Simulação e Otimização

Teste Capítulo 1

17/10/2023 Ano letivo 2023/2024

Tópicos de uma resolução incompleta

1. Por exemplo,

$$\begin{aligned}(REL) \equiv \max\ & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeito a: } & 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

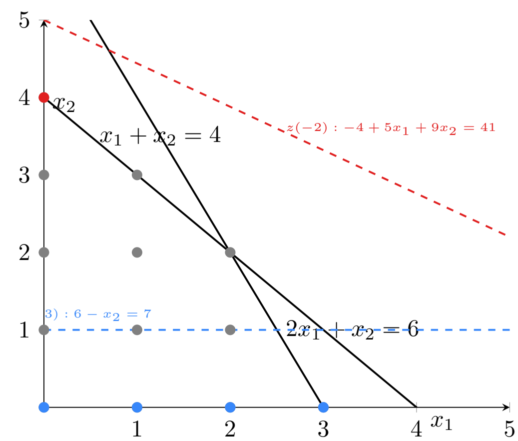
REL é uma relaxação do problema original porque: (i) a FO é igual, logo a FO de REL é maior ou igual que a FO do problema original para todos os pontos da RA do problema original; e (ii) a RA de REL é a RA do problema original removendo uma restrição, logo a RA do problema original está contida na RA de REL.

2. (a)

$$\begin{aligned}z(u) = \max\ & 3x_1 + 5x_2 + u(2 - x_1 - 2x_2) = 2u + (3-u)x_1 + (5-2u)x_2 \\ \text{sujeito a: } & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}\end{aligned}$$

$$w^{DL} = \min\{z(u) : u \text{ livre }\}$$

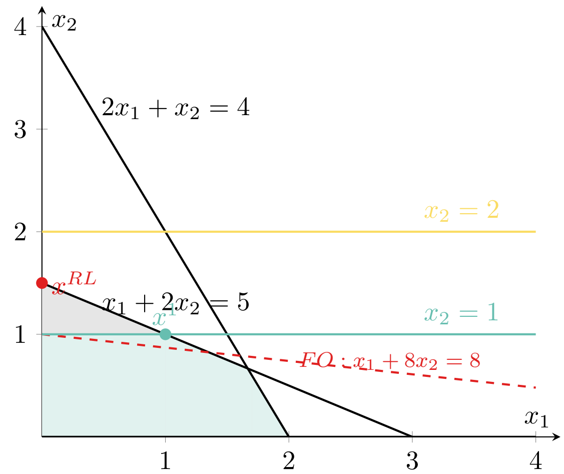
(b)

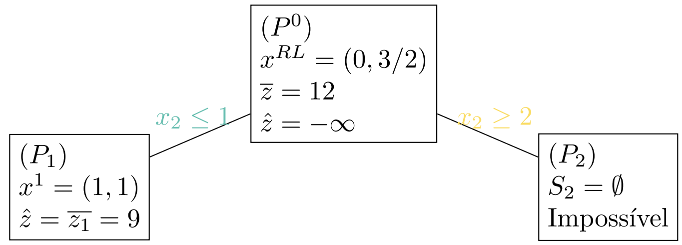


A RA são os pontos cinzentos.
$z(-2) = \max 2 \times (-2) + (3+2)x_1 + (5+4)x_2 = \max -4 + 5x_1 + 9x_2$
A SO de $z(-2)$ é $(0, 4)$ e $z(-2) = -4 + 5\times 0 + 9\times 4 = 32$.
$z(3) = \max 2\times 3 + (3-3)x_1 + (5-6)x_2 = \max 6 - x_2$
Existem SOs alternativas, que são os pontos $(x_1, 0)$, com $x_1 = 0, 1, 2, 3$ e $z(3) = 6 - 0 = 6$.
Logo, podemos concluir que $z \leq 6$.

(c) Para $\frac{5}{2} \leq u \leq 3$ temos $(3-u) \geq 0$ e $(5-2u) \leq 0$. Logo, a SO para a relaxação Lagrangeana com $\frac{5}{2} \leq u \leq 3$ é $(3, 0)$. Assim, a expressão da função dual Lagrangeana para $\frac{5}{2} \leq u \leq 3$ é

$$z(u) = 2u + (3-u)\times 3 + (5-2u)\times 0 = 9 - u.$$

3. 



Temos que x^1 é a SO do problema, pois não há subproblemas em aberto. Logo, $z = 9$.

4. (a) $60 \leq z \leq 65$.
   (b) $z^1 \leq 65$ e $58 \leq z^2 \leq 63$.
   (c) Podemos cancelar o subproblema 2 (encontrada SA), o 8 (impossível) e o 7 (existe uma SA com valor inferior a 68).

5. Escrevendo o sistema na forma aumentada obtemos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - y_1 = 4 \\ 1/2x_1 + 5/2x_2 - y_2 = 5/2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 - y_1 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 2y_2 = 5 \end{cases}$$

A SO da relaxação linear na forma aumentada é: $x^{RL} = (\frac{15}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0) \implies x_1$ e x_2 são VBs. O sistema em função de x_1 e x_2 fica:

$$\begin{cases} x_2 = 4 - x_1 + y_1 \\ x_1 = 5 - 5x_2 + 2y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 4 - 5 + 5x_2 - 2y_2 + y_1 \\ - \end{cases} \iff \begin{cases} -4x_2 = -1 - 2y_2 + y_1 \\ - \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = 1/4 - 1/4y_1 + 2/4y_2 \\ x_1 = 5 - 5(1/4 - 1/4y_1 + 2/4y_2) + y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 + 1/4y_1 - 2/4y_2 = 1/4 \\ x_1 - 5/4y_1 + 1/2y_2 = 15/4 \end{cases}$$

Como ambas as restrições têm TI fracionários, vamos escolher a associada a x_2 para gerar o corte de Gomory.

$$(\frac{1}{4} - 0)y_1 + (-\frac{1}{2} - (-1))y_2 \geq (\frac{1}{4} - 0) \iff y_1 + 2y_2 \geq 1$$

Reescrevendo o corte em função de x_1 e x_2 obtemos $2x_1 + 6x_2 \geq 10 \iff x_1 + 3x_2 \geq 5$, que corta a SO da relaxação linear pois $x_1^{RL} + 3x_2^{RL} = 15/4 + 3/4 < 5$.

6. Por exemplo, $x_1 + x_2 \leq 1$ e $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$ (redundante na presença da primeira).