Simulação e Otimização

Teste Capítulo 1

17/10/2023 Ano letivo 2023/2024

1. (2,5 valores) Considere o seguinte problema de programação linear.

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeito a: } & 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 - 6x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   Construa uma relaxação do problema apresentado. Justifique que construiu uma relaxação.

2. Considere o seguinte problema de programação linear inteira (P).

$$\begin{aligned} (P) \qquad \max\ & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeito a: } & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 = 2 \qquad (*) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

   (a) (1,5 valores) Construa a relaxação Lagrangeana de (P) relaxando a restrição assinalada a $(*)$ e apresente o problema dual Lagrangeano.

   (b) (3,0 valores) Considere $u = -2$ e $u = 3$. Resolva a relaxação Lagrangeana para os valores de u admissíveis. O que pode concluir sobre o valor ótimo de (P)?

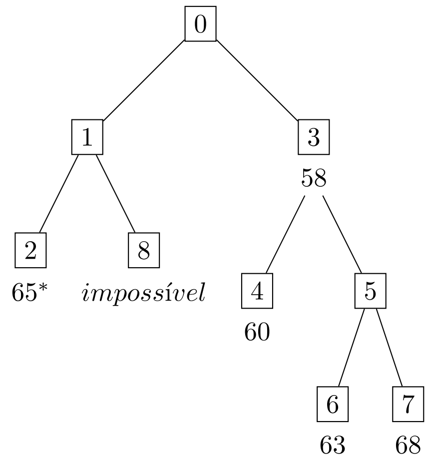
   (c) (2,0 valores) Defina a expressão da função dual Lagrangeana para $\frac{5}{2} \leq u \leq 3$.

3. (3,5 valores) Considere o seguinte problema de programação linear inteira.

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 8x_2 \\ \text{sujeito a: } & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

   Resolva utilizando o algoritmo de *branch-and-bound* até ao máximo de dois subproblemas (para além da relaxação linear). Se encontrou alguma solução admissível caracterize-a.

4. No processo de resolução de um problema de programação inteira de minimização pelo algoritmo de *branch-and-bound* obteve-se a seguinte árvore de enumeração. O número junto de cada nodo é o valor de um minorante do subproblema correspondente, sendo o valor ótimo do subproblema quando assinalado com (*).



Indique, justificando.

(a) (0,5 valores) O que pode concluir sobre o valor ótimo do problema original?

(b) (1,0 valores) O que pode concluir sobre os valores ótimos dos subproblemas associados aos nodos 1 e 5?

(c) (1,0 valores) Quais são os nodos que pode cancelar? Justifique.

5. (3,0 valores) Considere o problema de programação linear inteira (Q).

$$
\begin{aligned}
(Q) \qquad & \min x_1 + 2x_2 \\
\text{sujeito a: } & x_1 + x_2 \geq 4 \\
& \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2 \geq \frac{5}{2} \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}
$$

Sabendo que a solução ótima da relaxação linear é $x^{RL} = (\frac{15}{4}, \frac{1}{4})$, encontre um corte de Gomory que corte x^{RL} e mostre que corta x^{RL}.

6. (2 valores) Considere a seguinte seguinte formulação para uma instância do problema do saco-mochila.

$$
\begin{aligned}
& \max 8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 5x_4 \\
\text{sujeito a: } & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 5 \\
& x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}
$$

Apresente duas desigualdades de cobertura válidas para o problema apresentado em que uma delas é redundante na presença da outra.