Simulação e Otimização

Capítulo 1: Soluções incompletas

Ano letivo 2023/2024

1. O PL da alínea (b) é uma relaxação do da alínea (a) e o PL da alínea (a) é relaxação do da alínea (d).

2. (a) $x^{RL} = (3,0) \implies z = z^{RL} = 15$

   (b) $x^{RL} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) \implies z^{RL} = \frac{24}{5} \leq z$

3. Por exemplo,

$$\begin{aligned} &\min 3x_1 - x_2 \\ &\text{s.a: } x_1 + x_2 \leq 6 \\ &\quad\quad 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ &\quad\quad x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ &\quad\quad x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

4. (a)

$$\begin{aligned} \max z &= 10u + (16-8u)x_1 + (10-2u)x_2 - ux_3 + (4-4u)x_4 \\ \text{sujeito a: } & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_3 + x_4 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\} \text{ e } u \geq 0 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} \min z &= 3u_1 + 3u_2 + (3 - 2u_1 - 5u_2)x_1 + (2 - 5u_1 - 2u_2)x_2 \\ \text{sujeito a: } & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0 \text{ e } u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   Nota: Enunciado errado! $x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0$

5. (a)
   i. $x^* = (0,1,0,0), z(2) = 26$
   ii. $x^* = (1,0,0,1), z(0.5) = 19$
   iii. $x^* = (1,0,0,0), z(1) = 18$
   iv. $x^* = (0,0,0,0), z(2) = 60 \implies$ Melhor limite $z(1)$

   (b)
   i. $x^* = (8,0), z(1,1) = -26$
   ii. $x^* = (0,4), z(3/8,3/8) = -1/4$
   iii. $x^* = (8,0), z(0,1) = -13$
   iv. $x^* = (0,0), z(0,1/2) = 3/2 \implies$ Melhor limite $z(0,1/2)$

6. Considere o seguinte problema de PLIM.

(a)

$$\begin{aligned}\min z(u_1,u_2) = & 41u_1 + (7-u_1-u_2)x_{11} + (8-u_2)x_{12} + (3-u_1)x_{21} + 5x_{22} + (7-u_1)x_{31} + 9x_{32} + \\ & (150+38u_2)y_1 + 94y_2 + 105y_3 \\ \text{s. a: } & x_{12}+x_{22}+x_{32} \geq 55 \\ & x_{21}+x_{22} \leq 32y_2 \\ & x_{31}+x_{32} \leq 30y_3 \\ & y_i \in \{0,1\} \qquad i=1,2,3 \\ & x_{ij} \geq 0 \qquad i,j=1,2,3 \text{ e } u_1 \geq 0, u_2 \leq 0\end{aligned}$$

Por exemplo, $z(1,-1) = 426 \leq z$.

7.

$$z(u,v,y) = \max\{c(x) + u(b-Ax) + v(d-Dx) + y(t-Tx) : x \in X \cap \mathbb{Z}^n\}$$

$$w^{DL} = \min\{z(u,v,y) : u \leq 0, v \geq 0 \text{ e } y \text{ livre}\}$$

8. Considere o seguinte PLI.

$$\begin{aligned}(P) \equiv \max z = & x_1 + 10x_2 \\ \text{s.a: } & 4x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}\end{aligned}$$

(a) $x^{RL} = (0, 3/2)$ e $z^{RL} = 15$

(b)

$$\begin{aligned}\max z(u) = & 4u + (1-4u)x_1 + (10-u)x_2 \\ \text{s.a: } & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros.}\end{aligned}$$

i. $z(0) = 11$, $z(1/4) = 43/4$ e $z(4) = 22$.

ii. $z(u) = \begin{cases} 11-u, & 0 \leq u \leq 1/4 \\ 10+3u, & 1/4 \leq u \leq 10 \\ 4u, & u \geq 10 \end{cases}$

iii. $w^{DL} = z(1/4) = 43/4 \geq z$.

(c)

$$\begin{aligned}\max z(u) = & 3u + (1-u)x_1 + (10-2u)x_2 \\ \text{s.a: } & 4x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}\end{aligned}$$

.

i. Satisfaz pois desenhando a RA vemos que todos os pontos extremos são inteiros.

ii. Como satisfaz a propriedade de integralidade, $w^{DL} = z^{RL} = 15$.

9. (...)

10. (a) $x^* = (3,6)$ e $z = 39$.

(b) $x^* = (2, 2)$ e $z = 12$.

11. $x^* = (0, 13, 20, 7)$ e $z = 505$.

12. Considere o seguinte problema de PLI
    (a) $x^{RL} = (45/26, 12/26)$ e $z^{RL} = 33/26 \geq z$.
    (b) $x^* = (2, 1)$ e $z = 1$.
    (c) Seja $u \geq 0$. Considere

$$\begin{aligned} (P_u) \equiv \max z = & x_1 - x_2 + u(3 - 2x_1 + x_2) \\ \text{s.a: } & 6x_1 + 10x_2 \geq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

Para mostrar que $v(P_u) \geq v(P)$ basta mostrar que P_u é uma relaxação de P.
P_0 é ilimitado. $v(P_{1/2}) = 3/2$. $v(P_1) = 3$

13. (a) $\hat{z} = 31$ e $\underline{z} = 26$.
    (b) Cancelados: 8, 9 e 7. Ramificados: 4 e 6.

14. (a) $x^* = (7, 0)$ e $z = 21$.
    (b) $x^* = (2, 5)$ e $z = -1$.

15. i. Não é desigualdade válida.
    ii. Não é desigualdade válida.
    iii. É desigualdade válida mas não é corte.
    iv. É desigualdade válida e é corte.

16. (a) $x^* = (1, 1)$ e $z = 11$.
    (b) $X^* = (1, 0)$ e $z = 1$.

17. Corte de Gomory: $7x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 24$.

18. $x^* = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0)$.

19. $2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 1$

20. $x_1 + x_2 \leq 1$ e $x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$.

21. $y_1 + y_2 + y_3 \geq 1$

22. $x_i \leq y, \forall i \in \{1, \ldots, m\}$