Estatística I

Licenciatura em Gestão

2.º Ano/1.º Semestre

2023/2024

Aulas Teóricas N.ºs 11 e 12 (Semana 6)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teóricas (Semanas 1 a 3)	Aulas Teóricas (Semanas 3 a 5)	Aulas Teóricas (Semanas 5 a 7)	Aulas Teóricas (Semanas 8 a 13)
• **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	• **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Distribuições Teóricas • **Capítulo 6**: Amostragem. Distribuições por Amostragem.

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

https://cas.iseg.ulisboa.pt

Aula 9	Coeficiente de assimetria e coeficiente de kurtosis. Exemplo. Quantil de ordem alfa para distribuições contínuas. Mediana como medida de localização, amplitude inter-quartis como medida de dispersão. Exemplo.
Aula 10	**Início do capítulo 3:** Variáveis aleatórias bidimensionais. Função de distribuição conjunta, propriedades. Funções de distribuição marginais. Independência de variáveis aleatórias. Variáveis aleatórias bidimensionais discretas. Função probabilidade conjunta. Propriedades. Função probabilidade marginal. Exemplo.
Aula 11	Variáveis bidimensionais discretas: independência. Variáveis bidimensionais contínuas: função densidade conjunta e funções densidade marginais. Independência. Função probabilidade condicionada. Propriedades. Exemplo.
Aula 12	Função densidade. Função densidade de probabilidade condicionada. Propriedades. Exemplo.

1

Variáveis Aleatórias Contínuas: Exercícios

Variável Aleatória, Função de Distribuição, Função Densidade de Probabilidade, Valor Esperado, Moda, Variância e Quantis

4.1 Suponha que o desvio da medida das peças produzidas por uma máquina em relação à norma especificada pelo mercado é uma variável aleatória X com a seguinte função de densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+k+x & , -1 \le x < 0 \\ 1+k-x & , 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \text{restantes valores de } x \end{cases}$$

(a) Calcule o valor de k.

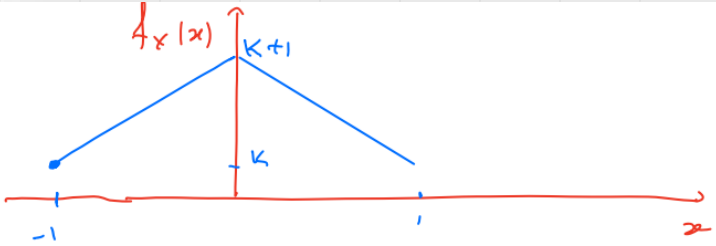
(b) Determine a função de distribuição de X.

(c) Calcule o valor esperado e a variância de X.

(d) Calcule a moda, a mediana e o 1º quartil de X.

(e) Calcule a probabilidade de que seja necessário extrair exactamente duas peças da produção da máquina para que apareça uma peça com um desvio positivo em relação à norma.

Exercício 4.1. (a): Função Densidade de Probabilidade

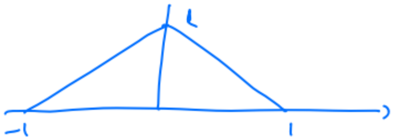


$$K: \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{0}(1+k+x)\,dx + \int_{0}^{1}(1+k-x)\,dx = 1$$

$$\Leftrightarrow 1+k+\frac{0-(-1)^2}{2} + 1+k-\frac{1^2-0}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2+2K-1 = 1 \Leftrightarrow k=0$$

ie:



Exercício 4.1. (b): Função de Distribuição

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \le x < 0 \\ 1-x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{e.c.} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \int_{-1}^{x} (1+y)\,dy & -1 \le x < 0 \\ 0 + \int_{-1}^{0} (1+y)\,dy + \int_{0}^{x} (1-y)\,dy & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ x^2/2 + x + 1/2, & -1 \le x < 0 \\ -x^2/2 + x + 1/2, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

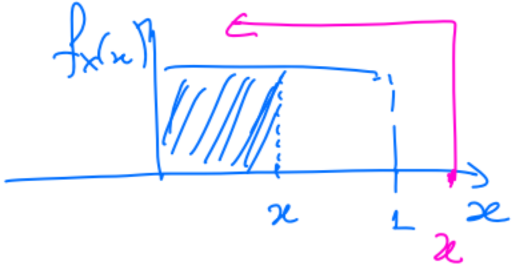
Tabela 1.1: Tabela de Primitivas Elementares

f	$Pf = F$
$c, c \in IR$	$c\,x$
x^{α} $(\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log\|x\|$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\sec^2 x$	$\text{tg} x$
$\text{cosec}^2 x$	$-\text{cotg} x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{arctg}\, x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$

Exercício 4.1. (b): Função de Distribuição

outro exemplo:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x = \int_0^x 1\,dy & 0 \le x < 1 \\ 1 = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy & x \geq 1 \end{cases}$$

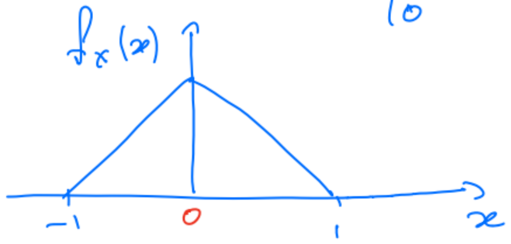
$$= 0 + \int_0^1 1\,dy + 0$$

(localização do x)

Slides Professora Claúdia Nunes

Exercício 4.1. (c): Valor Médio e Variância

Relembrar: $f_X(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \le x < 0 \\ 1-x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$



c) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} x(1-x)\,dx$

$= \int_{-1}^{0} (x + x^2)\,dx + \int_{0}^{1} (x - x^2)\,dx$

$= \frac{0^2 - (-1)^2}{2} + \frac{0^3 - (-1)^3}{3} + \frac{1^2 - 0^2}{2} - \frac{1^3 - 0^3}{3} = 0$

Nota: se a f. densidade de probabilidade for simétrica em torno de um ponto, esse ponto é o valor esperado da v.a.

Exercício 4.1. (c): Valor Médio e Variância

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^2(1+x)\,dx + \int_0^1 x^2(1-x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^2+x^3)\,dx + \int_0^1 (x^2-x^3)\,dx$$

$$= \frac{0^3-(-1)^3}{3} + \frac{0-(-1)^4}{4} + \frac{1^3-0^3}{3} - \frac{1^4-0}{4}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{8-6}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\text{var}(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{1}{6} - 0^2 = \frac{1}{6}$$

$E(X)=0$; $V(X)=1/6$

Slides Professora Claúdia Nunes

Exercício 4.1. (d): Moda, Mediana e 1º Quartil

Relembrar: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\,ds$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1 \\ \int_{-1}^{x}(1+s)\,ds = (*) & -1 < x \le 0 \\ \underbrace{\int_{-1}^{0}(1+s)\,ds}_{0.5} + \int_{0}^{x}(1-s)\,ds & 0 < x < 1 \\ 1.0 & x \ge 1 \end{cases}$$

$$(*) = \int_{-1}^{x}(1+s)\,ds = (x+1) + \frac{x^2-(-1)^2}{2} = \boxed{x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}}$$

$F_X(0) = \frac{1}{2} = 0.5 \Rightarrow$ mediana $= 0$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ x^2/2 + x + 1/2, & -1 \le x < 0 \\ -x^2/2 + x + 1/2, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

moda = 0; mediana = 0

Slides Professora Claúdia Nunes

Exercício 4.1. (d): Moda, Mediana e 1º Quartil

$x_{0.25}$ ⇔ ponto p/ o qual a função de distribuição é igual a 0.25

$F_X(\underbrace{x_{0.25}}_{y}) = 0.25$ $\quad (x_{0.25} \in]-1, 0[ )$

⇓

$x^2/2 + x + 1/2 = 0.25$ ⇔ $y = \begin{cases} \in]-1,0[\\ \hline \square \end{cases}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \boxed{x^2/2 + x + 1/2,} & -1 \le x < 0 \\ -x^2/2 + x + 1/2, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Slides Professora Claúdia Nunes

$$F_X^{-1}(1/4) = -1 + \sqrt{2}/2$$

Exercício 4.1. (e): Probabilidades

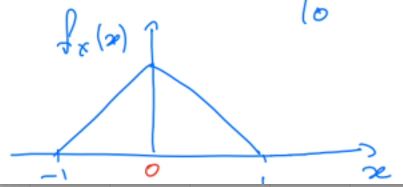
Curiosidade

Y – v.a. que representa o nº de peças que é necessário extrair da produção da máquina para termos uma peça com um desvio positivo em relação à norma.

Notação: $Y \sim Geo(p)$.

p = P("de uma peça ter desvio positivo em relação à norma") = P(X >0) = 1/2 , sendo X a v.a. definida em 4.1

Relembrar: $f_X(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \le x < 0 \\ 1-x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{e.c.} \end{cases}$



Logo, tem-se P(Y=2) = 0,5×(1-0,5) = 0,25 = 1/4

$$P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$$

$$x = 1, 2, \ldots$$

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad Var(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$$

2

Variáveis Aleatórias Mistas

Variável Aleatória Mista

- X é um **variável aleatória mista** se a respectiva função de distribuição pode ser escrita como $F(x) = \lambda F_1(x) + (1-\lambda)F_2(x)$, $(0 < \lambda < 1)$ onde:
  - $F_1 \rightarrow$ função de distribuição associada a uma variável aleatória discreta;
  - $F_2 \rightarrow$ função de distribuição associada a uma variável aleatória contínua.

Murteira et al (2015)

Variável Aleatória Mista: Exemplo

Seja $U \sim \mathrm{Unif}([0,4])$. Seja X uma VA definida da seguinte maneira:

- Se $U \leq 1$, então $X \sim \mathrm{Unif}([0,2])$.
- Caso contrário, então $X \sim \mathrm{Bern}(2/3)$.

Pelo **teorema da probabilidade total**:

$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x \mid U \leq 1)}_{\sim \mathrm{Unif}([0,2])} \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x \mid U > 1)}_{\sim \mathrm{Bern}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$

3

Pares Aleatórios Discretos

Distribuição Conjunta, Marginais e Condicionais; Independência; Covariância e Correlação

Par Aleatório Discreto

PAR ALEATÓRIO

A um vector aleatório de dimensão 2 chamamos um **par aleatório ou variável aleatória bidimensional**.

Par aleatório discreto:

Um par aleatório diz-se discreto quando ambas as componentes são v.a.'s discretas. Assim (X,Y) é um par aleatório discreto quando os domínios de existência das v.a.'s X e Y são conjuntos finitos ou infinitos numeráveis.

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Função de Probabilidade Conjunta

A função de probabilidade conjunta do par aleatório (X,Y) é uma função f(x,y) que associa a cada elemento de $\mathbb{R}^2$ uma probabilidade,

$$f(x,y) = p_{ij} = P[X = x, Y = y].$$

Verifica as seguintes propriedades:

1. $0 \leq f(x,y) \leq 1, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$;
2. $\sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1$.

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Função de Probabilidade Conjunta: Exemplo

Exemplo 6. Uma moeda equilibrada tem o algarismo 1 desenhado numa das faces e o algarismo 2 desenhado na outra face. A moeda é lançada ao ar duas vezes. Seja a v.a. X – soma dos dois números observados nos lançamentos e a v.a. Y – diferença dos mesmos números (o primeiro menos o segundo).

$$\begin{array}{rcccc} \Omega = \{ & (1,1), & (1,2), & (2,1), & (2,2)\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (X,Y) = & (2,0) & (3,-1) & (3,1) & (4,0) \end{array}$$

Assim temos :

$P[X = 2, Y = 0] = ¼$; $P[X = 3, Y = -1] = ¼$;

$P[X = 3, Y = 1] = ¼$; $P[X = 4, Y = 0] = ¼$.

A função de probabilidade conjunta, por vezes é representada através de um quadro.

Para o exemplc 6 a função de probabilidade conjunta de (X,Y) vem:

X \ Y	-1	0	1
2	0	1/4	0
3	1/4	0	1/4
4	0	1/4	0

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Funções de Probabilidade Marginais

Apesar de no par aleatório se proceder ao estudo em conjunto de duas variáveis aleatórias, isso não impede que se possa estudar probabilisticamente cada variável componente em separado. De facto é possível obter as funções de probabilidade das variáveis X eY, individualmente, e a que damos o nome de funções de probabilidade marginais:

Função de probabilidade marginal de X,

$$f_X(x) = P[X = x, -\infty < Y < +\infty] = \sum_y f(x,y)$$

Função de probabilidade marginal de Y

$$f_Y(y) = P[-\infty < X < +\infty, Y = y] = \sum_x f(x,y)$$

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Funções de Probabilidade Marginais: Exemplo

Exemplo 7 (continuação)

Podemos calcular as probabilidades marginais, isto é, calcular a função de probabilidade de X eY usando a função de probabilidade conjunta.

Assim,

$$P[X = 2] = P[(\{X = 2\} \cap \{Y = -1\}) \cup (\{X = 2\} \cap \{Y = 0\}) \cup (\{X = 2\} \cap \{Y = 1\})] =$$

$$= P[X = 2, Y = -1] + P[X = 2, Y = 0] + P[X = 2, Y = 1] = ¼,$$

$$P[X = 3] = P[(\{X = 3\} \cap \{Y = -1\}) \cup (\{X = 3\} \cap \{Y = 0\}) \cup (\{X = 3\} \cap \{Y = 1\})] =$$

$$= P[X = 3, Y = -1] + P[X = 3, Y = 0] + P[X = 3, Y = 1] = ½,$$

$$P[X = 4] = P[(\{X = 4\} \cap \{Y = -1\}) \cup (\{X = 4\} \cap \{Y = 0\}) \cup (\{X = 4\} \cap \{Y = 1\})] =$$

$$= P[X = 4, Y = -1] + P[X = 4, Y = 0] + P[X = 4, Y = 1] = ¼,$$

Pelo que, a função de probabilidade marginal de X é,

$$X = \begin{cases} 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{cases}$$

X \ Y	-1	0	1	
2	0	1/4	0	1/4
3	1/4	0	1/4	1/2
4	0	1/4	0	1/4
	1/4	1/2	1/4	1

função de probabilidade marginal de X

(soma de linha)

função de probabilidade marginal de Y

(soma de coluna)

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Funções de Probabilidade Marginais: Exemplo

X \ Y	-1	0	1	
2	0	1/4	0	1/4
3	1/4	0	1/4	1/2
4	0	1/4	0	1/4
	1/4	1/2	1/4	1

função de probabilidade marginal de X

(soma de linha)

função de probabilidade marginal de Y

(soma de coluna)

Da mesma forma obtemos,

P[Y = -1] = ¼, P[Y = 0] = ½ e P[Y = 1] = ¼,

A função de probabilidade marginal de Y será,

$$Y = \begin{cases} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{cases}$$

O quadro da distribuição de probabilidade conjunta de (X,Y) pode agora ser completado com mais uma linha e uma coluna para as probabilidades marginais das v.a.'s X e Y.

[Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)](#)

Funções de Probabilidade Condicionais

Sabemos que:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad , \; P(A) > 0$$

Definindo:

$A \rightarrow$ o evento onde $X = x$

$B \rightarrow$ o evento onde $Y = y$

A distribuição de probabilidade de X isolado e Y isolados são:

$$g(x) = \sum_{y} f(x,y) \quad \text{e} \quad h(y) = \sum_{x} f(x,y) \qquad \text{variável discreta}$$

Temos que:

$$P(Y = y / X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \qquad g(x) > 0$$

ou ainda

$$P(X = x / Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \qquad h(y) > 0$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Funções de Probabilidade Condicionais: Exemplo

Considere-se a função de probabilidade conjunta f(x,y) apresentada abaixo. Determine a função de probabilidade condicional de X dado que Y=1 e considere esse resultado para calcular P(X=0|Y=1).

		X			
f(x, y)		0	1	2	
y	0	3/28	9/28	3/28	15/28
	1	6/28	6/28	-	12/28
	2	1/28	-	-	1/28
		10/28	15/28	3/28	1

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

$$P(X = 0) = g(0) = \sum_{y=0}^{2} f(0, y) = f(0, 0) + f(0, 1) + f(0, 2) = 10/28$$

$$P(X = 1) = g(1) = \sum_{y=0}^{2} f(1, y) = f(1, 0) + f(1, 1) + f(1, 2) = 15/28$$

$$P(X = 2) = g(2) = \sum_{y=0}^{2} f(2, y) = f(2, 0) = 3/28$$

Função massa de probabilidade de X:

x	0	1	2
g(x)	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

= distribuição de probabilidade marginal de X.

Funções de Probabilidade Condicionais: Exemplo

Considere-se a função de probabilidade conjunta f(x,y) apresentada abaixo. Determine a função de probabilidade condicional de X dado que Y=1 e considere esse resultado para calcular P(X=0|Y=1).

		X			
f(x, y)		0	1	2	
y	0	3/28	9/28	3/28	15/28
	1	6/28	6/28	-	12/28
	2	1/28	-	-	1/28
		10/28	15/28	3/28	1

Mas usando a definição:

$$P(X = x / Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{f(x,y)}{h(y)},$$

por definição: $h(y) = \sum_x f(x,y)$

$$P(x = 0/y = 1) = \frac{6/28}{12/28} = \frac{1}{2}$$

$$P(x = 1/y = 1) = \frac{6/28}{12/28} = \frac{1}{2}$$

$$P(x = 2/y = 1) = \frac{0}{12/28} = 0$$

Independência entre as Variáveis Aleatórias

Dada uma v.a. bidimensional (X,Y), as v.a. unidimensionais que a integram, X e Y, dizem-se independentes se

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \quad \forall\, (x,y).$$

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Independência Estatística

(Dedução com analogia Teoria das Probabilidades)

Sabemos que:

$$P\,(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow f(x/y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}$$

Mas se A e B forem independentes:

$$P\,(A/B) = P(A) \Rightarrow f(x/y) = g(x)$$

Assim,

$$P(A \cap B) = P(A)\,.\,P(B) \Rightarrow f(x,y) = g(x).h(y)$$

Sejam x e y duas variáveis aleatórias (discretas ou contínuas) com distribuição de probabilidade conjunta f (x, y) e distribuição de probabilidade marginais g(x) e h(y), respectivamente. As variáveis aleatórias x e y são consideradas <u>Estatisticamente Independentes</u> se e somente se:

$$f\,(x, y) = g(x)\,.\,h(y)$$

para todos (x, y) dependendo do intervalo).

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Independência Estatística

Generalização

Seja $X_1, X_2, \ldots X_n$, n variáveis aleatórias (discretas ou contínuas) com distribuição de probabilidade conjunta $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ e distribuição de probabilidade marginais $f_1(x_1), f_2(x_2) \ldots f_3(x_n)$, respectivamente. As variáveis aleatórias, $X_1, X_2, \ldots X_n$, são ditas Estatisticamente Independentes se e somente se:

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = f_1(x_1) \,.\, f_2(x_2) \ldots f_3(x_n)$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Independência Estatística: Exemplo

Mostre que as variáveis aleatórias do exemplo ① não são estatisticamente independentes.

$$f\,(x, y) \overset{?}{=} g(x)\,.\,h(x)$$

		X			
f(x, y)		0	1	2	
y	0	3/28	9/28	3/28	15/28
	1	6/24	6/24	-	12/28
	2	1/28	-	-	1/28
		10/28	15/28	3/28	

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Vamos verificar em um par (x, y)

Suponha (0, 0)

$f\,(x, y) = f\,(0, 0) = 3/28$

9 (0) = 10/28

$h\,(0) = 15/28$

<u>Vemos que:</u>

$$\frac{3}{28} \neq \frac{10}{28} \cdot \frac{15}{28}$$

não são estatisticamente independentes.

Valor Médio do Par Aleatório

Valor esperado:

Seja X uma variável aleatória. O **valor esperado**, **média** ou **esperança matemática** de X, que denotamos por E[X] (também representado por μ_X ou μ), quando existe, define-se por

$$E[X] = \sum_i x_i f(x_i) \qquad \text{se X é uma variável aleatória discreta,}$$

Propriedades do valor esperado:

Dadas X e Y duas variáveis aleatórias, e seja k uma constante real,

- E[k] = k ;
- E[kX] = k E[X];
- E[X±Y] = E[X] ± E[Y];
- E[XY] = E[X] . E[Y] + Cov[X,Y]

  Se X e Y forem independentes então E[XY] = E[X] . E[Y]

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Variância do Par Aleatório

Variância:

Seja X uma variável aleatória. A variância de X, que denotamos por Var[X] (também representada por σ_X^2 ou simplesmente σ^2), é definida por:

$$Var[X] = E[(X - \mu_X)^2],$$

ou seja,

$$Var[X] = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 \cdot f(x_i) \quad \text{se X é uma v.a. discreta,}$$

Propriedades da variância:

Dadas X e Y duas variáveis aleatórias, e seja k uma constante real,

- $Var[k] = 0$;
- $Var[kX] = k^2 \, Var[X]$;
- $Var[X \pm Y] = Var[X] + Var[Y] \pm 2Cov[X,Y]$;

  Se X e Y forem independentes então $Var[X \pm Y] = Var[X] + Var[Y]$
- $Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$

  Onde,

  $$E[X^2] = \sum_i x_i^2 f(x_i) \quad \text{se X é uma variável aleatória discreta,}$$

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Covariância do Par Aleatório

Covariância:

A **covariância** entre X eY, representa-se por Cov(X,Y)ou simplesmente $\sigma_{X,Y}$, e define-se como

$$Cov[X, Y] = \sigma_{X,Y} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)],$$

ou seja,

$$Cov[X,Y] = \sum_i \sum_j (x_i - \mu_X)(x_j - \mu_Y) \cdot f(x_i, y_j) \quad \text{se (X,Y) é uma v.a. discreta,}$$

Uma outra fórmula para calcular a covariância é

$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]\,E[Y].$$

onde

$$E[XY] = \sum_i \sum_j x_i y_j f(x_i, y_j) \quad \text{se (X,Y) é uma v.a. discreta,}$$

Propriedades da Covariância:

Sejam X eY duas variáveis aleatórias e a, b, c e d constantes reais,

- X eY são variáveis independentes $\Rightarrow Cov(X,Y) = 0$

  (Nota: O recíproca pode não ser verdadeiro. O facto de Cov(X,Y) =0 não implica a indepndência entre X eY, pode existir uma ligação não linear entre as variáveis.);
- $Cov(X,X) = Var[X]$;
- $Cov(aX+b, cY+d) = acCov(X,Y)$.

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Coeficiente de Correlação do Par Aleatório

- **Coeficiente de correlação:**

O **coeficiente de correlação** é definido como:

$$\rho = \rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \, \sigma_Y}$$

Propriedades do coeficiente de correlação:

Sejam X eY duas variáveis aleatórias e a, b, c e d constantes reais,

- $-1 < \rho_{X,Y} < 1$;
- Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então $\rho_{X,Y} = 0$;
- O coeficiente de correlação não se altera quando as variáveis sofrem uma transformação linear positiva, ou seja,

$$\rho_{aX+b,cY+d} = \rho_{X,Y} \qquad \text{se } ac > 0.$$

Obrigada!

Questões?