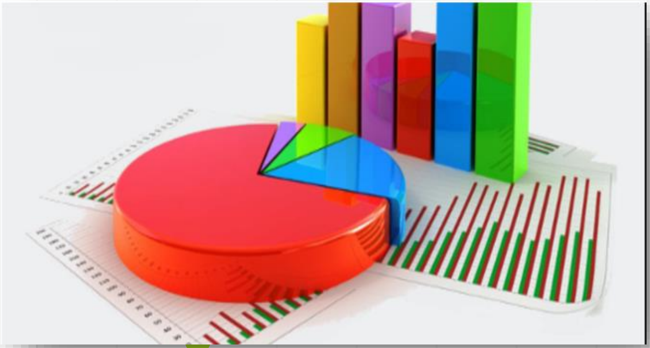
Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

Estatística II

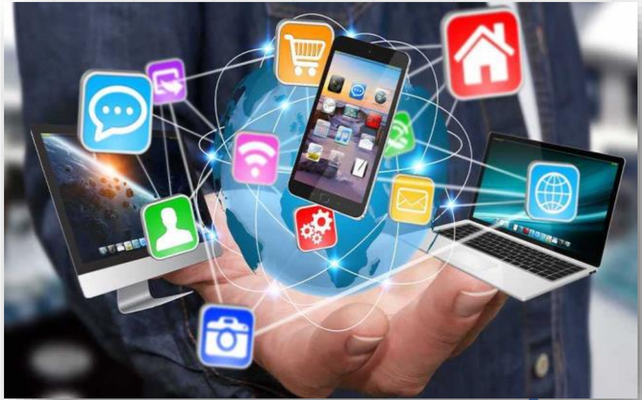
Licenciatura em Gestão
2.º Ano/1.º Semestre
2023/2024

Aula Teórica N.º 5 (Semana 3)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao



https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teóricas (Semanas 1 a 5)	Aulas Teóricas (Semanas 5 a 7)	Aulas Teóricas (Semanas 7 a 9)	Aulas Teóricas (Semanas 10 a 13)
• **Capítulo 1**: Estimação	• **Capítulo 2**: Testes de Hipóteses	• **Capítulo 3**: Modelo de Regressão Linear	• **Capítulo 4**: Complementos ao Modelo de Regressão Linear

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

1. Estimação

a. Introdução
b. Métodos dos momentos
c. Método da máxima verosimilhança
d. Propriedade dos estimadores por pontos
e. Estimação por intervalos para populações normais
f. Estimação por intervalos para populações não normais (grandes amostras)

2ª semana (26/9 e 28/9)

T03 - Estimação - Método da Máxima Verosimilhança

Introdução. Apresentação do método. Exemplos

T04 - Propriedades dos Estimadores

Introdução. Estimadores centrados. Estimadores eficientes (introdução). Exemplos

3ª semana (03/10)

T05 - Propriedades dos estimadores

Estimadores eficientes (fim). Erro quadrático Médio. Consistência. Exemplos.

Propriedades dos estimadores dos momentos e da MV

Propriedades dos Estimadores: Exercícios

1

Estimador Centrado, Eficiente e Convergente

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

1. Suponha que uma variável aleatória X representa o número de avarias de um dispositivo durante um período de tempo e que obedece a uma lei de Poisson de parâmetro λ desconhecido. Para este parâmetro foram sugeridos dois estimadores:

$$\hat{\lambda} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \quad \text{e} \quad \tilde{\lambda} = \frac{X_1 + X_n}{2}.$$

a) Compare-os quanto ao enviesamento.

b) Deduza a variância para cada um deles.

c) Qual dos dois estimadores é mais eficiente? Justifique a sua escolha.

d) Estude os dois estimadores quanto à consistência.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 1 a): Estimadores Centrados

Se $X \sim P(\lambda)$, então $E(X) = Var(X) = \lambda$.
Se $X_1, X_2, \dots, X_n$ é uma a. a. duma dada população $X \sim P(\lambda)$, então $X_i \sim P(\lambda), i = 1, \dots, n$.

a) $$E(\hat{\lambda}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}\left(E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)\right)$$
$$= \frac{1}{n}(\lambda + \lambda + \cdots + \lambda) = \frac{1}{n}n\lambda = \lambda.$$

$$E(\tilde{\lambda}) = E\left(\frac{X_1 + X_n}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(E(X_1) + E(X_n)\right) = \frac{1}{2}(\lambda + \lambda) = \lambda.$$

Portanto, ambos os estimadores são centrados.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

VALOR ESPERADO, MOMENTOS E PARÂMETROS

Formulário

$$\mathrm{Var}(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2;$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y); \qquad \rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$\mathrm{E}(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$ e $\mathrm{Var}(aX+bY) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y) + 2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$ com a, b constantes

Exercício 1 b): Variâncias dos Estimadores

$$b)\ Var(\hat{\lambda}) = Var\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \underset{\substack{X_i \\ indep.}}{=} \frac{1}{n^2}(Var[X_1] + Var[X_2] + \cdots + Var[X_n])$$

$$= \frac{1}{n^2}(\lambda + \lambda + \cdots + \lambda) = \frac{1}{n^2} n\lambda = \frac{\lambda}{n}.$$

$$Var(\tilde{\lambda}) = Var\left(\frac{X_1 + X_n}{2}\right) \underset{\substack{X_i \\ indep.}}{=} \frac{1}{2^2}(Var(X_1) + Var(X_n)) = \frac{1}{4}(\lambda + \lambda) = \frac{\lambda}{2}.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 1 c): Eficiência

c) Se $n = 1$, $Var(\hat{\lambda}) > Var(\tilde{\lambda})$ $\rightarrow$ $\tilde{\lambda}$ é mais eficiente do que $\hat{\lambda}$;

Se $n = 2$, $Var(\hat{\lambda}) = Var(\tilde{\lambda})$ $\rightarrow$ $\hat{\lambda}$ é tão eficiente como $\tilde{\lambda}$;

Se $n > 2$, $Var(\hat{\lambda}) < Var(\tilde{\lambda})$ $\rightarrow$ $\hat{\lambda}$ é mais eficiente do que $\tilde{\lambda}$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício 1 d): Consistência

d) $\hat{\lambda}$ é um estimador consistente, pois $E(\hat{\lambda}) = \lambda$ e $Var(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda}{n} \to 0$, quando $n \to \infty$.

$\tilde{\lambda}$ não é um estimador consistente: $E(\tilde{\lambda}) = \lambda$ mas $Var(\tilde{\lambda}) = \frac{\lambda}{2}$, seja qual for o valor de n.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

Exercício 6.4 [Estimadores, erro quadrático médio, eficiência relativa.]

Se (X_1, X_2, X_3) constitui uma amostra aleatória de dimensão 3 extraída de uma população normal com valor esperado μ e variância σ^2, qual a eficiência de $\frac{1}{4}(X_1 + 2X_2 + X_3)$ relativamente a $\bar{X}$?

Exercício 6.4: Eficiência

- **V.a. de interesse**

  $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$

- **Amostra aleatória**

  $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ é a.a. de dimensão 3 proveniente da população X, donde $X_i \sim_{i.i.d.} X$, $i = 1,2,3$.

- **Parâmetro desconhecido a estimar**

  $\mu = E(X)$

- **Estimador de $\mu = E(X)$**

  $\bar{X} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i$ [média da a.a. $\underline{X}$]

- **Erro quadrático médio de $\bar{X}$**

$$\begin{aligned}
EQM_\mu(\bar{X}) &= V(\bar{X}) + \left[bias_\mu(\bar{X})\right]^2 \\
&= V(\bar{X}) + \left[E(\bar{X}) - \mu\right]^2 \\
&\overset{X_i \sim_{i.i.d.} X}{=} \frac{V(X)}{n} + [E(X) - E(X)]^2 \\
&= \frac{V(X)}{n} \\
&= \frac{\sigma^2}{3}
\end{aligned}$$

Slides Professora Sofia Naique

Exercício 6.4: Eficiência

- **Outro estimador de** $\mu = E(X)$

  $T = \frac{1}{4}(X_1 + 2X_2 + X_3)$

- **Erro quadrático médio de** T

$$
\begin{aligned}
EQM_\mu(T) &= V(T) + [bias_\mu(T)]^2 \\
&= V(T) + [E(T) - \mu]^2 \\
&= V\left[\frac{1}{4}(X_1 + 2X_2 + X_3)\right] + \left\{E\left[\frac{1}{4}(X_1 + 2X_2 + X_3)\right] - E(X)\right\}^2 \\
&\overset{X_i\, indep}{=} \frac{1}{4^2}[V(X_1) + 4V(X_2) + V(X_3)] + \left\{\frac{1}{4}[E(X_1) + 2E(X_2) + E(X_3)] - E(X)\right\}^2 \\
&\overset{X_i \sim X}{=} \frac{1}{4^2}(1+4+1)\,V(X) + \left[\frac{1}{4}(1+2+1)\,E(X) - E(X)\right]^2 \\
&= \frac{3}{8}V(X) \\
&= \frac{3\sigma^2}{8}
\end{aligned}
$$

Exercício 6.4: Eficiência

- **Eficiência do estimador $T = \frac{1}{4}(X_1 + 2X_2 + X_3)$ relativamente a $\bar{X}$**

$$\begin{aligned} e_\mu(T, \bar{X}) &= \frac{EQM_\mu(\bar{X})}{EQM_\mu(T)} \\ &= \frac{\frac{\sigma^2}{3}}{\frac{3\sigma^2}{8}} \\ &= \frac{8}{9} \end{aligned}$$

- **Comentário**

Tendo em conta que

$$e_\mu(T, \bar{X}) = \frac{8}{9} < 1,$$

i.e.,

$$EQM_\mu(\bar{X}) < EQM_\mu(T),$$

pode afirmar-se que $T = \frac{1}{4}(X_1 + 2X_2 + X_3)$ é um estimador menos eficiente que $\bar{X}$ no que respeita à estimação de $\mu = E(X)$.

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

1ª) Sendo $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma $U(0, \theta)$.

a) Encontre o estimador pelo método dos momentos de θ e o seu EQM.

Exercício 1 a): Método dos Momentos e EQM

- **UNIFORME (CONTÍNUA)** $X \sim U(\alpha, \beta)$, $(\alpha < \beta)$

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta - \alpha} \quad \alpha < x < \beta \quad ; \quad E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2}; \ \mathrm{Var}(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12};$$

Formulário

Dado que $\mathbb{E}(X) = \frac{\theta}{2}$ e o primeiro momento amostral é $m_1 = \bar{X}$, temos que pelo método dos momentos,

$$\mathbb{E}(X) = m_1 \Rightarrow \frac{\hat{\theta}_{mm}}{2} = \bar{X} \Rightarrow \hat{\theta}_{mm} = 2\bar{X}.$$

Sabendo que o EQM de um estimador $\hat{\theta}$ de um parâmetro θ é definido como

$$EQM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + (\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta)^2,$$

e dado que $Var(X) = \frac{\theta^2}{12}$, temos que para $\hat{\theta}_{mm} = 2\bar{X}$ o EQM é dado por,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(2\bar{X}) &= \frac{2\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)}{n} = \frac{2n\frac{\theta}{2}}{n} = \theta, \\
\text{Viés}(2\bar{X}) &= \mathbb{E}(2\bar{X}) - \theta = \theta - \theta = 0, \\
Var(2\bar{X}) &= \frac{4\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)}{n^2} = \frac{4n\frac{\theta^2}{12}}{n^2} = \frac{\theta^2}{3n}, \\
EQM(2\bar{X}) &= Var(2\bar{X}) + (\text{Viés}(2\bar{X}))^2 = Var(2\bar{X}) = \frac{\theta^2}{3n}.
\end{aligned}$$

Exercícios sobre EQM,ENVUM,IF e LICR.pdf

Obrigada!

Questões?