Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

# Estatística I

## Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)
## 2.º Ano/1.º Semestre
## 2023/2024

# Aulas Teórico-Práticas N.ºs 7 e 8 (Semana 4)

**Docente**: Elisabete Fernandes
**E-mail**: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

# Conteúdos Programáticos

| Aulas TP (Semanas 1 e 3) | Aulas TP (Semanas 3 a 6) | Aulas TP (Semanas 7 a 9) | Aulas TP (Semanas 10 a 12) |
|---|---|---|---|
| • **Capítulo 1**: Análise Descritiva<br>• **Capítulo 2**: Probabilidades | • **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais | • **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais | • **Capítulo 5**: Variáveis Aleatórias Especiais |

**Material didático:** Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

**Bibliografia**: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

**3. Variáveis aleatórias unidimensionais**

3.1. Variável aleatória

3.2. Função de distribuição

3.3. Classificação de variáveis aleatórias.

3.4. Variável aleatória discreta

3.5. Variável aleatória contínua

3.6. Função distribuição de uma função de uma variável aleatória

3.7. Valores esperados de variáveis aleatórias

3.8. Valores esperados de funções de variáveis aleatórias

3.9. Propriedades dos valores esperados

3.10. Momentos em relação à origem

3.11. Momentos em relação à média

3.12. Variância de uma variável aleatória

# 1 Variáveis Aleatórias Discretas

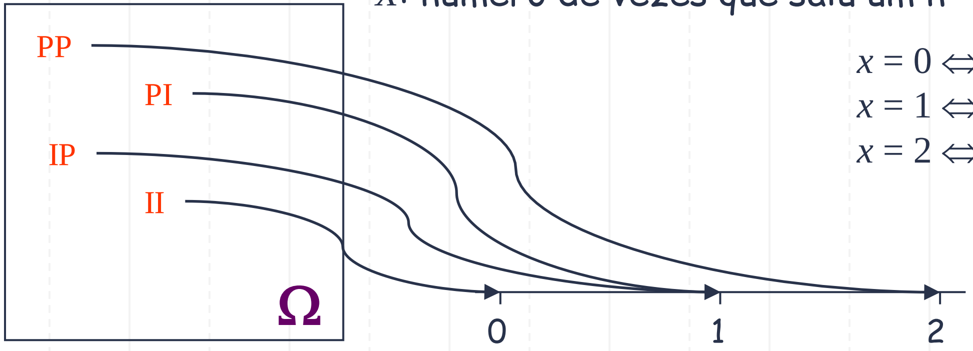
Variável Aleatória, Função de Distribuição, Função Massa de Probabilidade, Valor Esperado, Moda, Variância e Quantis

# Variável Aleatória

Uma função ***X*** que associa a cada elemento ***w*** do espaço amostral **Ω** um valor ***x*** **∈** ***R*** é denominada de *variável aleatória (v.a.)*.

Experiência: lançar um 1 dado duas vezes e observar o resultado
(P = par e I = impar)

$X$: número de vezes que saiu um nº par em 2 lançamentos do dado




$x = 0 \Leftrightarrow \mathrm{II}$

$x = 1 \Leftrightarrow \mathrm{IP}$ ou $\mathrm{PI}$

$x = 2 \Leftrightarrow \mathrm{PP}$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

**Definição:** *Uma variável aleatória é uma aplicação do espaço dos possíveis em* $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} X : \quad & \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ & \omega \rightarrow X(\omega) = x \end{aligned}$$

Slides do Professor Manuel Scotto do IST

# Tipos de Variáveis Aleatórias

Uma variável aleatória pode ser classificada em:

- Variável aleatória **discreta**
- Variável aleatória **contínua**

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Variável Aleatória Discreta

Uma v.a. é discreta quando o conjunto de valores possíveis que ela assume for finito ou numerável de possibilidades.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Variável Aleatória Discreta: Exemplo 1

Considere-se o sexo (característica) das crianças em famílias com três filhos (*M*: masculino e *F*: feminino).

**<u>Espaço amostral</u>**:

$$\Omega = \{\underset{\omega_1}{(MMM)}, \underset{\omega_2}{(MMF)}, \underset{\omega_3}{(MFM)}, \underset{\omega_4}{(FMM)}, \underset{\omega_5}{(MFF)}, \underset{\omega_6}{(FMF)}, \underset{\omega_7}{(FFM)}, \underset{\omega_8}{(FFF)}\}$$

Defina-se a v.a. $X$: nº de crianças do sexo masculino ($M$).

| $\Omega$ | $MMM$ | $MMF$ | $MFM$ | $FMM$ | $MFF$ | $FMF$ | $FFM$ | $FFF$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 |

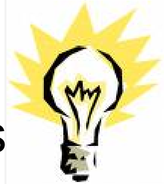
$\rightarrow$ Então $X$ assume valores no conjunto {0, 1, 2, 3}, logo é uma variável aleatória discreta.

# Variável Aleatória Contínua

Uma v.a. é contínua quando o conjunto de valores possíveis que ela assume for não enumerável.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Variável Aleatória Contínua: Exemplo



Considere-se o tempo de vida, em horas, das lâmpadas produzidas por uma fábrica.

Defina-se a v.a. $T$: tempo de vida, em horas, de uma lâmpada que foi escolhida, ao acaso, da fábrica.

$\rightarrow$ Então, $T$ é uma variável aleatória contínua que assume qualquer valor real não negativo.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Função Massa de Probabilidade

**Função massa de probabilidade (f.m.p):** É a função que atribui a cada valor $x_i$ da v. a. discreta $X$ a sua probabilidade de ocorrência e pode ser representada pela tabela:

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $P(X=x_1)$ | $P(X=x_2)$ | ... | $P(X=x_n)$ |

Uma função massa de probabilidade deve satisfazer:

$$\boxed{0 \leq P(X = x_i) \leq 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1}$$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Função Massa de Probabilidade: Exemplo 1

Defina-se a v.a. $X$: nº de crianças do sexo masculino em famílias com três filhos (*M*: masculino e *F*: feminino).

| $\Omega$ | $MMM$ | $MMF$ | $MFM$ | $FMM$ | $MFF$ | $FMF$ | $FFM$ | $FFF$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Acontecimentos independentes

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Função Massa de Probabilidade: Resumindo...

- **Função de probabilidade de uma variável discreta X:**

Se X é uma v.a. discreta, que assume valores distintos $x_1$, $x_2, \ldots$, $x_n, \ldots$, então a função de probabilidade (f.p.) de X é definida como

$$\boxed{f(x) = p(x) = \begin{cases} P[X = x] & \text{se } x = x_i \\ 0 & \text{se } x \neq x_i \end{cases}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ldots}$$

e deve satisfazer as seguintes condições:

1. $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$;
2. Se n finito, $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$.

Caso n infinito, $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ terá de ser uma série convergente de soma 1.

Ao conjunto de pares ordenados $(x_i, f(x_i))$, i =1,2,...,n,..., designa-se por **distribuição de probabilidades da variável aleatória**.

# Variável Aleatória Discreta: Exemplo 2

O Departamento de Estatística é formado por 35 professores, sendo 21 homens e 14 mulheres. Uma comissão de 3 professores será constituída sorteando, ao acaso, três membros do departamento.

Qual é a probabilidade da comissão ser formada por ***pelo menos duas mulheres***?

Vamos definir a v.a.

$X$: nº de mulheres na comissão.

Quais são os possíveis valores que $X$ pode assumir?

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Variável Aleatória Discreta: Exemplo 2

| Espaço amostral | Probabilidade | $X$ |
|---|---|---|
| (HHH) | $\frac{21}{35}\times\frac{20}{34}\times\frac{19}{33}=0{,}203$ | 0 |
| (HHM) | $\frac{21}{35}\times\frac{20}{34}\times\frac{14}{33}=0{,}150$ | 1 |
| (HMH) | $\frac{21}{35}\times\frac{14}{34}\times\frac{20}{33}=0{,}150$ | 1 |
| (MHH) | $\frac{14}{35}\times\frac{21}{34}\times\frac{20}{33}=0{,}150$ | 1 |
| (HMM) | $\frac{21}{35}\times\frac{14}{34}\times\frac{13}{33}=0{,}097$ | 2 |
| (MHM) | $\frac{14}{35}\times\frac{21}{34}\times\frac{13}{33}=0{,}097$ | 2 |
| (MMH) | $\frac{14}{35}\times\frac{13}{34}\times\frac{21}{33}=0{,}097$ | 2 |
| (MMM) | $\frac{14}{35}\times\frac{13}{34}\times\frac{12}{33}=0{,}056$ | 3 |

Acontecimentos dependentes

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Função Massa de Probabilidade: Exemplo 2

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | 0,203 | 0,450 | 0,291 | 0,056 |

Assim, tem-se $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = 0{,}291 + 0{,}056 = 0{,}347$.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Variável Aleatória Discreta: Exemplo 3

Um dado é lançado duas vezes, de forma independente. Qual é a probabilidade da ***soma dos pontos nos dois lançamentos ser menor do que 6***?

$$
\begin{aligned}
\Omega = \{&(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),\\
&(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),\\
&(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),\\
&(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),\\
&(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),\\
&(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}.
\end{aligned}
$$

*Qual é a probabilidade de cada ponto $w_i$ de $\Omega$ ?*

Admitindo que o dado é perfeitamente homogêneo e sendo os lançamentos independentes,

$$P(w_i) = 1/36 \text{ , qualquer } w_i \in \Omega.$$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Função Massa de Probabilidade: Exemplo 3

Função massa de probabilidade de $X$:

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

| | | **$2^0$. lançamento** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| **$1^0$. Lançamento** | **1** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | **2** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| | **3** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | **4** | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | **5** | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | **6** | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

$X$: Soma dos pontos nos dois lançamentos do dado

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Função Massa de Probabilidade: Exemplo 3

$X$: soma dos pontos nos dois lançamentos do dado.

Função massa de probabilidade de $X$:

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

Então, a probabilidade da soma dos pontos nos dois lançamentos ser menor do que 6 é

$$P(X < 6) = P(X=5) + P(X=4) + P(X=3) + P(X=2)$$
$$= 4/36 + 3/36 + 2/36 + 1/36$$
$$= 10/36 = 0{,}278$$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Função Massa de Probabilidade: Outros Exemplos

Podemos estar interessados em outras variáveis aleatórias definidas para o mesmo espaço amostral.

$Y$: valor máximo obtido nos dois lançamentos do dado.

| $y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(Y = y)$ | 1/36 | 3/36 | 5/36 | 7/36 | 9/36 | 11/36 |

$Z$: diferença entre os pontos do 2º e do 1º lançamento do dado.

| $z$ | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(Z = z)$ | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Variável Aleatória Discreta: Exemplo 3

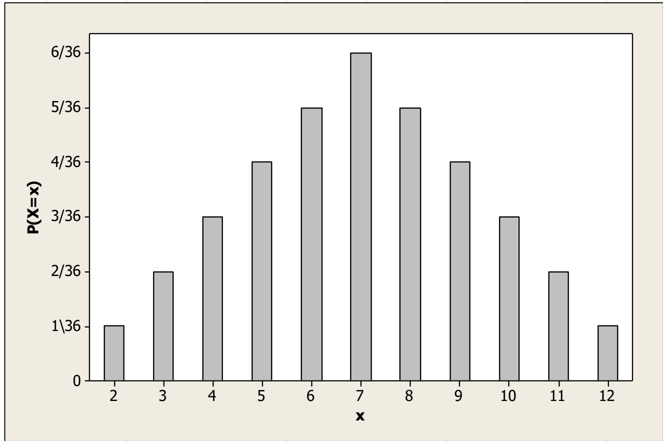
*Qual é o valor médio da soma dos pontos ($X$) no lançamento de dois dados?*

$\Omega$ = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

$\Rightarrow$ 36 pontos igualmente prováveis

Representação algébrica e gráfica da função massa de probabilidade da v.a. X

| $x$ | $P(X = x)$ |
|---|---|
| 2 | 1/36 |
| 3 | 2/36 |
| 4 | 3/36 |
| 5 | 4/36 |
| 6 | 5/36 |
| 7 | 6/36 |
| 8 | 5/36 |
| 9 | 4/36 |
| 10 | 3/36 |
| 11 | 3/36 |
| 12 | 1/36 |




https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Variável Aleatória Discreta: Valor Médio

**Valor Esperado (média populacional):** Dada a v.a. $X$, assumindo os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, chamamos de **valor médio**, ***valor esperado*** ou ***esperança matemática de $X$*** o valor

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + \ldots + x_n \times P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)$$

Notação: $\mu = E(X)$

Seja $X$ uma variável aleatória discreta que assume valores em $\mathcal{R}_X$ com função de probabilidade $p(x)$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Temos então que

$$\boxed{\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x_i \in \mathcal{R}_X} g(x_i)p(x_i) = \sum_{x_i \in \mathcal{R}_X} g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i).}$$

# Valor Médio da V.a. Discreta: Exemplo 3

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

No exemplo, para média da v.a. $X$ (soma de pontos), tem-se:

$$E(X) = 2\times(1/36) + 3\times(2/36) + \ldots + 11\times(2/36) + 12\times(1/36)$$
$$= 252/36 = 7,$$

ou seja, em média, a soma dos pontos no lançamento dos dois dados é igual a 7.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Variável Aleatória Discreta: Variância

**Variância:** É o valor esperado da v.a. $(X - E(X))^2$, ou seja, se $X$ assume os valores $x_1, x_2, ..., x_n$, então

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 \times P(X = x_i)$$

Notação: $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$.

Da relação acima, tem-se que

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

# Momentos

- **Definição 3.9 – Momento de ordem *k* em relação à origem**

$$\mu_k' = E(X^k) \qquad \text{(se existir)}$$

Observações:

- Trata-se do valor esperado da função $\psi(X) = X^k$.
- No caso discreto $E(X^k) = \sum_{x \in D} x^k f_X(x)$ enquanto no caso contínuo $E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x) dx$

- **Definição 3.10 – Momento de ordem *k* em relação à média**

$$\mu_k = E\left[(X - \mu)^k\right] \qquad \text{(se existir)}$$

Murteira et al (2015)

# Variável Aleatória Discreta: Desvio Padrão

**Desvio Padrão:** É definido como a raiz quadrada positiva da variância, isto é,

$$\mathrm{DP}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Notação: $\sigma = \mathrm{DP}(X).$

# Variância da V.a. Discreta: Exemplo 3

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

$$\mathrm{Var}(X) = (2-7)^2 \times \frac{1}{36} + (3-7)^2 \times \frac{2}{36} + \ldots + (11-7)^2 \times \frac{2}{36} + (12-7)^2 \times \frac{1}{36}$$

$$= \frac{210}{36} = 5{,}83.$$

Alternativamente, poderíamos calcular

$$E(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \ldots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36}$$

$$= \frac{1974}{36} = 54{,}83$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

e, portanto, $\mathrm{Var}(X) = 54{,}83 - 7^2 = 5{,}83$.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Propriedades do Valor Médio e Variância

1) Se $X = a$, em que $\underline{a}$ é uma constante, então

$$E(X) = a \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Var}(X) = 0.$$

2) Se $Y = aX + b$, em que $a$ e $b$ são constantes, então

$$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$$

e

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X).$$

# Propriedades do Valor Médio e Variância (Cont.)

3) Sejam $X$ e $Y$ duas variáveis quaisquer, então

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

**P4.** Sejam $n$ variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$. Então,

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \ldots + \mathbb{E}(X_n).$$

4) Sejam $X$ e $Y$ duas variáveis independentes, então

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

**P4)** Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes. Então,

$$\mathrm{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \ldots + \mathrm{Var}(X_n).$$

# Variável Aleatória Discreta: Moda

**Moda**: A moda de uma variável aleatória discreta $X$, designada por $mo$, corresponde ao ponto de máximo da função massa de probabilidade de $X$

$$mo = \max_x P(X = x).$$

A moda de uma variável aleatória discreta **nem sempre é única**.

Slides do Professor Manuel Scotto do IST

# Variável Aleatória Discreta: Covariância

**Definição 4.2.1:** Sejam $X$ e $Y$ variáveis aleatórias integráveis. Então a covariância entre X e Y é definida por

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))],$$

**Teorema 4.2.1:** Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias integráveis. Então,

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)] + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j).$$

Em particular se $Cov(X_i, X_j) = 0$ para $i \neq j$ então

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

**Definição 4.2.2:** Seja X e Y variáveis aleatórias integráveis então o coeficiente de correlação entre X e Y é dado por

$$\rho(X, Y) := \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y - \mathbb{E}(Y)}{\sigma_Y}\right)\right]$$

**Proposição 4.2.1:** O coeficiente de correlação é independente da escola e transação da variáveis, ou seja,

$$\rho(X, Y) = \rho(aX + b, cY + d)$$

# Função de Distribuição

- **Função de distribuição de uma variável aleatória discreta X:**

Define-se função de distribuição (f.d.) de uma variável aleatória X como

$$\boxed{F(x)=P[X \leq x].}$$

Esta função tem domínio $\mathbb{R}$, conjunto de chegada [0,1] e verifica as seguintes propriedades:

1. $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$;
2. $F(x_1) \leq F(x_2), \forall x_1, x_2: x_1 < x_2$ (é uma função monótona não decrescente);
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
4. $P[x_1 < X \leq x_2] = F(x_2) - F(x_1), \forall x_1, x_2: x_1 < x_2$.

A **Função distribuição** é uma função contínua à direita.

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

# Função de Distribuição: Notas

1. $P(X \in B) = \sum_{x_i \in B} f_X(x_i)$;
2. $F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i)$;
3. $f_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-)$, onde $F_X(x^-) \equiv P(X < x)$;
4. $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) + f_X(a)$;
5. $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) - f_X(b)$:
6. $P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a) - f_X(b) + f_X(a)$;
7. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Notas de Probabilidades e Estatística dos Professores Giovani Silva e Carlos Daniel

# Função Massa de Probabilidade: Exemplo 4

X = número de vezes que saiu cara em três lançamentos de uma moeda,

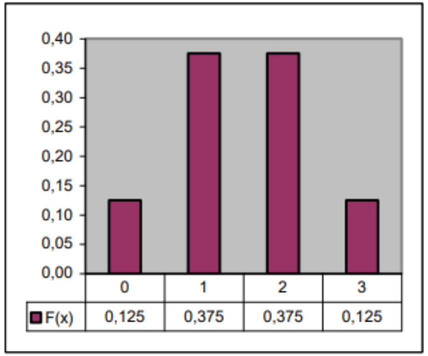
$P[X = 0] = P[(C \cap C \cap C)] = \frac{1}{8}$

$P[X = 1] = P[(F \cap C \cap C) \cup (C \cap F \cap C) \cup (C \cap C \cap F)] = \frac{3}{8}$

$P[X = 2] = P[(F \cap F \cap C) \cup (F \cap C \cap F) \cup (C \cap F \cap F)] = \frac{3}{8}$

$P[X = 3] = P[(F \cap F \cap F)] = \frac{1}{8}$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |




Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

# Função de Distribuição: Exemplo 4

$$F(0) = P[X \leq 0] = \sum_{x \leq 0} f(x) = \frac{1}{8};$$

$$F(1) = P[X \leq 1] = \sum_{x \leq 1} f(x) = \frac{4}{8}$$

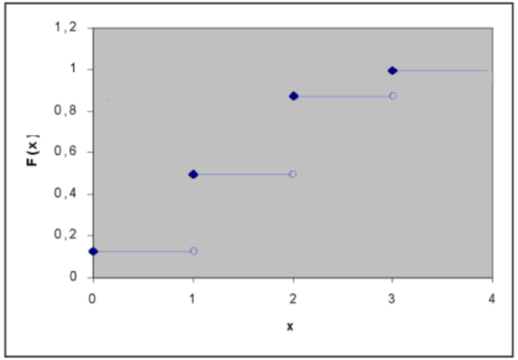
$$F(2) = P[X \leq 2] = \sum_{x \leq 2} f(x) = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = P[X \leq 3] = \sum_{x \leq 3} f(x) = 1$$

A representação gráfica da função distribuição de uma variável aleatória é "em escada"

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{8}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8}, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)



# Variáveis Aleatórias Discretas: Exercícios

2

Variável Aleatória, Função de Distribuição, Função Massa de Probabilidade, Valor Esperado, Moda, Variância e Quantis

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

**3.2** Numa fábrica existem três máquinas iguais de uma mesma marca, que trabalham independentemente. A probabilidade de cada máquina avariar num dado espaço de tempo é 0.1. Seja $X$ a variável aleatória que representa o número de máquinas que findo esse período de tempo estão a trabalhar. Determine:

(a) A função de probabilidade de $X$.

(b) A função de distribuição de $X$.

(c) O valor esperado, moda, mediana e variância de $X$.

# Exercício 3.2 (a): Variável Aleatória

- **Experiência aleatória**

  Classificação de 3 máquinas (que funcionam de forma independente) quanto a estarem avariadas ($A$) ou não ($\overline{A}$).

- **Eventos chave**

  $A$ = máquina avariada

  $\overline{A}$ = máquina a trabalhar

- **Probabilidades**

  $P(A) = 0.1$

  $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.1 = 0.9$

- **Espaço de resultados**

  $\Omega = \{A\,A\,A, \quad \overline{A}\,A\,A, A\,\overline{A}\,A, A\,A\,\overline{A}, \quad \overline{A}\,\overline{A}\,A, \overline{A}\,A\,\overline{A}, A\,\overline{A}\,\overline{A}, \quad \overline{A}\,\overline{A}, \overline{A}\}.$

  $A\,A\,A \equiv A_1 \cap A_2 \cap A_3$ (1a., 2a. e 3a. máquinas avariadas)

  etc.

  $\#\Omega = 2^3 = 8$ (eventos elementares)

- **V.a. de interesse**

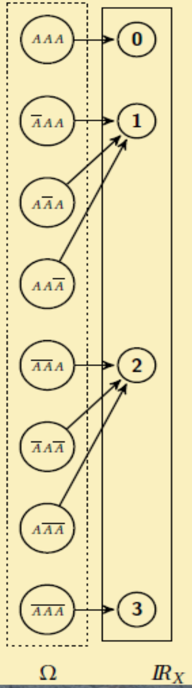
  $X$ = número de máquinas que findo o período estão a trabalhar

  $X : \Omega \to \mathbb{R}_X$

# Exercício 3.2 (a): Contradomínio da V.a.

- **Contradomínio e representação esquemática de $X$**

  Atendendo ao número de máquinas, os valores possíveis de $X$ são $0, 1, 2, 3$, i.e., $\mathbb{R}_X = \{0, 1, 2, 3\}$.



# Exercício 3.2 (a): Função Massa de Probabilidade

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= P(\text{nenhuma máquina a trabalhar}) \\
&= P(\text{três máquinas avariadas}) \\
&= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
&= P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) && [\text{eventos completamente independentes}] \\
&= 0.1^3 && [\text{eventos equiprováveis}] \\
&= 0.001
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= P(\text{1 máquina a trabalhar}) \\
&= P(\text{duas máquinas avariadas}) \\
&= P\left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right) + P\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) + P\left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right) \\
&= P(A_1) \times P(A_2) \times P(\overline{A_3}) + P(A_1) \times P(\overline{A_2}) \times P(A_3) + P(\overline{A_1}) \times P(A_2) \times P(A_3) \\
& && [\text{eventos completamente independentes}] \\
&= 3 \times (1-0.1) \times 0.1^2 && [\text{eventos equiprováveis}] \\
&= 0.027
\end{aligned}$$

# Exercício 3.2 (a): Função Massa de Probabilidade

$$
\begin{aligned}
P(X=2) &= P(\text{2 máquinas a trabalhar}) \\
&= P(\text{1 máquina avariada}) \\
&= P\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) \\
&= P(A_1) \times P(\overline{A_2}) \times P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \times P(A_2) \times P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \times P(\overline{A_2}) \times P(A_3) \\
& \qquad \text{[eventos completamente independentes]} \\
&= 3 \times 0.1 \times (1-0.1)^2 \times \qquad \text{[eventos equiprováveis]} \\
&= 0.243
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X=3) &= P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right) \\
&= P(\overline{A_1}) \times P(\overline{A_2}) \times P(\overline{A_3}) \qquad \text{[eventos completamente independentes]} \\
&= (1-0.1)^3 \qquad \text{[eventos equiprováveis]} \\
&= 0.729.
\end{aligned}
$$

# Exercício 3.2 (a): Função Massa de Probabilidade

- **F.p. de** $X$ (cont.)

$$P(X=x)=\begin{cases}0.001, & x=0\\ 0.027, & x=1\\ 0.243, & x=2\\ 0.729, & x=3\\ 0, & \text{outros valores de x}\end{cases}$$

Seja X uma variável aleatória discreta assumindo valores em $R_X$ = {x1, x2, ...}

A função (massa de probabilidade) de X é dada por

$$f_X(x) = P(X = x)$$
$$= \begin{cases} P(X = x_i), & x = xi \in R_X \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

- **Obs.** — Alternativamente, poderíamos tirar partido do facto de $X \sim \text{Binomial}(n=3, p=0.9)$, logo

$$P(X=x) \overset{form.}{=} \binom{3}{x} 0.9^x (1-0.9)^{3-x},\ x = 0.1, 2, 3.$$

$0 \le f_X(x) \le 1, \forall\, x \in \mathcal{R}$

$$\sum_{x \in \mathcal{R}} f_X(x) = 1$$

Escusado será dizer que obteríamos o mesmo resultado.

A distribuição Binomial será abordada mais à frente!!!

# Exercício 3.2 (b): Função de Distribuição

- **F.d. de** $X$

Comecemos por preencher a tabela abaixo com alguns valores da f.d. de $X$.

| $x$ | $F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$ |
|---|---|
| -0.5 | $F_X(-0.5) = P(X \le -0.5) = 0$ |
| 0 | $F_X(0) = P(X \le 0) = P(X = 0) = 0.001$ |
| 0.3 | $F_X(0.3) = P(X \le 0.3) = P(X = 0) = 0.001$ |
| 1 | $F_X(1) = P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.001 + 0.027 = 0.028$ |
| 1.4 | $F_X(1.4) = P(X \le 1.4) = P(X \le 1) = 0.028$ |
| 2 | $F_X(2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.001 + 0.027 + 0.243 = 0.271$ |
| 2.8 | $F_X(2.8) = P(X \le 2) = 0.271$ |
| 3 | $F_X(3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$ $= 0.001 + 0.027 + 0.243 + 0.729 = 1$ |
| 10.5 | $F_X(10.5) = P(X \le 3) = 1$ |

Podemos então concluir que:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.001, & 0 \le x < 1 \\ 0.028, & 1 \le x < 2 \\ 0.271, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}$$

# Exercício 3.2 (c): Valor Esperado e Moda

- **Valor esperado de $X$**

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=0}^{3} x \times P(X=x) \\
&= 0 \times 0.001 + 1 \times 0.027 + 2 \times 0.243 + 3 \times 0.729 \\
&= 2.7
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{P(X=x) = \begin{cases} 0.001, & x=0 \\ 0.027, & x=1 \\ 0.243, & x=2 \\ 0.729, & x=3 \\ 0, & \text{outros valores de x} \end{cases}}
$$

- **Moda de $X$**

  Represente-se a moda de $X$ por $mo(X)$. Então

$$
mo(X): \quad P[X = mo(X)] = \max_{x \in \{0,1,2,3\}} P(X=x).
$$

  Atendendo a que $P(X=3) = 0.729$ é superior a qualquer dos restantes valores da f.p. de $X$, temos que o valor mais frequente de $X$ é efectivamente $mo(X) = 3$.

# Exercício 3.2 (c): Mediana

- **Mediana de $X$**

  Represente-se a mediana de $X$ por $me(X)$. Então

$$me(X) \quad : \quad \frac{1}{2} \leq F_X[me(X)] \leq \frac{1}{2} + P[X = me(X)] \qquad (1)$$

$$F_X[me(X)^-] \leq \frac{1}{2} \leq F_X[me(X)]. \qquad (2)$$

Ora, tirando partido da definição de mediana em (1) e do facto de

$$\frac{1}{2} \leq F_X(3) \stackrel{(a)}{=} 1 \quad \leq \quad \frac{1}{2} + P(X = 3) = \frac{1}{2} + 0.729 = 1.229,$$

concluímos que $me(X) = 3$.

Em alternativa, notemos que

$$F_X(3) = P(X \leq 3) \stackrel{(a)}{=} 1 \geq \frac{1}{2};$$

mais, de uma consulta da f.d. de $X$ tem-se

Podemos então concluir que:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.001, & 0 \leq x < 1 \\ 0.028, & 1 \leq x < 2 \\ 0.271, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

# Exercício 3.2 (c): Mediana

$$F_X(3^-) = F_X(2) = 0.271 \leq \frac{1}{2}.$$

Logo

$$F_X(3^-) \leq \frac{1}{2} \leq F_X(3),$$

pelo que o resultado (2) leva-nos a concluir que $me(X) = 3$.

Podemos então concluir que:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.001, & 0 \leq x < 1 \\ 0.028, & 1 \leq x < 2 \\ 0.271, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

# Exercício 3.2 (c): Variância

- **Variância de $X$**

  Como o valor esperado de $X$ é igual a $E(X) = 2.97$ e o 2o. momento de $X$ é dado por

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{x=0}^{3} x^2 \times P(X=x) \\ &= 0^2 \times 0.01 + 1^2 \times 0.027 + 2^2 \times 0.243 + 3^2 \times 0.729 \\ &= 7.56, \end{aligned}$$

  segue-se que

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= 7.56 - 2.7^2 \\ &= 0.27. \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X=x) = \begin{cases} 0.001, & x=0 \\ 0.027, & x=1 \\ 0.243, & x=2 \\ 0.729, & x=3 \\ 0, & \text{outros valores de x} \end{cases}}$$

- **Obs.** — Alternativamente, poderíamos ter tirado partido do facto de $X \sim \text{Binomial}(n=3, p=0.9)$ e concluir que

$$\begin{aligned} E(X) &\overset{form.}{=} n\,p = 3 \times 0.9 = 2.7 \\ V(X) &\overset{form.}{=} n\,p\,(1-p) = 3 \times 0.9 \times (1-0.9) = 0.27. \end{aligned}$$

# Obrigada!

## Questões?