Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

Estatística I

Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)

2.º Ano/1.º Semestre

2023/2024

Aulas Teórico-Práticas N.ºs 5 e 6 (Semana 3)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas TP (Semanas 1 e 3)	Aulas TP (Semanas 3 a 6)	Aulas TP (Semanas 7 a 9)	Aulas TP (Semanas 10 a 12)
• **Capítulo 1**: Análise Descritiva • **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	• **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Variáveis Aleatórias Especiais

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

https://cas.iseg.ulisboa.pt

1. Introdução à Estatística

1.1. Estatística Descritiva

2. Probabilidades

2.1. Introdução

2.2. Experiência aleatória. Espaço de resultados. Acontecimentos

2.3. Medida de probabilidade. Axiomática de Kolmogorov

2.4. Interpretações do conceito de probabilidade

2.5. Probabilidade condicionada.

2.6. Teorema da probabilidade total e teorema de Bayes

2.7. Acontecimentos independentes

Probabilidade Condicional: Exercícios

1

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

2.13 Uma bolsa contém moedas de prata e cobre em igual número. Extrai-se ao acaso e sem reposição duas moedas. Calcule a probabilidade de que:

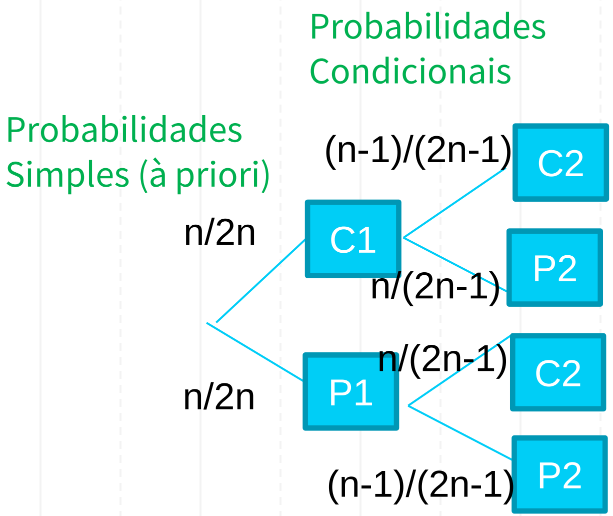
(a) A segunda moeda extraída seja de prata, sabendo que a primeira era de cobre.

(b) Saia uma moeda de prata na 2ª tiragem.

(c) Uma e uma só das moedas seja de prata.

(d) Pelo menos uma das moedas seja de cobre.

Exercício 2.13: Diagrama em Árvore



n = nº de moedas de prata = nº de moedas de cobre

Experiência Aleatória: Extração ao acaso e sem reposição de duas moedas

Acontecimentos:

P1/P2 = Moeda de prata na 1ª extração / Moeda de prata na 2ª extração

C1/C2 = Moeda de cobre na 1ª extração / Moeda de prata na 2ª extração

Exercício 2.13 (a)

n = nº de moedas de prata = nº de moedas de cobre

Experiência Aleatória: Extração ao acaso e sem reposição de duas moedas

$$P(P2|C1) = n/(n+n-1) = n/(2n-1)$$

<u>Acontecimentos</u>:

P2 = Moeda de prata na 2ª extração

C1 = Moeda de cobre na 1ª extração

Exercício 2.13 (b)

n = nº de moedas de prata = nº de moedas de cobre

Experiência Aleatória: Extração ao acaso e sem reposição de duas moedas

$P(P2) = P(P2|C1)P(C1) + P(P2|P1)P(P1)$

$= n/(2n-1) \times n/(2n) + (n-1)/(2n-1) \times n/(2n) = 1/2$

Acontecimentos:

P1/P2 = Moeda de prata na 1ª extração / Moeda de prata na 2ª extração

C1/C2 = Moeda de cobre na 1ª extração / Moeda de prata na 2ª extração

Exercício 2.13 (c)

n = nº de moedas de prata = nº de moedas de cobre

Extração ao acaso e sem reposição de duas moedas

P = Moeda de prata

C = Moeda de cobre

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A)$$

P("uma e uma só seja de prata") = P("de sair uma de prata na segunda tiragem e cobre na primeira") + P("de sair cobre na segunda tiragem e prata na primeira") = P(C1P2) + P(P1C2) =

= P(P2|C1)×P(C1) + P(C2|P1)×P(P1) = n/(2n-1)×(n/2n) + n/(2n-1) ×(n/2n)

= 2×[n/(2n-1)×(n/2n)] = n/(2n-1)

Exercício 2.13 (d)

n = nº de moedas de prata = nº de moedas de cobre

Extração ao acaso e sem reposição de duas moedas

P = Moeda de prata

C = Moeda de cobre

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B) = P(B \mid A) \times P(A)$$

P("pelo menos uma das moedas seja cobre") = P(C1C2) + P(C1P2) + P(P1C2)
= P(C2|C1)×P(C1) + P(P2|C1)×P(C1) + P(C2|P1) ×P(P1)
= [(n-1)/(2n-1)]×(n/2n) + [n/(2n-1)]×(n/2n) + [n/(2n-1)]×(n/2n)
= 1/2[(n-1+n+n)/(2n-1)] = 1/2[(3n-1)/(2n-1)] = (3n-1)/(4n-2)

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

2.14 Uma urna contém 5 bolas brancas e 5 bolas pretas. Dois jogadores, A e B, tiram alternadamente e um de cada de vez uma bola da urna. O jogador que tirar a primeira bola branca ganha a partida.

(a) Considere a experiência aleatória associada a este jogo e escreva o correspondente espaço de resultados.

(b) Calcule a probabilidade de cada jogador ganhar a partida sabendo que o jogador A é o primeiro a tirar a bola de urna.

(c) Responda novamente às alíneas (a) e (b) mas agora considerando que as bolas são extraídas com reposição.

Exercício 2.14 (a): Probabilidade Condicional

- **Experiência aleatória**
  Selecção SEM reposição de bolas de uma urna com 5 bolas brancas (B) e 5 bolas pretas (P) até que saia a 1a. bola branca.

- **Espaço de resultados**
  $\Omega = \{B, PB, PPB, PPPB, PPPPB, PPPPPB\}$
  Ω é um conjunto FINITO!

O número de elementos do Universo/Espaço Amostral é 6.

- **Obs.**

$$B \equiv B_1 \quad \text{[bola branca à 1a. extracção]}$$

$$PB \equiv P_1 \cap B_2 \quad \text{[bola preta à 1a. extracção e bola branca à 2a. extracção]}$$

$$\ldots$$

Exercício 2.14 (b): Probabilidade Condicional

- **Eventos**

$$
\begin{aligned}
E_A &= \text{jogador } A \text{ ganhar sabendo que } A \text{ iniciou o jogo} \\
&= \{B, PPB, PPPPB\} \\
E_B &= \text{jogador } B \text{ ganhar sabendo que } A \text{ iniciou o jogo} \\
&= \overline{E_A} \qquad \{PB, PPPB, PPPPPB\}
\end{aligned}
$$

- **Prob. pedidas**

Atente-se que

$$P(E_A) = P(B) + P(PPB) + P(PPPPB) \qquad \boxed{\text{[eventos disjuntos, ...]}}$$

onde

$$
\begin{aligned}
P(B) &= \frac{\text{no. casos favoráveis a } B}{\text{no. casos possíveis}} \qquad \text{[probabilidade clássica de Laplace]} \\
&= \frac{5 \text{ bolas brancas}}{10 \text{ bolas}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Exercício 2.14 (b): Probabilidade Conjunta/Composta/Interseção

$$P(PPB) = P(P_1 \cap P_2 \cap B_3)$$

$$= P(P_1) \times P(P_2 \mid P_1) \times P[B_3 \mid (P_1 \cap P_2)]$$

[lei probabilidade composta, probabilidade condicionada]

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B) = P(B \mid A) \times P(A)$$

$$= \frac{5}{10} \times \frac{5-1}{10-1} \times \frac{5}{10-2}$$

$$= \frac{5}{36}$$

$$P(PPPPB) = P(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4 \cap B_5)$$

$$= \ldots$$

[lei probabilidade composta]

$$= \frac{5}{10} \times \frac{5-1}{10-1} \times \frac{5-2}{10-2} \times \frac{5-3}{10-3} \times \frac{5}{10-4}$$

$$= \frac{5}{252}.$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2 \mid A_1) \times P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \ldots \times P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Exercício 2.14 (b): Probabilidade Conjunta

Logo

$$
\begin{aligned}
P(E_A) &= \frac{1}{2} + \frac{5}{36} + \frac{5}{252} \\
&= \frac{83}{126} \\
P(E_B) &= 1 - P(E_A) \\
&= 1 - \frac{83}{126} \\
&= \frac{43}{126}.
\end{aligned}
$$

Exercício 2.14 (c): Acontecimentos Independentes

- **Experiência aleatória**

  Selecção COM reposição de bolas de uma urna com 5 bolas brancas (B) e 5 bolas pretas (P) até que saia a 1a. bola branca.

- **Espaço de resultados**

  $\Omega = \{B, PB, PPB, PPPB, PPPPB, PPPPPB, \ldots\}$

  Ω é um conjunto INFINITO NUMERÁVEL!

As extrações com reposição são extrações independentes.

- **Eventos**

$$E_A = \{B, PPB, PPPPB, \ldots\}$$
$$E_B = \overline{E_A}$$

P(“sair bola preta”)= P(“sair bola branca”) = 5/10 = 1/2

- **Prob. pedidas**

  Para já,

$$P(E_A) = P(B) + P(PPB) + P(PPPPB) + \ldots$$

[eventos disjuntos, ...]

Ora,

$$P(B) = \frac{5 \text{ bolas brancas}}{10 \text{ bolas}} = \frac{1}{2}$$

Exercício 2.14 (c): Acontecimentos Independentes

e, por lidarmos com uma extracção COM reposição, temos

$$
\begin{aligned}
P(PPB) &= P(P_1 \cap P_2 \cap B_3) \\
&= P(P_1) \times P(P_2 \mid P_1) \times P[B_3 \mid (P_1 \cap P_2)] && \text{[lei probabilidade composta, ...]} \\
&= \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^3
\end{aligned}
$$

Os acontecimentos A e B são independentes sse $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$

$$
\begin{aligned}
P(PPPPB) &= P(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4 \cap B_5) \\
&= \ldots && \text{[lei probabilidade composta, ...]} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^5 .
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
P(E_A) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+1} \\
&= \frac{1}{2} \times \sum_{i=0}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^i
\end{aligned}
$$

Série geométrica de razão r.
Se |r| < 1 então a série é convergente.

$$\sum_{j=0}^{\infty} r^j = \frac{1}{1-r}$$

Exercício 2.14 (c): Acontecimentos Independentes

$$
\begin{aligned}
P(E_A) &= \frac{1}{2} \times \cancel{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^0} \times \frac{1 - \cancel{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]}^{+\infty}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{3}{4}} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(E_B) &= 1 - P(E_A) \\
&= 1 - \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Série geométrica de razão r.
Se |r| < 1 então a série é convergente.

$$\sum_{j=0}^{\infty} r^j = \frac{1}{1-r}$$

Comentário

Uma vez que $P(E_A) > P(E_B)$ em (b) e (c), concluimos que há sempre vantagem em jogar em 1o. lugar quer se faça reposição, quer não.

2.16 A execução de um projecto de construção de um edifício no tempo programado está relacionada com os seguintes acontecimentos:

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

$E =$ "escavação executada a tempo"

$F =$ "fundações executadas a tempo"

$S =$ "superestrutura executada a tempo"

supostos independentes e com probabilidades iguais a, respectivamente, 0.8, 0.7 e 0.9. Calcule a probabilidade de:

(a) O edifício ser terminado no tempo previsto, devido ao cumprimento dos prazos nas três actividades referidas.

(b) O prazo de execução ser cumprido para a escavação e não ser cumprido em pelo menos uma das outras actividades.

Exercício 2.16 (a)

Acontecimentos:

E = “escavação executada a tempo”

F = “fundações executadas a tempo”

S = “superestrutura executada a tempo”

Acontecimentos independentes

P (E) = 0,8

P(F) = 0,7

P(S) = 0,9

Definição 1.6 (Acontecimentos independentes). $A, B \subset \Omega$ *dizem-se independentes sse*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Propriedades Se $A, B \subset \Omega$ independentes, então

1. $\bar{A}, B$ são independentes,
2. $A, \bar{B}$ são independentes,
3. $\bar{A}, \bar{B}$ são independentes.

P(“Construção do edifício terminou no tempo previsto”) = P(E)×P(F)×P(S) = 0,504

Exercício 2.16 (b)

P("O prazo de execução ser cumprido para a escavação e não ser cumprido em pelo menos uma das outras atividades")
$= P(E) \times P(\sim F) \times P(S) + P(E) \times P(F) \times P(\sim S) + P(E) \times P(\sim F) \times P(\sim S)$
$= 0{,}8 \times 0{,}3 \times 0{,}9 + 0{,}8 \times 0{,}7 \times 0{,}1 + 0{,}8 \times 0{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}296$

Definição 1.6 (Acontecimentos independentes). $A, B \subset \Omega$ *dizem-se independentes sse*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Propriedades Se $A, B \subset \Omega$ independentes, então

1. $\bar{A}, B$ são independentes,
2. $A, \bar{B}$ são independentes,
3. $\bar{A}, \bar{B}$ são independentes.

2 Teorema da Probabilidade Total e Teorema de Bayes

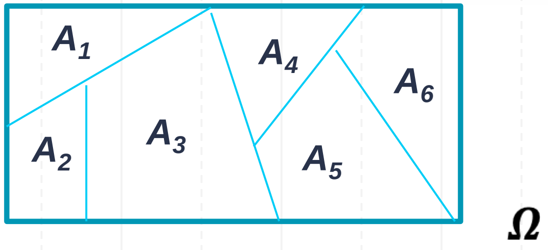
Definição de Partição

Diz-se que os acontecimentos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constituem uma partição de Ω se e só se:

– $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são mutuamente incompatíveis, isto é,

$A_i \cap A_j = \emptyset;\ i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j$;

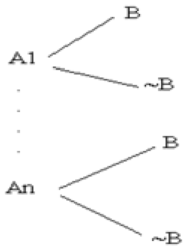
– $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

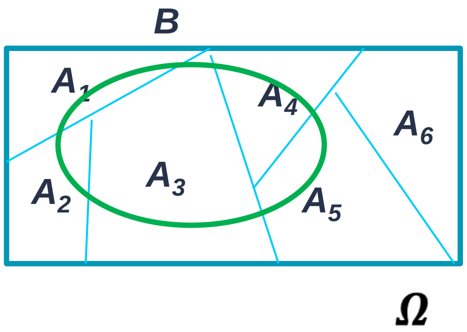


Teorema/Lei da Probabilidade Total

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ definem uma partição sobre Ω, então para qualquer B definido em Ω temos:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P[B|A_i] \times P(A_i) = P[B|A_1] \times P(A_1) + P[B|A_2] \times P(A_2) + \ldots + P[B|A_n] \times P(A_n)$$





Se a partição é A, $\bar{A}$, então tem-se o caso especial

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$$

Nota: Aplica-se este teorema quando se quer calcular a probabilidade de ocorrência de um efeito originado por várias causas.

Teorema de Bayes
(ou Teorema da Probabilidade Inversa)

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ definem uma partição sobre Ω, então para qualquer B definido em Ω temos:

$$P[A_i|B] = \frac{P[B|A_i]\times P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P[B|A_i]\times P(A_i)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B|A_1)P(A_1)+\ldots+P(B|A_n)P(A_n)} \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Teorema da Probabilidade Total

Quando a partição de A é $\overline{A}$, tem-se o caso especial

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})}.$$

<u>Nota</u>: Aplica-se este teorema quando se quer calcular a probabilidade de ter sido A_k que originou *B*.

Teorema de Bayes: Exemplo

Seja

M = doença meningite

S = dor no pescoço

Um Doutor sabe:

P(S|M) = 0.5

P(M) = 1/50000

P(S) = 1/20

1 Probabilidade condicional

2 Probabilidades a priori

$$\mathbf{P}(M|S) = \frac{\mathbf{P}(S|M)\mathbf{P}(M)}{\mathbf{P}(S)}$$

$$= \frac{0,5*(1/50000)}{1/20} = 0,0002$$

A probabilidade de uma pessoa ter meningite dado que ela está com dor no pescoço é 0,02% ou ainda 1 em 5000.

https://www.dei.isep.ipp.pt/~csr/SP/SP-Bayes.ppt

Teorema da Probabilidade Total e Teorema de Bayes: Exercícios

3

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

2.18 Um geólogo crê que existe petróleo numa certa região com probabilidade 0.8 e que, caso haja petróleo, a probabilidade de sair petróleo na primeira perfuração é de 0.5.

(a) Qual a probabilidade de sair petróleo na primeira perfuração?

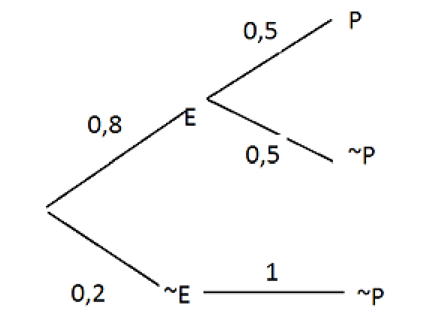
(b) Tendo-se procedido à primeira perfuração da qual não resultou petróleo, qual é a nova probabilidade atribuída à existência de petróleo na região?

Exercício 2.18 (a): Lei da Probabilidade Total

- **Quadro de eventos e probabilidades**

Evento	Probabilidade
$E = \{\text{existe petróleo}\}$	$P(E) = 0.8$
$P = \{\text{sair petróleo na primeira perfuração}\}$	$P(P) = ?$
	$P(P \mid E) = 0.5$
	$P(P \mid \overline{E}) = 0$

Partição: {P, ~P}



- **Prob. pedida**

Os acontecimentos E e $\overline{E}$ constituem uma partição do espaço de resultados Ω.
Tirando partido desta partição e da lei da probabilidade total, tem-se:

$$
\begin{aligned}
P(P) &= P(P \mid E) \times P(E) + P(P \mid \overline{E}) \times P(\overline{E}) \\
&= 0.5 \times 0.8 + 0 \times 0.2 \\
&= 0.4.
\end{aligned}
$$

$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})$

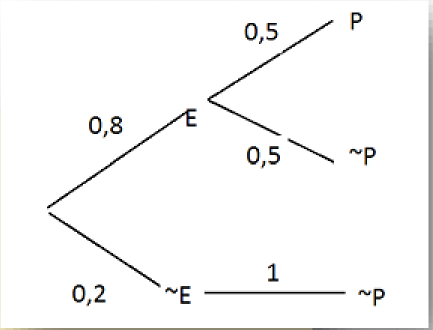
Exercício 2.18 (b): Teorema de Bayes

- **Prob. pedida**

  Invocando o teorema de Bayes, obtemos:

$$
\begin{aligned}
P(E \mid \overline{P}) &= \frac{P(\overline{P} \mid E) \times P(E)}{P(\overline{P})} \\
&= \frac{[1 - P(P \mid E)] \times P(E)}{1 - P(P)} \\
&\overset{(a)}{=} \frac{(1 - 0.5) \times 0.8}{1 - 0.4} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Alínea (a)



$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \overline{A})P(\overline{A})}.$$

2.20 Para um certo tipo de cancro a taxa de prevalência (proporção de doentes na população em geral) é 0.005. Um teste diagnóstico para esta doença é tal que:

- a probabilidade do teste resultar positivo quando aplicado a um indivíduo com cancro (sensibilidade do teste) é 0.99;
- a probabilidade do teste resultar negativo quando o indivíduo não tem cancro (especificidade do teste) é 0.95.

(a) Calcule o valor preditivo do teste, isto é, a probabilidade de um indivíduo ter cancro sabendo que o teste resultou positivo.

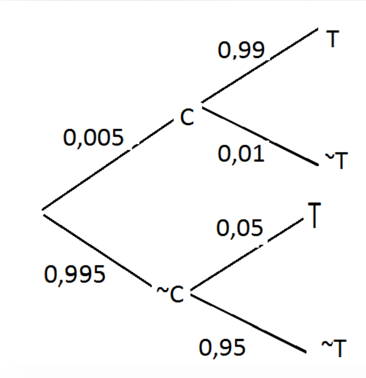
(b) Supondo que o teste foi aplicado duas vezes consecutivas ao mesmo doente e que das duas vezes o resultado foi positivo, calcule a probabilidade do doente ter cancro (admita que, dado o estado do indivíduo, os resultados do teste em sucessivas aplicações, em qualquer indivíduo, são independentes). O que pode concluir quanto ao valor preditivo da aplicação do teste duas vezes consecutivas?

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

Exercício 2.20 (a): Teorema de Bayes

- **Quadro de eventos e probabilidades**

Evento	Probabilidade
$C = \{\text{paciente com cancro}\}$	$P(C) = \text{prevalência da doença} = 0.005$
$T = \{\text{teste positivo}\}$	$P(T) = ?$
	$P(T \mid C) = \text{sensibilidade do teste} = 0.99$
	$P(\overline{T} \mid \overline{C}) = \text{especificidade do teste} = 0.95$



- **Prob. pedida**

$$
\begin{aligned}
P(C \mid T) &\overset{Teo.Bayes}{=} \frac{P(T \mid C) \times P(C)}{P(T)} \\
&= \frac{P(T \mid C) \times P(C)}{P(T \mid C) \times P(C) + P(T \mid \overline{C}) \times P(\overline{C})} \\
&= \frac{P(T \mid C) \times P(C)}{P(T \mid C) \times P(C) + [1 - P(\overline{T} \mid \overline{C})] \times [1 - P(C)]} \\
&= \frac{0.99 \times 0.005}{0.99 \times 0.005 + (1 - 0.95) \times (1 - 0.005)} \\
&\simeq 0.0905.
\end{aligned}
$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \overline{A})P(\overline{A})}.$$

Exercício 2.20 (b): Teorema de Bayes

- **Prob. pedidas**

  Ao invocarmos o teorema de Bayes, bem como a independência condicional, que se traduz em

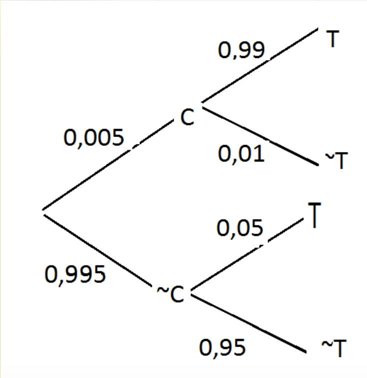
$$T_1 \mid C \quad \perp\!\!\!\perp \quad T_2 \mid C$$
$$T_1 \mid \overline{C} \quad \perp\!\!\!\perp \quad T_2 \mid \overline{C},$$

  i.e.,

$$P[(T_1 \cap T_2) \mid C] = P(T_1 \mid C) \times P(T_2 \mid C)$$
$$P[(T_1 \cap T_2) \mid \overline{C}] = P(T_1 \mid \overline{C}) \times P(T_2 \mid \overline{C}),$$

  o valor preditivo de dois testes aplicados consecutivamente é dado por

$$\begin{aligned}
P[C \mid (T_1 \cap T_2)] &\overset{Teo.Bayes}{=} \frac{P[(T_1 \cap T_2) \mid C] \times P(C)}{P(T_1 \cap T_2)} \\
&= \frac{P[(T_1 \cap T_2) \mid C] \times P(C)}{P[(T_1 \cap T_2) \mid C] \times P(C) + P[(T_1 \cap T_2) \mid \overline{C}] \times P(\overline{C})} \\
&\overset{indep.cond.}{=} \frac{P(T_1 \mid C) \times P(T_2 \mid C) \times P(C)}{P(T_1 \mid C) \times P(T_2 \mid C) \times P(C) + P(T_1 \mid \overline{C}) \times P(T_2 \mid \overline{C}) \times P(\overline{C})} \\
&= \frac{P(T_1 \mid C) \times P(T_2 \mid C) \times P(C)}{P(T_1 \mid C) \times P(T_2 \mid C) \times P(C) + [1 - P(\overline{T_1} \mid \overline{C})] \times [1 - P(\overline{T_2} \mid \overline{C})] \times [1 - P(C)]} \\
&= \frac{0.99 \times 0.99 \times 0.005}{0.99 \times 0.99 \times 0.005 + (1 - 0.95) \times (1 - 0.95) \times (1 - 0.005)} \\
&\simeq 0.6633.
\end{aligned}$$



$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \overline{A})P(\overline{A})}.$$

- **Comentário**

  O valor preditivo aumentou substancialmente ao aplicarmos dois testes consecutivos.

Probabilidade Condicional, Teorema da Probabilidade Total e Teorema de Bayes: Exercícios

4

Murteira et al (2015)

Exercício do Livro Murteira et al (2015)

24. Numa experiência de aprendizagem, um indivíduo realiza duas vezes seguidas uma determinada tarefa, podendo falhar ou ser bem sucedido em cada uma delas. A probabilidade de falhar a primeira tentativa é de 0.25. Se falhar a primeira, a probabilidade de ser bem sucedido na segunda é de 0.5. Se for bem sucedido na primeira, a probabilidade de falhar na segunda é de 0.1. Qual a probabilidade de falhar a segunda tentativa?

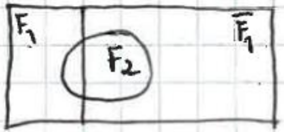
Exercício 24: Teorema da Probabilidade Total

Sejam os acontecimentos:

F_1 - falhar na 1ª tentativa

F_2 - falhar na 2ª tentativa

F_1 e $\overline{F_1}$ são uma partição de Ω com F_2 inscrito em Ω



- $P(F_1) = 0.25$, $P(\overline{F_2} | F_1) = 0.5$, $P(F_2 | \overline{F_1}) = 0.1$

Exercício 24: Teorema da Probabilidade Total

Pela regra da probabilidade total, tem-se:

$$P(F_2) = \underbrace{P(F_1)}_{0.25}\, P(F_2 \mid F_1) + P(\overline{F}_1)\, \underbrace{P(F_2 \mid \overline{F}_1)}_{0.1}$$

- $P(F_2 \mid F_1) = 1 - P(\overline{F}_2 \mid F_1) = 1 - 0.5 = 0.5$
- $P(\overline{F}_1) = 1 - P(F_1) = 1 - 0.25 = 0.75$

Assim,

$$P(F_2) = 0.25 \times 0.5 + 0.75 \times 0.1 = 0.2$$

Exercício do Livro Murteira et al (2015)

29. Os trabalhadores da companhia Segura Lda. foram classificados em três níveis de acordo com o grau de instrução: formação mínima, formação média e formação superior. Sabe-se que:

- Desses trabalhadores, 55% têm salário superior a 1000 euros;
- 40% dos trabalhadores com formação média tem salário superior a 1000 euros;
- 70% dos trabalhadores com formação superior tem salário superior a 1000 euros;
- Nenhum dos trabalhadores com formação mínima tem salário superior a 1000 euros;
- A percentagem de trabalhadores com formação mínima é 10%.

a) Calcule a probabilidade de um trabalhador escolhido ao acaso ter formação média.

b) Determine a probabilidade de um trabalhador ter formação superior, sabendo que ganha mais de 1000 euros.

Exercício 29

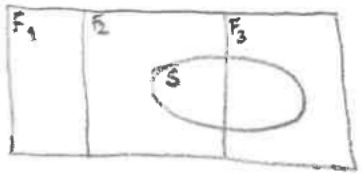
F_1 - formação mínima

F_2 - formação média

F_3 - formação superior

S - salário superior a 1000 €

- $P(S) = 0.55$
- $P(S|F_2) = 0.4$
- $P(S|F_3) = 0.7$
- $P(S|F_1) = 0$
- $P(F_1) = 0.10$



Exercício 29 (a): Teorema da Probabilidade Total

(a)

Quer-se $P(F_2)$.

$$P(S) = P(F_2)\,P(S|F_2) + P(F_3)\,P(S|F_3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(S) = P(F_2)\,P(S|F_2) + \left[1 - P(F_1) - P(F_2)\right] P(S|F_3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0.55 = 0.4\,P(F_2) + \left(1 - 0.1 - P(F_2)\right) \times 0.7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0.55 = 0.4\,P(F_2) + 0.63 - 0.7\,P(F_2) \Leftrightarrow 0.3\,P(F_2) = 0.08 \Leftrightarrow P(F_2) = \frac{0.08}{0.3} = \frac{4}{15}$$

$$\approx 0.2667$$

Exercício 29 (b): Teorema de Bayes

(b)

$$P(F_3 | S) = \frac{P(F_3 \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S \cap F_3)}{P(S)} = \frac{P(S|F_3)\,P(F_3)}{P(S)} = \frac{0.7\left(1 - 0.1 - 4/15\right)}{0.55} \approx 0.806$$

Exercício do Livro Murteira et al (2015)

35. Uma prova de Estatística tem a duração de duas horas. Dos alunos que entregam a prova, sabe-se que 20% o fazem antes das 2 horas, 50% no limite fixado e os restantes depois. Têm nota positiva 70% dos primeiros, 50% dos segundos e 15% dos últimos.

a) Qual a percentagem de alunos com nota positiva?

b) Comente a seguinte frase: "dos alunos que têm nota positiva, mais de metade entregou dentro do tempo regulamentar".

c) Em 10 alunos escolhidos ao acaso, dos que entregam a prova, qual a probabilidade de exactamente quatro deles terem-na feito no tempo fixado?

Exercício 35

Sejam os acontecimentos,

H_1 - terminar antes do limite fixado
H_2 - terminar no limite fixado
H_3 - terminar depois do limite fixado

H_1, H_2 e H_3 formam partição de Ω

B - ter nota positiva

$P(H_1) = 0.2$ $\quad$ $P(H_2) = 0.5$ $\quad$ $P(H_3) = 1 - 0.2 - 0.5 = 0.3$

$P(B|H_1) = 0.7$ $\quad$ $P(B|H_2) = 0.5$ $\quad$ $P(B|H_3) = 0.15$

Exercício 35 (a): Teorema da Probabilidade Total

(a)

$P(B) = ?$

Pela regra da probabilidade total, obtém-se:

$$P(B) = \sum_{j=1}^{3} P(H_j)\,P(B|H_j) = P(H_1)\,P(B|H_1) + P(H_2)\,P(B|H_2) + P(H_3)\,P(B|H_3)$$

$$= 0.2 \times 0.7 + 0.5 \times 0.5 + 0.3 \times 0.15 = 0.435$$

Exercício 35 (b): Teorema de Bayes

(b)

É necessário verificar se: $P(\underbrace{H_1 \cup H_2}_{\text{entregar no tempo regulamentar}} \mid B) > 0.5$ nota positiva

$$P(H_1 \cup H_2 \mid B) = P(H_1 \mid B) + P(H_2 \mid B) - \overbrace{P(\underbrace{H_1 \cap H_2}_{\emptyset} \mid B)}^{0}$$

Pelo teorema de Bayes, obtém-se:

- $P(H_1 \mid B) = \dfrac{P(H_1)\,P(B \mid H_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i)\,P(B \mid H_i)} = \dfrac{0.2 \times 0.7}{0.435} \approx 0.322$

- $P(H_2 \mid B) = \dfrac{P(H_2)\,P(B \mid H_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i)\,P(B \mid H_i)} = \dfrac{0.5 \times 0.5}{0.435} \approx 0.575$

Logo,

$$P(H_1 \cup H_2 \mid B) \approx 0.322 + 0.575 = 0.897 > 0.5$$

Assim sendo, a afirmação está correcta.

Exercício 35 (c): Esquema Binomial

(c)

Esquema binomial: $P = C^n_x \, p^x (1-p)^{n-x}$, onde $n = 10$, $x = 4$, $p = P(H_2) = 0.5$

logo,

$$P = C^{10}_4 \times 0.5^4 \times 0.5^6 \approx 0.2058$$

Exercício do Livro Murteira et al (2015)

49. Sejam A e B acontecimentos independentes, definidos no mesmo espaço de resultados, sendo $P(A) = 1/3$ e $P(B) = 3/4$.

a) Calcule $P(A \cup B)$ e $P(B \mid A \cup B)$.

b) Mostre que os acontecimentos complementares também são independentes.

Exercício 49 (a)

A e B independentes $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

$P(A) = 1/3$, $P(B) = 3/4$

(a)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)\,P(B) =$$

$$= 1/3 + 3/4 - (1/3)(3/4) = 5/6 \approx 0.8333$$

$$P(B \mid A \cup B) = \frac{P[B \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} \rightarrow 5/6$$

Exercício 49 (a)

- **Numerador:**

$$P[B \cap (A \cup B)] \overset{\text{Distributividade}}{=} P[(B \cap A) \cup \overbrace{(B \cap B)}^{B}] = P[(B \cap A) \cup B] =$$

$$= P(B \cap A) + P(B) - P[(B \cap A) \cap B] = P(A \cap B) + P(B) - P[(A \cap B) \cap B] =$$

$$= P(A \cap B) + P(B) - P[A \cap \overbrace{(B \cap B)}^{B}] = P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(B) = 3/4$$

Logo, $P(B \mid A \cup B) = \dfrac{3/4}{5/6} = \dfrac{18}{20} = \dfrac{9}{10} = 0.9$

Exercício 49 (b)

(b)

Mostrar que $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})\,P(\bar{B})$

- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 5/6 = 1/6$
- $P(\bar{A})\,P(\bar{B}) = (1 - P(A))\,(1 - P(B)) = (1 - 1/3)\,(1 - 3/4) = (2/3)\,(1/4) = 2/12 = 1/6$

Porque se comprovou que $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})\,P(\bar{B})$, conclui-se que $\bar{A}$ e $\bar{B}$ também são independentes.

Exercício 49 (b)

Caso geral

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - [P(A)+P(B)-P(A\cap B)] = 1-[P(A)+P(B)-P(A)P(B)] =$$

$$= \underbrace{1-P(A)}_{P(\overline{A})} - P(B) + P(A)P(B) = P(\overline{A}) - P(B)[\underbrace{1-P(A)}_{P(\overline{A})}] = P(\overline{A}) - P(B)P(\overline{A}) =$$

$$= P(\overline{A})[\underbrace{1-P(B)}_{P(\overline{B})}] = P(\overline{A})P(\overline{B}) \qquad \text{c.q.d.}$$

Exercício do Livro Murteira et al (2015)

58. Suponha que vai passar um fim-de-semana a Londres viajando de avião. Considere os seguintes acontecimentos:

- $A \equiv$ «a minha mala perde-se na viagem de ida»;
- $B \equiv$ «a minha mala perde-se na viagem de regresso».

Sabendo que os dois acontecimentos são independentes, que $P(A \cup B) = 0.0298$, que $P(A \cap B) = 0.0002$ e que $P(A) < P(B)$, determine $P(A)$ e $P(B)$.

Exercício 58

A e B são independentes $\Leftrightarrow$ $P(A\cap B) = P(A)\,P(B)$

$P(A\cup B) = 0.0298$, $P(A\cap B) = 0.0002$ e $P(A) < P(B)$.

$P(A) = ?$ e $P(B) = ?$

. $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Leftrightarrow 0.0298 = P(A) + P(B) - 0.0002 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{P(A) + P(B) = 0.03}$

. $P(A\cap B) = 0.0002 \Leftrightarrow \boxed{P(A)\,P(B) = 0.0002}$

Exercício 58

$$\begin{cases} P(A) + P(B) = 0.03 \\ P(A)\,P(B) = 0.0002 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(A) = 0.03 - P(B) \\ [0.03 - P(B)]\,P(B) = 0.0002 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ 0.03P(B) - P(B)^2 = 0.0002 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(A) = 0.03 - P(B) \\ P(B)^2 - 0.03P(B) + 0.0002 = 0 \end{cases}$$

$$P(B) = \frac{0.03 \pm \sqrt{(-0.03)^2 - 4 \times 1 \times 0.0002}}{2 \times 1} = \frac{0.03 \pm \sqrt{0.0001}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{0.03 + 0.01}{2} = 0.02 \quad \vee \quad P(B) = \frac{0.03 - 0.01}{2} = 0.01$$

Exercício 58

Deste modo, da 1ª equação do sistema,

- Se $P(B) = 0.02 \Rightarrow P(A) = 0.03 - 0.02 = 0.01$
- se $P(B) = 0.01 \Rightarrow P(A) = 0.03 - 0.01 = 0.02$

Como $P(A) < P(B)$, a solução é: $P(A) = 0.01$ e $P(B) = 0.02$

Obrigada!

Questões?