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$

<u>**Nota**</u>: A abordagem frequencista e a definição clássica de probabilidade respeitam esta axiomática (axiomática de Kolmogorov - caso finito).

Probabilidade da Interseção: Independência

Quando os resultados do evento A não interferirem e nem influenciaram os resultados do evento B.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade da Interseção: Independência

Definição 1.6 (Acontecimentos independentes). $A, B \subset \Omega$ *dizem-se independentes sse*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Propriedades Se $A, B \subset \Omega$ independentes, então

1. $\bar{A}, B$ são independentes,
2. $A, \bar{B}$ são independentes,
3. $\bar{A}, \bar{B}$ são independentes.

Acontecimentos independentes

Definição 2.9: Diz-se que dois acontecimentos A e B de um mesmo espaço de resultados Ω são *independentes* se

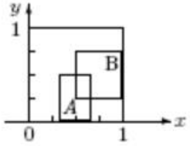
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

- Todo o acontecimento A é independente de $\emptyset$ e Ω.
- Se A e B são acontecimentos independentes, $P(A|B) = P(A)$ se $P(B) > 0$ e $P(B|A) = P(B)$ se $P(A) > 0$.
- Se A e B são acontecimentos independentes, também o são $\bar{A}$ e B, A e $\bar{B}$ e $\bar{A}$ e $\bar{B}$.
- Acontecimentos A e B são condicionalmente independentes ao acontecimento C, $P(C) > 0$, se $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$.
- Os acontecimentos A, B e C são completamente independentes, se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ e $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

  Nota: Independência 2 a 2 $\nLeftrightarrow$ independência completa dos 3.
- Generalização: Os acontecimentos $A_1, \ldots, A_n$ dizem-se independentes se para todo o $k=2,\ldots,n$ e todo o subconjunto $\{A_{i_j}, j=1,\ldots,k\}$ de k desses acontecimentos, $P(\cap_{j=1}^{k} A_{i_j}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$.

  Nota: O número de relações é dado por $2^n - (n+1)$.

Exemplo 2.9: Considere o espaço de resultados Ω como o quadrado de vértices (0,0), (0,1), (1,0) e (1,1). Suponha que a probabilidade de uma região (acontecimento) contida em Ω seja a área desta região. Os acontecimentos $A = \{(x,y) : 1/3 \leq x \leq 2/3, 0 \leq y \leq 1/2\}$ e $B = \{(x,y) : 1/2 \leq x \leq 1, 1/4 \leq y \leq 3/4\}$ são independentes?



$P(A) = 1/6$, $P(B) = 1/4$

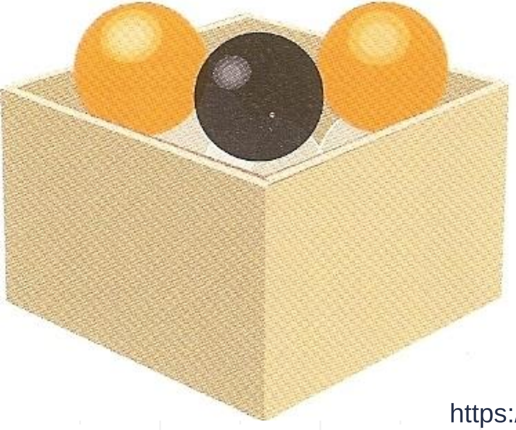
$P(A \cap B) = 1/24 = P(A) \times P(B)$

$\therefore$ A e B são independentes.

Fonte: PE_slides-print Notas Apoio Cap 1-9.pdf: Material do IST

Probabilidade da Interseção: Exemplo 1

Numa caixa há 4 bolas pretas e 6 bolas vermelhas. Qual é a probabilidade de tirarmos uma bola preta e uma vermelha, com reposição?



4 6

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = 0{,}24$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade de Interseção: Exemplo 2

A probabilidade do Paulo Adriano "tirar" dez na prova de Matemática é 1/3 e a probabilidade do Paulo Lucas "tirar" dez na mesma prova é 2/3. Qual é a probabilidade de ambos terem nota dez nesta prova?

$$P(ambos\ os\ alunos\ têm\ nota\ 10) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

2.2 Sejam A e B acontecimentos tais que $P(A) + P(B) = x$ e $P(A \cap B) = y$. Determine em função de x e de y a probabilidade de:

(a) Não se realizar nenhum dos dois acontecimentos.

(b) Que se realize um e um só dos dois acontecimentos.

(c) Que se realize pelo menos um dos dois acontecimentos.

(d) Que se realize quanto muito um único acontecimento.

Exercício 2.2 (a): Leis de Morgan e Probabilidade de União

- **Eventos chave**

$$A, B \quad : \quad P(A) + P(B) = x$$

$$P(A \cap B) = y$$

- **Evento**

$C =$ não se realize nenhum dos dois eventos

$= \overline{A} \cap \overline{B}$ [não se realize A e não se realize B]

$= \overline{A \cup B}$ [leis de De Morgan]

$$\mathrm{P}(\bar{A}) \cup \mathrm{P}(\bar{B}) = \mathrm{P}(\overline{A \cap B})$$

$$\mathrm{P}(\bar{A}) \cap \mathrm{P}(\bar{B}) = \mathrm{P}(\overline{A \cup B})$$

Leis de Morgan

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$$

$$\boxed{\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}}$$

- **Probabilidade pedida**

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

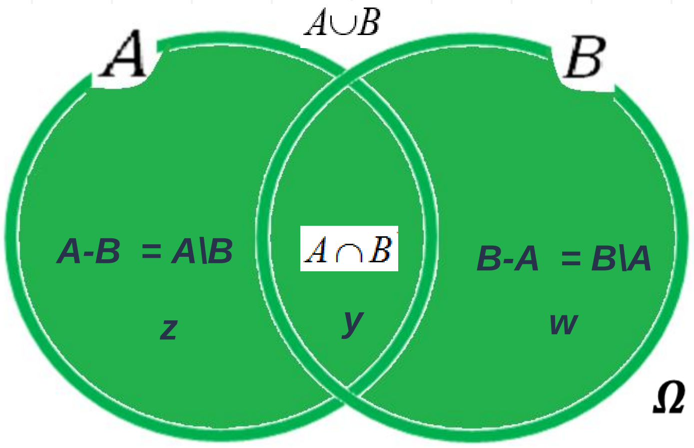
$P(C) = P\left(\overline{A \cup B}\right)$

$= 1 - P(A \cup B)$ [consequência elementar axiomas]

$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$ [consequência elementar axiomas: regra de adição]

$= 1 - (x - y)$

Exercício 2.2 (a): Diagrama de Venn



Sabe-se que:
$P(A) + P(B) = x$
$P(A \cap B) = y$

$P(A) = z+y$

$P(B) = y+w$

$x = z+2y+w$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = z+y+y+w - y = x - y$

P("não se realizar nenhum dos dois acontecimentos") = 1 - P("de se realizar pelo menos um dos dois acontecimentos") = 1 - $P(A \cup B)$ = 1 - $(x-y)$

Exercício 2.2 (b): Probabilidade da Diferença

- **Evento**

$$D = \text{um e um só dos dois eventos}$$
$$= (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \qquad \text{[só se realize A ou só se realize B]}$$

Como A\B e B\A são eventos disjuntos, tem-se P(A\B U B\A) = P(A\B) + P(B\A)

- **Probabilidade pedida**

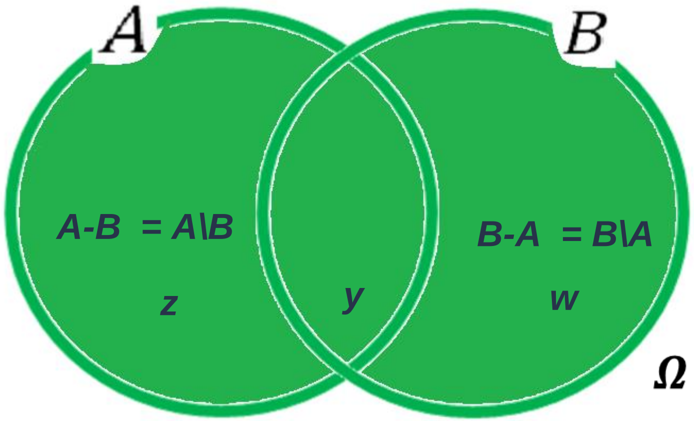
$P(A\backslash B) = P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$

$$P(D) = P[(A\backslash B) \cup (B\backslash A)]$$
$$= P(A\backslash B) + P(B\backslash A) \qquad \text{[eventos disjuntos, f. probabilidade, axioma 3]}$$
$$= [P(A) - P(A\cap B)] + [P(B) - P(A\cap B)] \qquad \text{[consequência elementar axiomas]}$$
$$= [P(A) + P(B)] - 2P(A\cap B)$$
$$= x - 2y$$

$P(B\backslash A) = P(B-A) = P(B) - P(B\cap A)$

$P(A\cap B) = P(B\cap A)$

Exercício 2.2 (b): Diagrama de Venn



Sabe-se que:
$P(A) + P(B) = x$
$P(A \cap B) = y$

$x = z+2y+w$

P("de acontecer apenas um dos dois acontecimentos")
$= z + w = x - 2y$

Exercício 2.2 (c): Probabilidade de União

- **Evento**

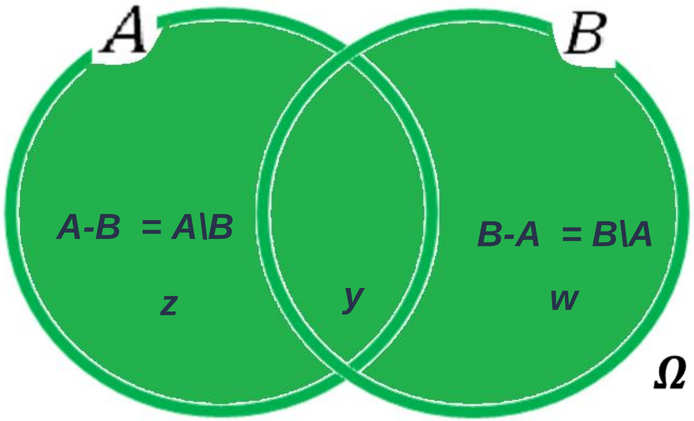
$$
\begin{aligned}
E &= \text{pelo menos um dos dois eventos} \\
&= A \cup B
\end{aligned}
$$

- **Probabilidade pedida**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$
\begin{aligned}
P(E) &= P(A \cup B) \\
&= [P(A) + P(B)] - P(A \cap B) \qquad \text{[consequência elementar axiomas: regra de adição]} \\
&= x - y
\end{aligned}
$$

Exercício 2.2 (c): Diagrama de Venn



Sabe-se que:
P(A) + P(B) = x
P(A ∩ B) = y

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

P("de acontecer pelo menos um dos dois acontecimentos") = x – y

Alínea (a)

Exercício 2.2 (d): Probabilidade Complementar

- **Evento**

$$F = \text{quanto muito um único evento.}$$

$$= \overline{A \cup B} \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \qquad \text{[nenhum evento ou somente o evento A ou somente o evento B]}$$

$$F = \overline{A \cap B}$$

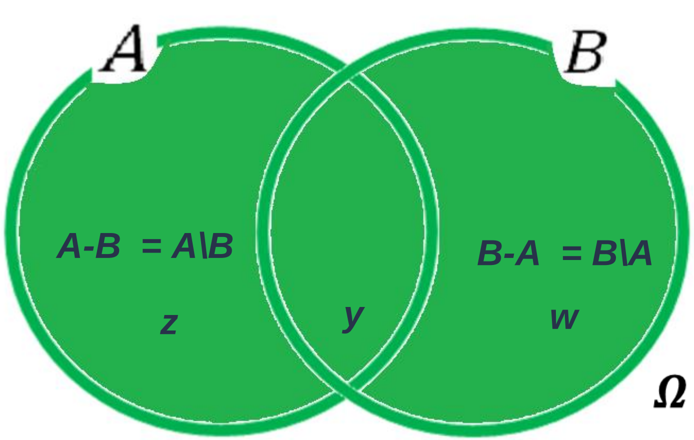
- **Probabilidade pedida**

$$P(F) = P\left(\overline{A \cap B}\right)$$

$$= 1 - P(A \cap B) \qquad \text{[consequência elementar axiomas]}$$

$$= 1 - y$$

Exercício 2.2 (d): Diagrama de Venn



Sabe-se que:
$P(A) + P(B) = x$
$P(A \cap B) = y$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B) = z+y+w = x - y$

P("que se realize quanto muito um acontecimento") = P("não se realizar nenhum dos dois acontecimentos") + P("de se realizar apenas um dos dois acontecimentos") $= 1-(x-y) + (x - 2y) = 1 - y$

Alínea (a)

Alínea (b)

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

2.5 Num lançamento de um dado viciado, a probabilidade de ocorrer cada número ímpar é o dobro da probabilidade de ocorrer cada número par.

(a) Indique qual o espaço de resultados e calcule a probabilidade de cada acontecimento elementar.

(b) Calcule a probabilidade de que o número de pontos obtido no lançamento do dado seja superior a 3.

(c) Calcule a probabilidade de que o número de pontos obtido no lançamento do dado seja um quadrado perfeito.

Exercício 2.5 (a): Espaço de Resultados e Acontecimentos Elementares

- **Espaço de resultados**

  $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ (dado com 6 faces)

Acontecimentos elementares: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$

- **Prob. eventos elementares**

  Seja $P(i)$ a prob. de ocorrência do evento elementar $\{i\}$, $i = 1,\ldots,6$.

  É sabido que:

$$P(1) = P(3) = P(5) = p$$

$$P(2) = P(4) = P(6) = \frac{p}{2}$$

[prob. ocorrer cada no. ímpar é o dobro da de ocorrer no. par...]

Mais,

$$P(\Omega) = 1$$ (F. probabilidade, axioma 1]

$$P(\{1,2,3,4,5,6\}) = 1$$

$$[P(1) + P(3) + P(5)] + [P(2) + P(4) + P(6)] = 1$$ [eventos disjuntos, ...]

$$3 \times p + 3 \times \frac{p}{2} = 1$$

$$\frac{9p}{2} = 1$$

$$p = \frac{2}{9}.$$

Deste modo,

$$P(i) = \begin{cases} \frac{2}{9}, & i = 1,3,5 \\ \frac{1}{9}, & i = 2,4,6. \end{cases}$$

Resolução Alternativa:

P({2}) = P({4}) = P({6}) = p

P ({1}) = P({3}) = P({5}) = 2p

P({1}) + P({2}) + P({3}) +P({4}) + P({5}) + P({6}) = 1 ⇔

⇔ 2p+p+2p+p+2p+p = 9p =1 ⇔ p = 1/9

Logo, tem-se

P({2}) = P({4}) = P({6}) = p

P ({1}) = P ({3}) = P ({5}) = 2p

Exercício 2.5 (b): Acontecimentos Compostos

- **Evento**

  A = no. de pontos no lançamento é superior a 3

- **Prob. pedida**

P({4} U{5} U{6}} = P({4})+P({5})+P({6})

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(\{4,5,6\}) \\
&= P(4) + P(5) + P(6) && \text{[eventos disjuntos, ...]} \\
&= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \\
&= \frac{4}{9}.
\end{aligned}
$$

Exercício 2.5 (c): Acontecimentos Compostos

- **Evento**

  B = no. de pontos no lançamento é um quadrado perfeito

- **Prob. pedida**

$$P(\{1\} \cup \{4\}) = P(\{1\}) + P(\{4\})$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\{1,4\}) \\ &= P(1) + P(4) && \text{[eventos disjuntos, ...]} \\ &= \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Nota: Quadrado perfeito: A raiz quadrada desse número é um número inteiro. Por exemplo, 2, 4, 9, 16, 25… ($1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$ …)

Conceitos Básicos de Probabilidade: Exercícios

Noção de Probabilidade, Probabilidade da União, Probabilidade da Interseção e Probabilidade da Diferença

2

Exercício do Livro Murteira et al (2015)

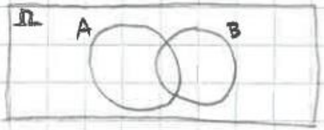
4. Num curso superior, 70% dos alunos têm computador em casa, 40% têm computador portátil e 30% têm os dois. Escolhido um aluno ao acaso, calcule a probabilidade de:
   a) Ter pelo menos um dos tipos de computadores.
   b) Não ter computador.
   c) Ter um e um só computador.

Exercício 4 a)

A – ter computador em casa

B – ter portátil

$P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.4$, $P(A \cap B) = 0.3$



(a)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.4 - 0.3 = 0.8$$

Exercício 4 b)

(b)

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.8 = 0.2$$

Exercício 4 c)

(c)

Ter apenas 1 computador é o acontecimento $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$

Porque $(A \cap \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap B) = \emptyset$, tem-se:

$$P\left[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)\right] = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = \left[P(A) - P(A \cap B)\right] + \left[P(B) - P(A \cap B)\right] =$$

$$= (0.7 - 0.3) + (0.4 - 0.3) = 0.4 + 0.1 = 0.5$$

Exercício do Livro Murteira et al (2015)

6. Um sistema electrónico é formado por dois subsistemas, A e B. De ensaios anteriores sabe-se que: a probabilidade de A falhar é 0.2, a probabilidade de B falhar sozinho é 0.15, e a probabilidade de A e B falharem simultaneamente é 0.15. Determine a probabilidade de:

a) B falhar.

b) Falhar apenas A.

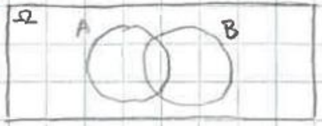
c) Falhar pelo menos um deles, A ou B.

d) Não falhar nem A nem B.

e) A e B não falharem simultaneamente.

Exercício 6 a)

$P(A) = 0.2 \quad , \quad P(B-A) = P(\bar{A} \cap B) = 0.15 \quad , \quad P(A \cap B) = 0.15$



(a)

$P(B) = ?$

Porque $B = \underbrace{(B-A)}_{(\bar{A} \cap B)} \cup (A \cap B)$ e $(\bar{A} \cap B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ tem-se que:

$P(B) = P\left[(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)\right] = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) = 0.15 + 0.15 = 0.3$

Exercício 6 b), c), d) e e)

(b)

$$\underbrace{P(A-B)}_{P(A\cap\overline{B})} = P(A) - P(A\cap B) = 0.2 - 0.15 = 0.05$$

(c)

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.2 + 0.3 - 0.15 = 0.35$$

(d)

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - 0.35 = 0.65$$

(e)

$$P(\overline{A\cap B}) = 1 - P(A\cap B) = 1 - 0.15 = 0.85$$

Probabilidade Condicional 3

Probabilidade Condicional/Condicionada

– É quando um evento só acontece quando o outro evento do mesmo espaço amostral aconteceu (**condição de ocorrência**).

– A probabilidade de "A dado B", "A se B" ou "A sabendo B" é a probabilidade de ocorrer A, quando o evento B ocorreu.

– O **espaço amostral** dos eventos A e B **reduz-se** com a condição de ocorrência.

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Condicional (ou Probabilidade Condicionada)

Sejam A e B acontecimentos associados à mesma experiência aleatória. A probabilidade condicional de A dado que se observou B (ou probabilidade condicional de A se B), é o valor do quociente:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ com } P(B) \neq 0$$

Da mesma forma, tem-se

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

Além disso, $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$.

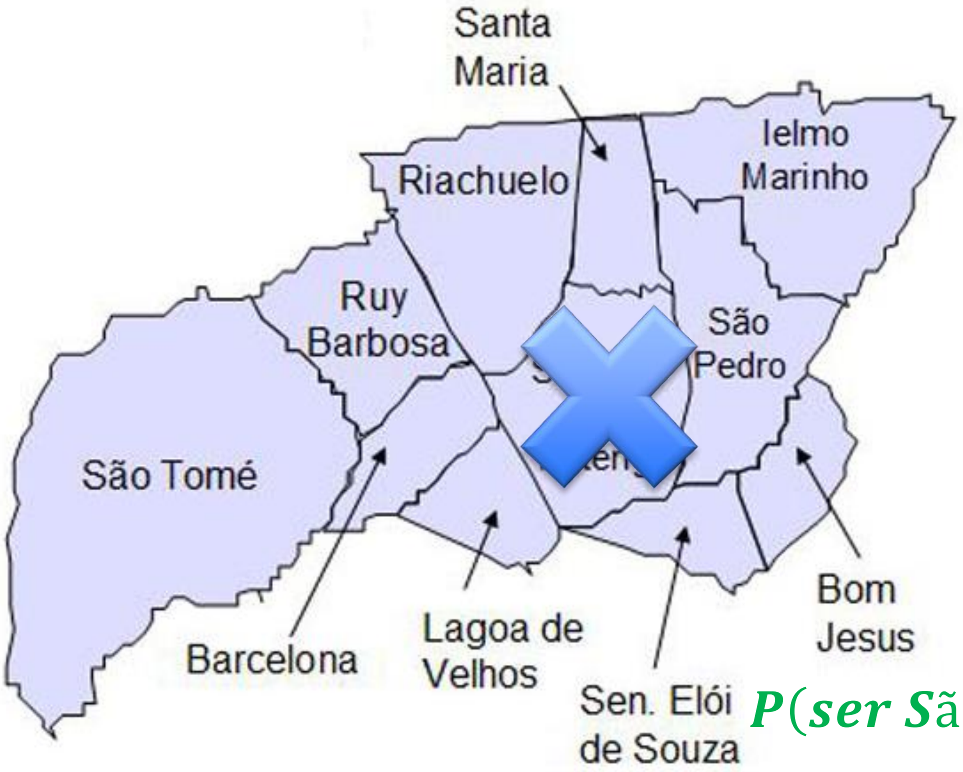
Probabilidade Condicional

$$P(A|B) = P(B|A)?$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \neq P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Condicional: Exemplo 1



Um estudante do IFRN é selecionado ao acaso, qual é a probabilidade dele ser de São Tomé, dado que ele não é de SPP?

$$\boldsymbol{P(ser\ São\ Tomé | Não\ é\ SPP) = \frac{1}{10}}$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Condicional: Exemplo 2

	1ª vez	Já voo antes	Σ
Não conhecia	83	22	105
Já conhecia	23	12	35
Σ	106	34	140

Cada turista de uma viagem de avião respondeu a duas perguntas:

1. Já voou antes?
2. Já conhece a cidade de destino?

Selecionou-se um turista ao acaso, e verificou-se que ele nunca voou antes.

Qual é a probabilidade dele conhecer a cidade de destino?

$$P = (Conhecer\ cidade | Nunca\ voou) = \frac{23}{106}$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Condicional: Exemplo 3

Sexo	Alfabetizada		Total
	Sim	Não	
Masc.	39.577	8.672	48.249
Fem.	46.304	7.297	56.601
Total	85.881	15.969	101.850

Qual é a probabilidade de um jovem escolhido ao acaso ser alfabetizado, sabendo que ele é do sexo feminino?

$$P(alfabetizado|Feminino) = \frac{46304}{56601}$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Condicional: Exemplo 4

Exemplo:

Num saco há 10 bolas, 5 brancas e 5 vermelhas. Qual é a probabilidade de retirar do saco ao acaso, uma bola branca?

$P(B1) = 5/10=0.5$

Sabendo que saiu bola branca, qual é a probabilidade de numa 2ª extracção sair bola branca?

$P(B2|B1)=4/9=0.4$

Probabilidade Conjunta ou Composta (ou Probabilidade de Interseção)

A probabilidade conjunta dos acontecimentos A e B é dada por (i.e., é o produto da probabilidade condicional pela probabilidade do condicionante)

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3 | A_1 \cap A_2) \times \ldots \times P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Os acontecimentos A e B são independentes, sse $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Nesse caso, tem-se $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$.

A definição de independência pode generalizar-se a mais de dois acontecimentos. Por exemplo, os acontecimentos A, B e C dizem-se mutuamente independentes se e só se

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$$

Obrigada!

Questões?