ISEG Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

Estatística I

Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)
2.º Ano/1.º Semestre
2023/2024

Aulas Teórico-Práticas N.ºs 11 e 12 (Semana 6)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas TP (Semanas 1 e 3)	Aulas TP (Semanas 3 a 6)	Aulas TP (Semanas 7 a 9)	Aulas TP (Semanas 10 a 12)
• **Capítulo 1**: Análise Descritiva • **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	• **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Variáveis Aleatórias Especiais

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

https://cas.iseg.ulisboa.pt

3. Variáveis aleatórias unidimensionais

3.1. Variável aleatória

3.2. Função de distribuição

3.3. Classificação de variáveis aleatórias.

3.4. Variável aleatória discreta

3.5. Variável aleatória contínua

3.6. Função distribuição de uma função de uma variável aleatória

3.7. Valores esperados de variáveis aleatórias

3.8. Valores esperados de funções de variáveis aleatórias

3.9. Propriedades dos valores esperados

3.10. Momentos em relação à origem

3.11. Momentos em relação à média

3.12. Variância de uma variável aleatória

Variáveis Aleatórias Contínuas: Exercícios

Variável Aleatória, Função de Distribuição, Função Densidade de Probabilidade, Valor Esperado, Moda, Variância e Quantis

1

4.1 Suponha que o desvio da medida das peças produzidas por uma máquina em relação à norma especificada pelo mercado é uma variável aleatória X com a seguinte função de densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+k+x & , -1 \le x < 0 \\ 1+k-x & , 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \text{restantes valores de } x \end{cases}$$

(a) Calcule o valor de k.

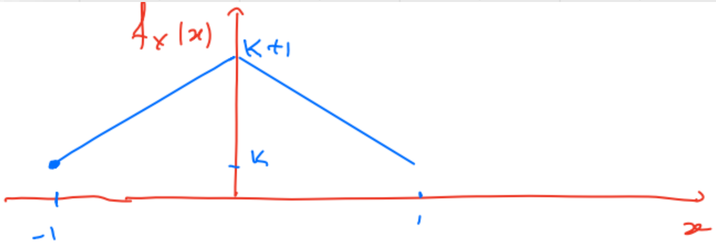
(b) Determine a função de distribuição de X.

(c) Calcule o valor esperado e a variância de X.

(d) Calcule a moda, a mediana e o $1^{\underline{o}}$ quartil de X.

(e) Calcule a probabilidade de que seja necessário extrair exactamente duas peças da produção da máquina para que apareça uma peça com um desvio positivo em relação à norma.

Exercício 4.1. (a): Função Densidade de Probabilidade

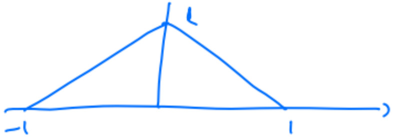


$$K: \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{0}(1+k+x)\,dx + \int_{0}^{1}(1+k-x)\,dx = 1$$

$$\Leftrightarrow 1+K+\frac{0-(-1)^2}{2} + 1+k-\frac{1^2-0}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2+2K-1 = 1 \Leftrightarrow k=0$$

i.e.:



Exercício 4.1. (b): Função de Distribuição

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x < 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{e.c.} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \int_{-1}^{x} (1+y)\,dy & -1 \leq x < 0 \\ 0 + \int_{-1}^{0} (1+y)\,dy + \int_{0}^{x} (1-y)\,dy & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ x^2/2 + x + 1/2, & -1 \leq x < 0 \\ -x^2/2 + x + 1/2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Tabela 1.1: Tabela de Primitivas Elementares

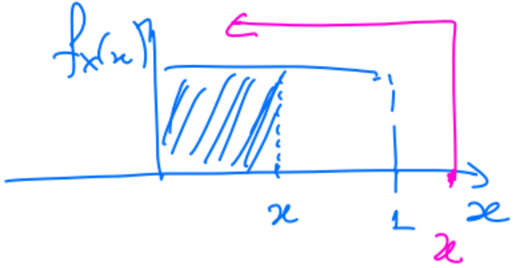
f	$Pf = F$
$c, c \in IR$	$c\,x$
$x^{\alpha}\ (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\sec^2 x$	$\text{tg}\,x$
$\text{cosec}^2 x$	$-\text{cotg}\,x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{arctg}\,x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$

Slides Professora Claúdia Nunes

Exercício 4.1. (b): Função de Distribuição

Outro exemplo:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$



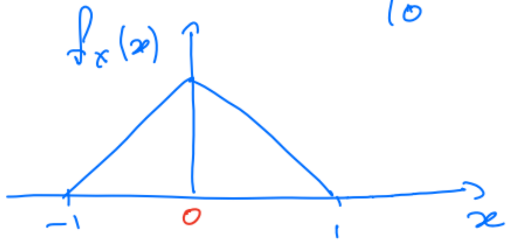
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x = \int_0^x 1\,dy & 0 \leq x < 1 \\ 1 = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy & x \geq 1 \end{cases}$$

$$= 0 + \int_0^1 1\,dy + 0$$

(localização do x)

Exercício 4.1. (c): Valor Médio e Variância

Relembrar: $f_X(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \le x < 0 \\ 1-x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{e.c.} \end{cases}$



c) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x(1+x)\,dx + \int_0^1 x(1-x)\,dx$

$= \int_{-1}^{0} (x + x^2)\,dx + \int_0^1 (x - x^2)\,dx$

$= \frac{0^2-(-1)^2}{2} + \frac{0^3-(-1)^3}{3} + \frac{1^2-0^2}{2} - \frac{1^3-0^3}{3} = 0$

Nota: se a f. densidade de probabilidade for simétrica em torno de um ponto, esse ponto é o valor esperado da v.a.

Exercício 4.1. (c): Valor Médio e Variância

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^2(1+x)\,dx + \int_0^1 x^2(1-x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^2+x^3)\,dx + \int_0^1 (x^2-x^3)\,dx$$

$$= \frac{0^3-(-1)^3}{3} + \frac{0-(-1)^4}{4} + \frac{1^3-0^3}{3} - \frac{1^4-0}{4}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{8-6}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\operatorname{var}(x) = E(x^2) - E^2(x) = \frac{1}{6} - 0^2 = \frac{1}{6}$$

$E(X) = 0;\ V(X) = 1/6$

Slides Professora Claúdia Nunes

Exercício 4.1. (d): Moda, Mediana e 1º Quartil

Relembrar: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\,ds$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1 \\ \int_{-1}^{x} (1+s)\,ds = (*) & -1 < x \le 0 \\ \underbrace{\int_{-1}^{0} (1+s)\,ds}_{0.5} + \int_{0}^{x} (1-s)\,ds & 0 < x < 1 \\ 1.0 & x \ge 1 \end{cases}$$

$$(*) = \int_{-1}^{x} (1+s)\,ds = (x+1) + \frac{x^2-(-1)^2}{2} = \boxed{x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}}$$

$F_X(0) = \frac{1}{2} = 0.5 \Rightarrow$ mediana $= 0$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ x^2/2 + x + 1/2, & -1 \le x < 0 \\ -x^2/2 + x + 1/2, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

moda $= 0$; mediana $= 0$

Slides Professora Claúdia Nunes

Exercício 4.1. (d): Moda, Mediana e 1º Quartil

$x_{0.25}$ ⇔ ponto p/o qual a função de distribuição é igual a 0.25

$F_X(\underbrace{x_{0.25}}_{y}) = 0.25$ ($x_{0.25} \in]-1,0[$)

$\Downarrow$

$$x^2/2 + x + 1/2 = 0.25 \iff y = \begin{cases} \in]-1,0[\\ \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \boxed{x^2/2 + x + 1/2,} & -1 \le x < 0 \\ -x^2/2 + x + 1/2, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Slides Professora Claúdia Nunes

$$F_X^{-1}(1/4) = -1 + \sqrt{2}/2$$

Curiosidade

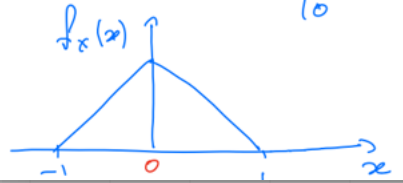
Exercício 4.1. (e): Probabilidades

Y – v.a. que representa o nº de peças que é necessário extrair da produção da máquina para termos uma peça com um desvio positivo em relação à norma.

Notação: ***Y* ~ *Geo*(*p*).**

p = P(“de uma peça ter desvio positivo em relação à norma”) = P(X >0) = 1/2 , sendo X a v.a. definida em 4.1

Relembrar: $f_X(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x < 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$



Logo, tem-se P(Y=2) = 0,5×(1-0,5) = 0,25 = 1/4

$$P(X=x) = p(1-p)^{x-1}$$

$$x = 1, 2, \ldots$$

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad Var(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas: Exercícios

2

Murteira et al (2015)

Cap3 do Livro: 11, 12, 18, 25, 26, 27, 29 e 42 (22)

11. Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada por,

$$f(x) = \begin{cases} x/4 & (0 < x < 2) \\ 1 - x/4 & (2 < x < 4). \end{cases}$$

a) Obtenha a função de distribuição de X.

b) Calcule a probabilidade de X ser maior que 3.

c) Calcule a $P(X < 3 \mid X > 2)$.

d) Obtenha a distribuição de $Y = 8 - 2X$.

Exercício 11 (a): Função de Distribuição

Função de distribuição: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du$

- $x < 0 \rightarrow F(x) = 0$
- $0 \leq x < 2 \rightarrow F(x) = \int_0^x u/4 \; du = \left[\frac{u^2}{8}\right]_0^x = \frac{x^2}{8}$
- $2 \leq x < 4 \rightarrow F(x) = \int_0^2 \frac{x}{4}\, dx + \int_2^x \left(1 - \frac{u}{4}\right) du = \left[\frac{x^2}{8}\right]_0^2 + \left[u - \frac{u^2}{8}\right]_2^x =$

$$= \frac{2^2}{8} + \left(x - \frac{x^2}{8}\right) - \left(2 - \frac{2^2}{8}\right) = \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{8} - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{x^2}{8} + x - 1$$

- $x \geq 4 \Rightarrow F(x) = 1$

Logo, a função de distribuição é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x^2/8 & (0 \leq x < 2) \\ -x^2/8 + x - 1 & (2 \leq x < 4) \\ 1 & (x \geq 4) \end{cases}$$

Exercício 11 (b): Probabilidade

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - \left(-\frac{3^2}{8} + 3 - 1\right) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8} = 0.125$$

Ou, $P(X > 3) = \int_3^4 f(x)\, dx = \int_3^4 \left(1 - \frac{x}{4}\right) dx = \ldots = \frac{1}{8} = 0.125$

Exercício 11 (c): Probabilidade

$$P(X<3 \mid X>2) = \frac{P(X<3 \wedge X>2)}{P(X>2)} = \frac{P(2<X<3)}{P(X>2)}$$

- $P(2<X<3) = F(3^-) - F(2) \overset{\uparrow X \text{ continua}}{=} F(3) - F(2) = \left(-\frac{3^2}{8} + 3 - 1\right) - \left(-\frac{2^2}{8} + 2 - 1\right) =$

$$= \frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

- $P(X>2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - \left(-\frac{2^2}{8} + 2 - 1\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Logo,

$$P(X<3 \mid X>2) = \frac{3/8}{1/2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Exercício 11 (d): Função de Distribuição

$$Y = 8 - 2X$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(8 - 2X \le y) = P(-2X \le y - 8) = P\left(X \geq \frac{8-y}{2}\right) =$$

$$= 1 - P\left(X < \frac{8-y}{2}\right) = 1 - F_X\left(\left(\frac{8-y}{2}\right)^-\right) = 1 - F_X\left(\frac{8-y}{2}\right)$$

- $x < 0 \Leftrightarrow -2x > 0 \Leftrightarrow 8 - 2x > 8 \Leftrightarrow y > 8$

$$F_Y(y) = 1 - F_X\left(\frac{8-y}{2}\right) = 1 - 0 = 1$$

Exercício 11 (d): Função de Distribuição

- $0 < x < 2 \Leftrightarrow 0 > -2x > -4 \Leftrightarrow 8 > 8-2x > 4 \Leftrightarrow 4 \leq y < 8$

$$F_Y(y) = 1 - F_X\left(\frac{8-y}{2}\right) = 1 - \left[\frac{\left(\frac{8-y}{2}\right)^2}{8}\right] = 1 - \frac{(8-y)^2}{32} = 1 - \frac{64-16y+y^2}{32} =$$

$$= 1 - \frac{64}{32} + \frac{16y}{32} - \frac{y^2}{32} = -\frac{y^2}{32} + \frac{y}{2} - 1$$

Exercício 11 (d): Função de Distribuição

- $2 < x < 4 \Leftrightarrow -4 > -2x > -8 \Leftrightarrow 4 > 8-2x > 0 \Leftrightarrow 0 < y < 4$

$$F_Y(y) = 1 - F_X\left(\frac{8-y}{2}\right) = 1 - \left[-\frac{\left(\frac{8-y}{2}\right)^2}{8} + \frac{8-y}{2} - 1\right] =$$

$$= 1 - \left[-\frac{(8-y)^2}{32} + \frac{8-y}{2} - 1\right] = 1 - \left(-\frac{64-16y+y^2}{32} + \frac{8-y}{2} - 1\right) =$$

$$= 1 - \left(-\frac{64}{32} + \frac{16y}{32} - \frac{y^2}{32} + \frac{8}{2} - \frac{y}{2} - 1\right) =$$

$$= 1 - \left(-2 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{32} + 4 - \frac{y}{2} - 1\right) = 1 + 2 - \frac{y}{2} + \frac{y^2}{32} - 4 + \frac{y}{2} + 1 =$$

$$= \frac{y^2}{32}$$

Exercício 11 (d): Função de Distribuição

- $x > 4 \Leftrightarrow -2x < -8 \Leftrightarrow 8 - 2x < 0 \Leftrightarrow y < 0$

$$F_Y(y) = 1 - F_X\left(\frac{8-y}{2}\right) = 1 - 1 = 0$$

Logo, a função de distribuição de y é dada por:

$$F(y) = \begin{cases} 0 & (y < 0) \\ y^2/32 & (0 \leq y < 4) \\ -y^2/32 + y/2 - 1 & (4 \leq y < 8) \\ 1 & (y \geq 8) \end{cases}$$

E a função densidade é dada por:

$$f(y) = \begin{cases} y/16 & (0 < y < 4) \\ -y/16 + 1/2 & (4 < y < 8) \end{cases}$$

12. Para cada uma das funções definidas nas alíneas seguintes encontre o valor da constante k de modo que sejam funções densidade de uma variável aleatória X:

a) $f(x)=\begin{cases} kx & (0<x<1) \\ 2-x & (1<x<2). \end{cases}$

b) $f(x)=x^3/4 \quad (0<x<k)$.

c) $f(x)=4x^k \quad (0<x<1)$.

Exercício 12 (a): Função Densidade de Probabilidade

$$\int_0^1 kx\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \left[k\,\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2} + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{k = 1}$$

Exercício 12 (b): Função Densidade de Probabilidade

$$\int_0^K \frac{x^3}{4}\, dx = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{x^4}{16}\right]_0^K = 1 \Leftrightarrow \frac{K^4}{16} = 1 \Leftrightarrow K^4 = 16 \Leftrightarrow K = -2 \lor K = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{K = 2}$$

Exercício 12 (c): Função Densidade de Probabilidade

$$\int_0^1 4x^k \, dx = 1 \Leftrightarrow \left[4 \frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{k+1} = 1 \Leftrightarrow k+1 = 4 \Leftrightarrow \boxed{k = 3}$$

Obrigada!

Questões?