Estatística I

Licenciatura em Gestão

2.º Ano/1.º Semestre

2023/2024

Aulas Teóricas N.ºs 3 e 4 (Semana 2)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teóricas (Semanas 1 a 3)	Aulas Teóricas (Semanas 3 a 5)	Aulas Teóricas (Semanas 5 a 7)	Aulas Teóricas (Semanas 8 a 13)
• **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	• **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Distribuições Teóricas • **Capítulo 6**: Amostragem. Distribuições por Amostragem.

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

https://cas.iseg.ulisboa.pt

Aula 1	Apresentação da disciplína. **Início do capítulo 1:** Experiência aleatória, espaço de resultados, acontecimento. Realização de acontecimento. Álgebra de acontecimentos. Axiomática de Kolmogorov. Propriedades da probabilidade. Exemplo. Interpretações do conceito de probabilidade. Regras de contagem: arranjos, combinações e permutações. A regra fundamental da contagem.
Aula 2	Esquema hipergeométrico e esquema binomial de amostragem. Noção de probabilidade condicionada. Exemplo. Regra da multiplicação das probabilidades. Partição do espaço de resultados. Teorema da probabilidade total.

Aula 3	Teorema de Bayes. Independência.
Aula 4	**Início do Capítulo 2**: variável aleatória, definição e exemplos. Função de distribuição. Propriedades.

Análise Combinatória

1

Análise Combinatória

A **Análise Combinatória** é a parte da Matemática que estuda métodos e técnicas que permitem resolver problemas relacionados com contagem.

Esta é muito utilizada nos estudos sobre probabilidade. A Análise Combinatória analisa as possibilidades e as combinações possíveis entre um conjunto de elementos.

Baseado: https://www.todamateria.com.br/analise-combinatoria/

Princípio Fundamental da Contagem

- **Princípio da Multiplicação**

  Se existirem n_1 resultados possíveis para um primeiro evento e n_2 para um segundo, então existem $n_1 \cdot n_2$ resultados possíveis para a seqüência dos dois eventos.

- **Princípio da Adição**

  Se A e B são eventos disjuntos com n_1 e n_2 resultados possíveis, respectivamente, então o número total de possibilidades para o evento "A ou B" é $n_1 + n_2$.

https://pt.slideshare.net/betencourt/anlise-combinatria-5777397

Princípio Fundamental da Contagem

- **Princípio da regra da soma**

  Para A e B conjuntos disjuntos, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

- **Princípio da regra do produto**

  Para A e B, temos o produto cartesiano de A e B:

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

https://pt.slideshare.net/betencourt/anlise-combinatria-5777397

Princípio/Regra da Multiplicação ou Multiplicativo

O **Princípio da Multiplicação,** também chamado de princípio multiplicativo, postula que:

“*quando um evento é composto por, por exemplo, 2 etapas sucessivas e independentes, de tal modo que as possibilidades da primeira etapa é x e as possibilidades da segunda etapa é y, resulta no número total de possibilidades de o evento ocorrer, dado pelo produto (x) . (y)*”.

Em resumo, no Princípio da Multiplicação, multiplica-se o número de opções entre as escolhas que lhe são apresentadas.

Baseado: https://www.todamateria.com.br/analise-combinatoria/

Princípio Fundamental da Contagem

$d_1 \longrightarrow x_1$ maneiras

E

Decisão d $\longleftarrow d_2 \longrightarrow x_2$ maneiras

E

$d_3 \longrightarrow x_3$ maneiras

Princípio Multiplicativo

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ maneiras

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/ifenem-2017/slides-solucao-lista-6

Princípio Fundamental da Contagem

$d_1 \longrightarrow x_1$ **maneiras**

OU

Decisão d $\longleftarrow d_2 \longrightarrow x_2$ **maneiras**

OU

$d_3 \longrightarrow x_3$ **maneiras**

$x_1 + x_2 + x_3$ **maneiras**

Princípio Aditivo

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/ifenem-2017/slides-solucao-lista-6

Princípio Multiplicativo

FIM
TCHAU
Apagão
MORTO

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/ifenem-2017/slides-solucao-lista-6

Princípio Aditivo

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/ifenem-2017/slides-solucao-lista-6

Princípio Fundamental da Contagem: Exemplo 1

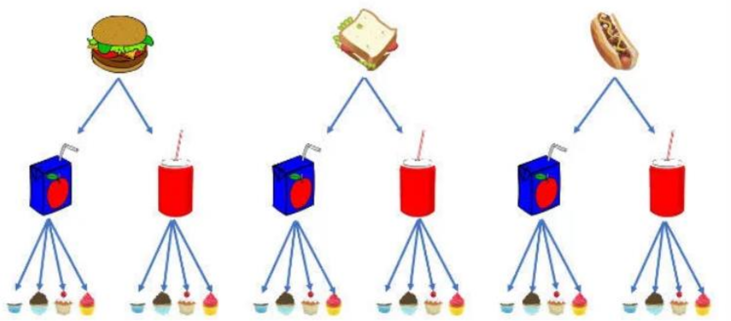
Exemplo

Uma lanchonete vende uma promoção de lanche a um preço único. No lanche, estão incluídos um sanduíche, uma bebida e uma sobremesa. São oferecidas três opções de sanduíches: hambúrguer especial, sanduíche vegetariano e cachorro-quente completo. Como opção de bebida, pode-se escolher 2 tipos: suco de maçã ou guaraná. Para a sobremesa, existem quatro opções: cupcake de cereja, cupcake de chocolate, cupcake de morango e cupcake de baunilha. Considerando todas as opções oferecidas, de quantas maneiras um cliente pode escolher o seu lanche?

Baseado: https://www.todamateria.com.br/analise-combinatoria/

Princípio Fundamental da Contagem: Exemplo 1

Podemos começar a resolução do problema apresentado construindo uma árvore de possibilidades, conforme ilustrado abaixo:



Acompanhando o diagrama, podemos diretamente contar quantos tipos diferentes de lanches podemos escolher. Assim, identificamos que existem 24 combinações possíveis.

Podemos ainda resolver o problema usando o princípio multiplicativo. Para determinar as diferentes possibilidades de lanches, basta multiplicar o número de opções de sanduíches, bebidas e sobremesa.

Total de possibilidades: 3.2.4 = 24

Baseado: https://www.todamateria.com.br/analise-combinatoria/

Fatorial

O Fatorial de um número natural é definido como o produto deste número por todos os seus antecessores. Utiliza-se o símbolo **!** para representar o fatorial de um número.

Define-se ainda que o fatorial de zero é igual a 1.

Exemplo

0! = 1

1! = 1

3! = 3.2.1 = 6

7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5 040

10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 3 628 800

Baseado: https://www.todamateria.com.br/analise-combinatoria/

Permutação

Permutar é **trocar n pessoas de n lugares** diferentes, ou seja, usa-se **todos** os elementos do conjunto.

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

$$P_n = n!$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/ifenem-2017/slides-solucao-lista-6

Combinação e Arranjo

Ao usar/escolher apenas uma **parte** dos elementos do conjunto, tem-se uma combinação (**sem ordem**) ou um arranjo (**com ordem**).

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/ifenem-2017/slides-solucao-lista-6

Para obter o arranjo simples de **n** elementos tomados, p a p ($p \leq n$), utiliza-se a seguinte expressão:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Arranjo

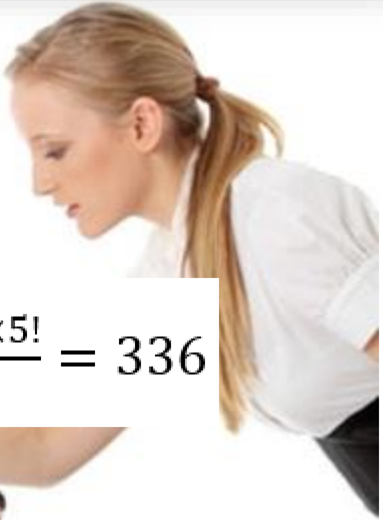
Escolher 3 funcionários entre os 8 disponíveis para assumir, respectivamente, os cargos de Supervisor, Tesoureiro e Marqueteiro (pessoa que trabalha em marketing).

E

E

$$\mathbf{8 \times 7 \times 6}$$

336 grupos distintos



$$A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 336$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/ifenem-2017/slides-solucao-lista-6

Combinação

Escolher 3 funcionários entre os 8 disponíveis para formar uma equipa administrativa.







https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/ifenem-2017/slides-solucao-lista-6

Combinação

Assim, para calcular uma combinação simples de *n* elementos tomados p a p (p ≤ n), utiliza-se a seguinte expressão:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Escolher 3 funcionários entre os 8 disponíveis para formar uma equipa administrativa.

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{3!5!} = 56$$

$$\frac{8 \times 7 \times \cancel{6}}{\cancel{3!}} =$$

56 equipas distintas

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/ifenem-2017/slides-solucao-lista-6

Análise Combinatória: Resumindo...

Vai usar todos ou só uma parte?

Todos = Permutação

Se mudar a ordem da parte escolhida faz diferença?

Sim = Arranjo (princípio multiplicativo)
Não = Combinação (tirar as repetições)

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/ifenem-2017/slides-solucao-lista-6

Permutações

As **permutações** são agrupamentos ordenados, onde o número de elementos (n) do agrupamento é igual ao número de elementos disponíveis.

Note que a permutação é um caso especial de arranjo, quando o número de elementos é igual ao número de agrupamentos. Desta maneira, o denominador na fórmula do arranjo é igual a 1 na permutação.

Assim a permutação é expressa pela fórmula:

$$P_n = n!$$

Baseado: https://www.todamateria.com.br/analise-combinatoria/

Permutações: Exemplo

Exemplo

Para exemplificar, vamos pensar de quantas maneiras diferentes 6 pessoas podem se sentar em um banco com 6 lugares.

Como a ordem em que irão se sentar é importante e o número de lugares é igual ao número de pessoas, iremos usar a permutação:

$$P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$$

Logo, existem **720** maneiras diferentes para as 6 pessoas sentarem neste banco.

Baseado: https://www.todamateria.com.br/analise-combinatoria/

Arranjos

Nos **arranjos**, os agrupamentos dos elementos dependem da ordem e da natureza dos mesmos.

Para obter o arranjo simples de **n** elementos tomados, p a p ($p \leq n$), utiliza-se a seguinte expressão:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Baseado: https://www.todamateria.com.br/analise-combinatoria/

Arranjos: Exemplo

Exemplo

Como exemplo de arranjo, podemos pensar na votação para escolher um representante e um vice-representante de uma turma, com 20 alunos. Sendo que o mais votado será o representante e o segundo mais votado o vice-representante.

Dessa forma, de quantas maneiras distintas a escolha poderá ser feita? Observe que nesse caso, a ordem é importante, visto que altera o resultado.

$$A_{20,2} = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20.19.\cancel{18!}}{\cancel{18!}} = 380$$

Logo, o arranjo pode ser feito de **380** maneiras diferentes.

Baseado: https://www.todamateria.com.br/analise-combinatoria/

Combinações

As **combinações** são subconjuntos em que a ordem dos elementos não é importante, entretanto, são caracterizadas pela natureza dos mesmos.

Assim, para calcular uma combinação simples de *n* elementos tomados p a p ($p \le n$), utiliza-se a seguinte expressão:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Baseado: https://www.todamateria.com.br/analise-combinatoria/

Combinações: Exemplo

Exemplo

A fim de exemplificar, podemos pensar na escolha de 3 membros para formar uma comissão organizadora de um evento, dentre as 10 pessoas que se candidataram.

De quantas maneiras distintas essa comissão poderá ser formada?

Note que, ao contrário dos arranjos, nas combinações a ordem dos elementos não é relevante. Isso quer dizer que escolher: Maria, João e José, é equivalente a escolher: João, José e Maria.

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10.9.8.\cancel{7!}}{3!\,\cancel{7!}} = \frac{10.9.8}{3.2.1} = 120$$

Observe que para simplificar os cálculos, transformamos o fatorial de 10 em produto, mas conservamos o fatorial de 7, pois, desta forma, foi possível simplificar com o fatorial de 7 do denominador.

Assim, existem **120** maneiras distintas formar a comissão.

Baseado: https://www.todamateria.com.br/analise-combinatoria/

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

2.7 Numa fila de espera de autocarro estão 4 homens, 3 mulheres e 2 crianças. Qual a probabilidade de:

(a) As pessoas, dentro de cada um daqueles três grupos, estarem de seguida?

(b) As 2 crianças estarem juntas?

Exercício 2.7 (a)

Numa fila de espera de autocarro estão 4 homens, 3 mulheres e 2 crianças.

Acontecimento:

A: "As pessoas, dentro de cada um daqueles três grupos, estão de seguida."

$$P(A) = [3! \times (4! \times 3! \times 2!)]/9! = 1/210 = 1/210$$

Exercício 2.7 (b)

Numa fila de espera de autocarro estão 4 homens, 3 mulheres e 2 crianças

<u>Acontecimento</u>:

B: “As 2 crianças estão juntas.”

$$P(B) = (2! \times 8 \times 7!)/9! = 2/9$$

2! = Contagem de como as duas crianças estão organizadas entre si
8 = N.º de maneiras como as crianças se organizam com as outras 7 pessoas (arranjos de 8, 1 a 1) = 8!/(8-1)!
7! = Contagem de como as 7 pessoas (mulheres e homens) se organizam

Probabilidade Condicional, Teorema da Probabilidade Total e Teorema de Bayes

2

Probabilidade Condicional/Condicionada

– É quando um evento só acontece quando o outro evento do mesmo espaço amostral aconteceu (**condição de ocorrência**).

– A probabilidade de “A dado B”, “A se B” ou “A sabendo B” é a probabilidade de ocorrer A, quando o evento B ocorreu.

– O **espaço amostral** dos eventos A e B **reduz-se** com a condição de ocorrência.

Probabilidade Condicional (ou Probabilidade Condicionada)

Sejam A e B acontecimentos associados à mesma experiência aleatória. A probabilidade condicional de A dado que se observou B (ou probabilidade condicional de A se B), é o valor do quociente:

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\text{, com } P(B) \neq 0$$

Da mesma forma, tem-se

$$P(B\,|\,A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}\;.$$

Além disso, $P(\overline{A}\,|B)=1-P(A|B)$.

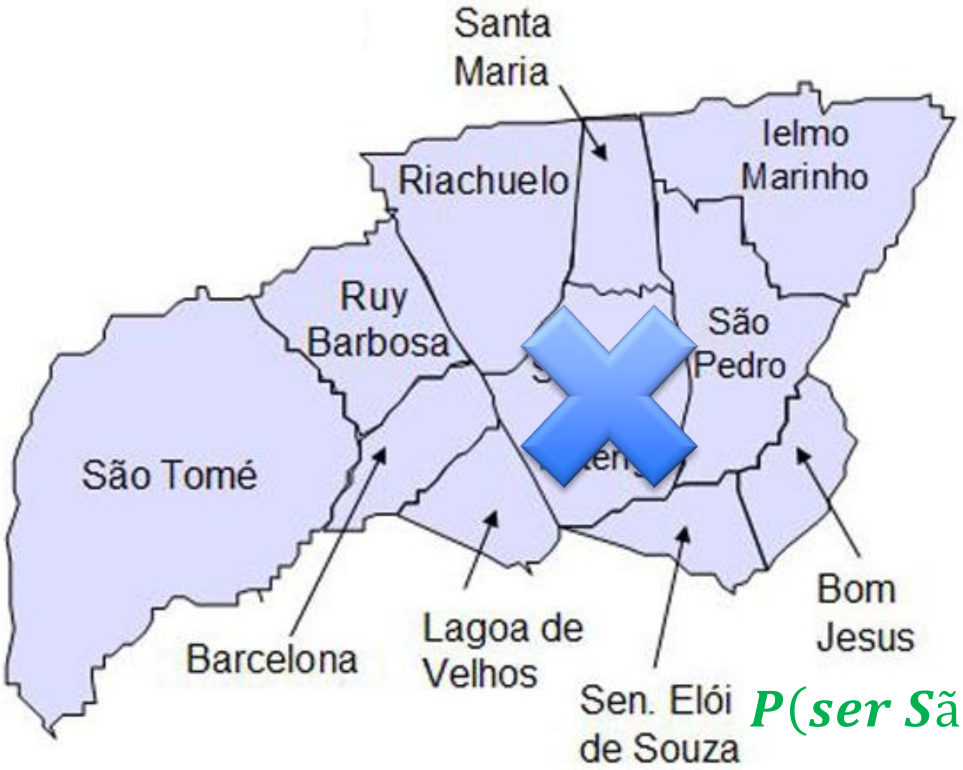
Probabilidade Condicional

$$P(A|B) = P(B|A)?$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \neq P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Condicional: Exemplo 1



Um estudante do IFRN é selecionado ao acaso, qual é a probabilidade dele ser de São Tomé, dado que ele não é de SPP?

$$P(ser\ São\ Tomé \mid Não\ é\ SPP) = \frac{1}{10}$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Condicional: Exemplo 2

	1ª vez	Já voo antes	Σ
Não conhecia	83	22	105
Já conhecia	23	12	35
Σ	106	34	140

Cada turista de uma viagem de avião respondeu a duas perguntas:

1. Já voou antes?
2. Já conhece a cidade de destino?

Selecionou-se um turista ao acaso, e verificou-se que ele nunca voou antes.

Qual é a probabilidade dele conhecer a cidade de destino?

$$P(Conhecer\ cidade|Nunca\ voou) = \frac{23}{106}$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Condicional: Exemplo 3

Sexo	Alfabetizada		Total
	Sim	Não	
Masc.	39.577	8.672	48.249
Fem.	46.304	7.297	56.601
Total	85.881	15.969	101.850

Qual é a probabilidade de um jovem escolhido ao acaso ser alfabetizado, sabendo que ele é do sexo feminino?

$$P(alfabetizado|Feminino) = \frac{46304}{56601}$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Condicional: Exemplo 4

<u>Exemplo:</u>

Num saco há 10 bolas, 5 brancas e 5 vermelhas. Qual é a probabilidade de retirar do saco ao acaso, uma bola branca?

$P(B1) = 5/10=0.5$

Sabendo que saiu bola branca, qual é a probabilidade de numa 2ª extracção sair bola branca?

$P(B2|B1)=4/9=0.4$

Probabilidade Conjunta ou Composta (ou Probabilidade de Interseção)

A probabilidade conjunta dos acontecimentos A e B é dada por (i.e., é o produto da probabilidade condicional pela probabilidade do condicionante)

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3 | A_1 \cap A_2) \times \ldots \times P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Os acontecimentos A e B são independentes, sse $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Nesse caso, tem-se $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$.

A definição de independência pode generalizar-se a mais de dois acontecimentos. Por exemplo, os acontecimentos A, B e C dizem-se mutuamente independentes se e só se

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$$

Obrigada!

Questões?