Estatística II

Licenciatura em Gestão

2.º Ano/1.º Semestre

2023/2024

Aulas Teóricas N.ºs 10 e 11 (Semana 6)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teóricas (Semanas 1 a 5)	Aulas Teóricas (Semanas 5 a 7)	Aulas Teóricas (Semanas 7 a 9)	Aulas Teóricas (Semanas 10 a 13)
• **Capítulo 1**: Estimação	• **Capítulo 2**: Testes de Hipóteses	• **Capítulo 3**: Modelo de Regressão Linear	• **Capítulo 4**: Complementos ao Modelo de Regressão Linear

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

4ª semana (10/10 e 12/10)

T06 - Intervalos de confiança

Introdução. Método da variável fulcral. Aplicação a universos normais: média e variância. Exemplos

T07 - Estimação por intervalos

Método da variável fulcral: Aplicação a universos normais (2 amostras) para a estimação da diferença de média e rácio de variâncias. Exemplos.

5ª semana (17/10 e 19/10)

T08 - Estimação por intervalos

Intervalos de confiança para grandes amostras. Resultado geral. Aplicação a universos de Bernoulli (média e diferença de médias), de Poisson e com distribuição exponencial. Exemplos

T09 - Teste de hipóteses

Introdução. Teste de hipótese simples contra hipótese simples. Probabilidades associadas aos 2 tipos de erros. Potência do teste. Lema de Neyman-Pearson. Exemplo.

6ª semana (24/10 e 26/10)

T10 - Teste de hipóteses

Hipótese simples contra hipótese composta unilateral. Testes UMP. Exemplo. Teste de hipótese simples contra hipótese composta bilateral. Exemplo.

T11 - Teste de hipóteses

Valor-p. Exemplos. Testes em universos normais: média e variância. Exemplos. Teste para 2 populações: igualdade de médias e quociente de variâncias. Exemplos.

Intervalo de Confiança para a Relação de Variâncias σ_1^2/σ_2^2

1

Intervalo de Confiança para σ_1^2/σ_2^2

Quando as populações são Normais, o **I. C. para** $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ **com** $\mathbf{100(1-\alpha)\%}$ **de confiança** é dado por:

$$\left]\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,1-\frac{\alpha}{2}}};\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,\frac{\alpha}{2}}}\right[.$$

Variável Fulcral

$$\frac{S_1'^2}{S_2'^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\sim F(m-1,n-1)$$

Como $F_{n_1-1,n_2-1;\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{F_{n_2-1,n_1-1;1-\frac{\alpha}{2}}}$ este intervalo pode ser escrito da seguinte forma:

$$\left]\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1;1-\frac{\alpha}{2}}};\frac{S_1^2}{S_2^2}F_{n_2-1,n_1-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right[.$$

Variâncias corrigidas

$$S'^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

IC para σ_1^2/σ_2^2: Formulário

- **POPULAÇÕES NORMAIS**

Média	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
Diferença de médias	$\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$	$Z=\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1'^2}{m}+\dfrac{S_2'^2}{n}}} \overset{a}{\sim} t(\nu)$ onde ν é o maior inteiro contido em r, $r=\dfrac{\left(\dfrac{s_1'^2}{m}+\dfrac{s_2'^2}{n}\right)^2}{\dfrac{1}{m-1}\left(\dfrac{s_1'^2}{m}\right)^2+\dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{s_2'^2}{n}\right)^2}$
	$T=\dfrac{\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{(m-1)S_1'^2+(n-1)S_2'^2}{m+n-2}}} \sim t(m+n-2)$	
Variância	$\dfrac{nS^2}{\sigma^2}=\dfrac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	Variâncias corrigidas
Relação de variâncias	$\dfrac{S_1'^2}{S_2'^2}\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1,n-1)$	$S'^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

Intervalo de Confiança para a Relação de Variâncias σ_1^2/σ_2^2: Exercícios

2

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

Para substituir uma máquina antiquada encaram-se 2 alternativas: o equipamento A ou equipamento B. Dado tratar-se de uma decisão que envolve custos consideráveis uma vez que os equipamentos são bastante dispendiosos, resolveu-se testar os dois equipamentos durante um período experimental.

No final do período experimental selecionaram-se 31 e 61 peças da produção dos equipamentos A e B, respetivamente, tendo-se registado os seguintes valores relativamente à característica de interesse na avaliação da qualidade do trabalho das máquinas:

$$\sum_{i=1}^{31} x_{iA} = 43{,}4; \qquad \sum_{1=1}^{31} x_{iA}^2 = 123{,}76; \qquad \sum_{i=1}^{61} x_{iB} = 91{,}5; \qquad \sum_{i=1}^{61} x_{iB}^2 = 269{,}25$$

Utilizando um intervalo de confiança a 95% diga se há razões para crer que com a máquina A se consegue uma menor variabilidade da característica de avaliação do que com a máquina B. Admita a normalidade das distribuições.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício: IC para σ_1^2/σ_2^2

Sejam:

- X_1 a v.a. que representa o valor da característica de interesse no equipamento A,
- X_2 a v.a. que representa o valor da característica de interesse no equipamento B,

Com $X_1 \sim N(\mu_1 = ?\,; \sigma_1 = ?\,)$ e $X_2 \sim N(\mu_2 = ?; \sigma_2 = ?\,)$.

$n_1 = 31$ e $n_2 = 61$.

$$\bar{x}_1 = \sum_{i=1}^{31} \frac{x_{1i}}{31} = \frac{43{,}4}{31} = 1{,}4; \qquad s_1^2 = \frac{1}{30}\left(\sum_{i=1}^{31} x_{1i}^2 - 31 \times \bar{x}_1^2\right) = \frac{123{,}76 - 31 \times 1{,}4^2}{30} = 2{,}1;$$

$$\bar{x}_2 = \sum_{i=1}^{61} \frac{x_{2i}}{61} = \frac{91{,}5}{61} = 1{,}5; \qquad s_2^2 = \frac{1}{60}\left(\sum_{i=1}^{61} x_{2i}^2 - 61 \times \bar{x}_2^2\right) = \frac{269{,}25 - 61 \times 1{,}5^2}{60} = 2{,}2.$$

O I. C. a 95% para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ é dado por:

$$\left]\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{n_1-1;n_2-1\,;\,1-\frac{\alpha}{2}}}\,;\frac{S_1^2}{S_2^2}f_{n_2-1;n_1-1\,;\,1-\frac{\alpha}{2}}\right[.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício: IC para σ_1^2/σ_2^2

Tabela da F-Snedcor

$f_{30;\,60;\,0{,}975} = 1{,}82$

$f_{60;\,30;\,0{,}975} = 1{,}94$

$$F_{m,n,\varepsilon} : P(X > F_{m,n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

n – graus de liberdade do denominador		m – graus de liberdade do numerador																		
	ε	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
20	.100	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
	.050	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
	.025	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
	.010	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
22	.100	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
	.050	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
	.025	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
	.010	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
24	.100	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
	.050	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
	.025	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
	.010	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
26	.100	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
	.050	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
	.025	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
	.010	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
28	.100	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
	.050	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
	.025	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
	.010	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
30	.100	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
	.050	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
	.025	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
	.010	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	.100	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
	.050	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
	.025	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
	.010	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	.100	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
	.050	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
	.025	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
	.010	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60

Exercício: IC para σ_1^2/σ_2^2

Substituindo pelos valores conhecidos, sendo $f_{30;\,60;\,0,975} = 1,82$ e $f_{60;\,30;\,0,975} = 1,94$, obtém-se:

$$\left]\frac{2,1}{2,2} \times \frac{1}{1,82};\ \frac{2,1}{2,2} \times 1,94\right[=]0,526; 1,852[.$$

Com 95% confiança não há razões para crer que exista diferença na variabilidade da característica de avaliação obtida com as duas máquinas (a igualdade das variâncias), uma vez que o valor 1 está presente no intervalo.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Intervalo de Confiança para uma proporção p

3

Intervalo de Confiança para p

Estimador de p

$$\boxed{\overline{P} = \hat{P}}$$

Variável Fulcral

$$Z = \frac{\overline{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \overset{\circ}{\sim} N(0;1).$$

Portanto, quando a amostra é grande, o **I. C. para $\boldsymbol{p}$ com $\mathbf{100(1-\alpha)\%}$ de confiança** é:

$$\left]\overline{P} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}}\,;\,\overline{P} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}}\right[.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

4 Intervalo de Confiança para uma proporção p: Exercícios

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

Numa certa cidade A recolheu-se uma amostra aleatória de 150 homens tendo 54 afirmado que viam o telejornal todos os dias.

a) Com 90% de confiança, será que se pode considerar que a proporção de homens, daquela cidade, que veem o telejornal todos os dias é de 40%.

b) Mantendo-se o resto constante, qual deveria ser a dimensão da amostra de forma a que o erro de estimativa do intervalo de confiança não ultrapasse 5%?

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a): IC para p

Sejam:

- X_i a v. a. que designa se o i-ésimo homem afirmou ver o telejornal,
- $\overline{P}$ a v. a. que representa a proporção de homens que afirmaram ver o telejornal, em n homens.

$n = 150$ e $\overline{p} = \dfrac{54}{150} = 0{,}36.$

a) Afirmação: $p = 0{,}4$.

I. C. a 90% para p é dado por:

$$\left]\overline{P} - z_{0,95}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}};\ \overline{P} + z_{0,95}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}}\right[.$$

Substituindo pelos valores conhecidos, com $z_{0,95} = 1{,}645$, obtém-se

$$\left]0{,}36 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}36(1-0{,}36)}{150}};0{,}36 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}36(1-0{,}36)}{150}}\right[=]0{,}3464; 0{,}5077[.$$

Deste modo, face aos resultados obtidos (0,4 está contido do I. C. a 90%) não é de rejeitar a hipótese de que a proporção de homens que vê o telejornal todos os dias é de 40%, pois com 90% de confiança a percentagem de homens que vê diariamente o telejornal situa-se entre 34,64% e 50,77%.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (b): IC para p

b) Erro de estimativa $\leq 0{,}05$, então $n = ?$

O erro de estimativa associado ao I. C. a 90% para p é:

Margem de erro ou Erro de estimativa é metade da amplitude do IC

$$z_{0,95}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}},$$

que se pretende que seja inferior ou igual a 0,5. Portanto,

$$z_{0,95}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} \leq 0{,}05 \Leftrightarrow 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}36(1-0{,}36)}{n}} \leq 0{,}05$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{1{,}645\sqrt{0{,}36(1-0{,}36)}}{0{,}05} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 15{,}792$$

$$\Rightarrow n \geq 15{,}792^2 \Leftrightarrow n \geq 249{,}4 \Rightarrow n \geq 250$$

Desta forma, a dimensão mínima da amostra que garante que o erro de estimativa do I. C. a 90% é no máximo de 5% é de 250 homens.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Intervalo de Confiança para a Diferença de Proporções p_1-p_2

5

Intervalo de Confiança para p_1-p_2

Estimadores de p1 e p2

$\overline{P1} = \hat{P}_1$

$\overline{P2} = \hat{P}_2$

Variável Fulcral

$$Z = \frac{(\overline{P}_1 - \overline{P}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \overset{\circ}{\sim} N(0;1).$$

Portanto, quando as amostras são grandes, o **I. C. para $\boldsymbol{p_1 - p_2}$ com $\boldsymbol{100(1-\alpha)\%}$ de confiança** é dado por:

$$\left]\overline{P}_1 - \overline{P}_2 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{P}_1(1-\overline{P}_1)}{n_1} + \frac{\overline{P}_2(1-\overline{P}_2)}{n_2}}\,;\ \overline{P}_1 - \overline{P}_2 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{P}_1(1-\overline{P}_1)}{n_1} + \frac{\overline{P}_2(1-\overline{P}_2)}{n_2}}\right[.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Intervalo de Confiança para a Diferença de Proporções p1-p2: Exercícios

6

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

Numa certa cidade A recolheu-se uma amostra aleatória de 150 homens tendo 54 afirmado que viam o telejornal todos os dias. Numa outra cidade do país, cidade B, 80 dos 200 homens selecionados aleatoriamente responderam afirmativamente.

Com 95% de confiança, será de admitir que a proporção de homens que vê o telejornal todos os dias é igual nas duas cidades?

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício: IC para p_1-p_2

Sejam:

- X_{1i} a v. a. que designa se o i-ésimo homem, da cidade A, afirmou ver o telejornal, $i = 1, \ldots, n_1$,
- X_{2i} a v. a. que designa se o i-ésimo homem, da cidade B, afirmou ver o telejornal, $i = 1, \ldots, n_2$,
- $\overline{P}_1$ a v. a. que representa a proporção de homens, da cidade A, que afirmaram ver o telejornal, em n_1 homens,
- $\overline{P}_2$ a v. a. que representa a proporção de homens, da cidade B, que afirmaram ver o telejornal, em n_2 homens.

$n_1 = 150;\ \overline{p}_1 = \dfrac{54}{150} = 0{,}36;\ n_2 = 200$ e $\overline{p}_2 = \dfrac{80}{200} = 0{,}4.$

O I. C. a 95% para $p_1 - p_2$ é dado por:

$$\left]\overline{P}_1 - \overline{P}_2 - z_{0,975}\sqrt{\frac{\overline{P}_1(1-\overline{P}_1)}{n_1} + \frac{\overline{P}_2(1-\overline{P}_2)}{n_2}};\ \overline{P}_1 - \overline{P}_2 + z_{0,975}\sqrt{\frac{\overline{P}_1(1-\overline{P}_1)}{n_1} + \frac{\overline{P}_2(1-\overline{P}_2)}{n_2}}\right[.$$

Substituindo pelos valores conhecidos, sendo $z_{0,975} = 1{,}96$, obtém-se:

$$\left](0{,}36 - 0{,}4) \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}36(1-0{,}36)}{150} + \frac{0{,}4(1-0{,}4)}{200}}\right[=]-0{,}143; 0{,}063[.$$

Portanto, com 95% de probabilidade a diferença entre a percentagem de homens da cidade A e cidade B que veem o telejornal diariamente está entre -14,3% e 6,3%. Como o 0 está contido no intervalo não é de excluir a hipótese de que a percentagem de homens é idêntica nas duas cidades, com a referida confiança.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

7 Inferência Estatística

Definição e Construção de Testes de Hipóteses

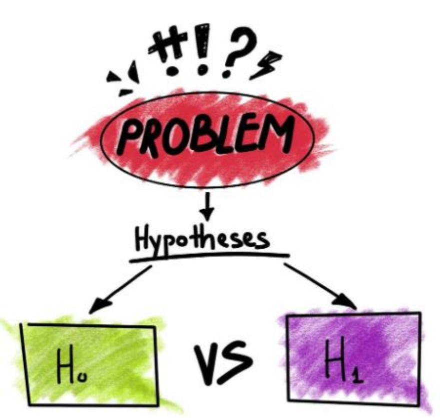
Teste de Hipóteses

- ✓ Procedimento que conduz a uma tomada de decisão, com base na informação fornecida pelos dados recolhidos, sobre a aceitação ou a não aceitação de determinada hipótese estatística que se coloca sobre uma ou mais populações.

"A **Statistical Test** is a way to evaluate the evidence the data provides against a hypothesis. This hypothesis is called **the null hypothesis (**H0). H0 is usually opposed to a hypothesis called the **alternative hypothesis** (H1).

If the data does not provide enough evidence against H0, H0 is not rejected. If instead, the data shows strong evidence against H0, H0 is rejected and H1 is considered as true with a quantified (low) risk of being wrong.

A **Statistical Test** allows to reject/not to reject H0."



Hipótese é uma afirmação

Em uma certa população as médias de tempo de recuperação dos indíduos que tomam um certo remédio e daqueles que não tomam são iguais

O teste de hipótese é uma pergunta

Será que em uma certa população as médias de tempo de recuperação dos indíduos que tomam um certo remédio e daqueles que não tomam são iguais?

O resultado do teste é uma resposta

Com base na amostra pode-se dizer que
- Não há indícios de diferença estatisticamente significativa no tempo médio de recuperação entre os que tomam e os que não tomam o remédio, ou
- Há indícios de diferença estatisticamente significativa no tempo médio de recuperação entre os que tomam e os que não tomam o remédio

Qual o Teste Estatístico a Usar?

<u>Depende de vários factores:</u>

- ➢ Tipo de efeito que se pretende testar
- ➢ Nº de variáveis envolvidas
- ➢ Nível de medição das variáveis
- ➢ Independência das observações
- ➢ Outras características dos dados (tipo de distribuição de frequências, igualdade de variâncias, etc)

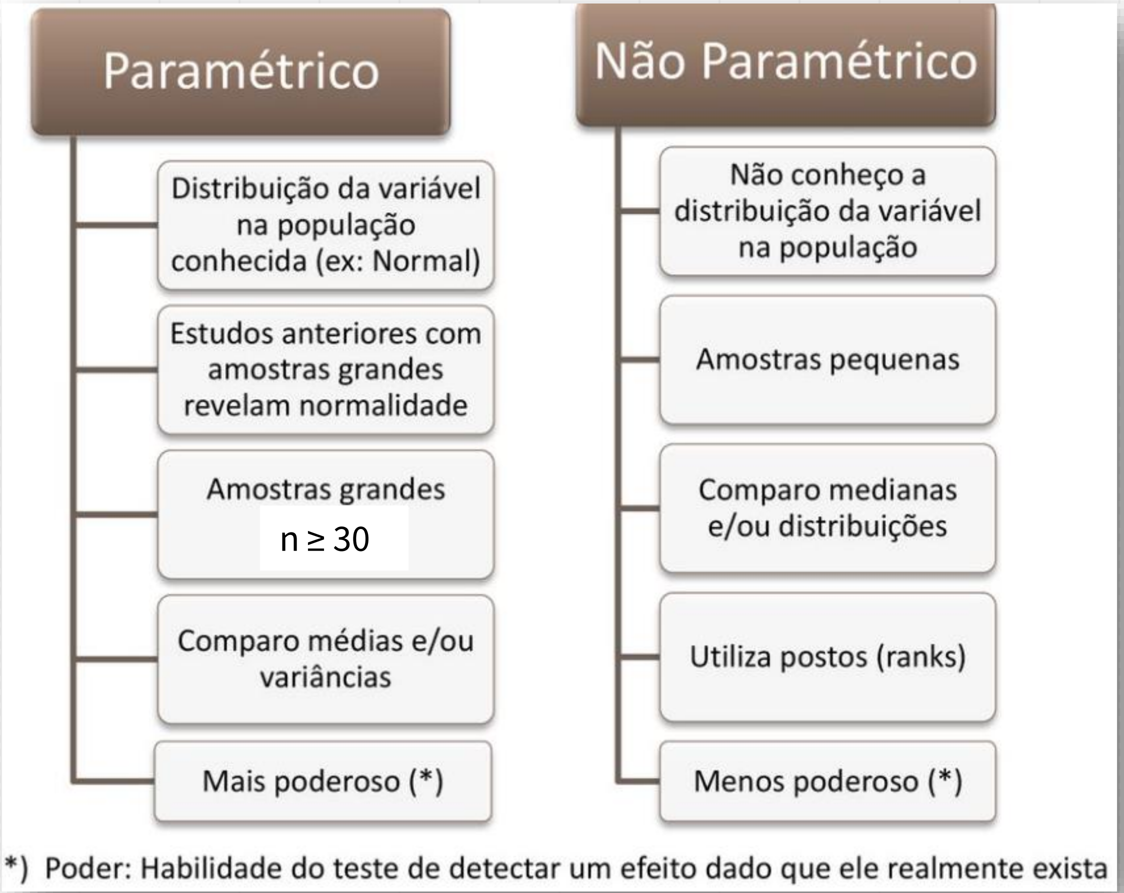
Testes Paramétricos vs Testes Não-Paramétricos

Testes Paramétricos:

- **Fazem pressupostos sobre a distribuição** dos dados:
  - Exigem a normalidade em amostras pequenas ($n < 30$).
  - Nas amostras grandes ($n \geq 30$) como a distribuição da variável média amostral é assintoticamente normal pelo **Teorema do Limite central (TLC)** podem ser aplicados os Testes Paramétricos.
- Dados contínuos.

Testes Não-Paramétricos:

- **Não fazem pressupostos sobre a distribuição** dos dados:
  - São usados quando a(s) variável(is) não tem(têm) distribuição normal ou quando, apesar da(s) amostra(s) ser(em) grande(s), se opta por conclusões mais conservadoras.
- Dados nominais, ordinais, discretos ou contínuos.
- Em geral, envolvem cálculos mais simples.
- Pouco influenciados por valores extremos.
- A desvantagem destes testes é que não são tão potentes quanto os Testes Paramétricos, ou seja, podem levar a uma maior probabilidade do erro tipo II (definido num slide mais à frente).



https://slideplayer.com.br/slide/14561961/

Testes de Hipóteses em Estudo...

Testes Paramétricos

- Testes de hipóteses para um valor médio μ
- Testes de hipóteses para uma variância σ^2
- Testes de hipóteses para uma proporção populacional p
- Testes de Hipóteses para a igualdade de médias (amostras independentes)
- Testes de Hipóteses para a razão de variâncias
- Testes de Hipóteses para a igualdade de proporções
- Testes de Hipóteses para a igualdade de médias (amostras emparelhadas)

Testes Não Paramétricos

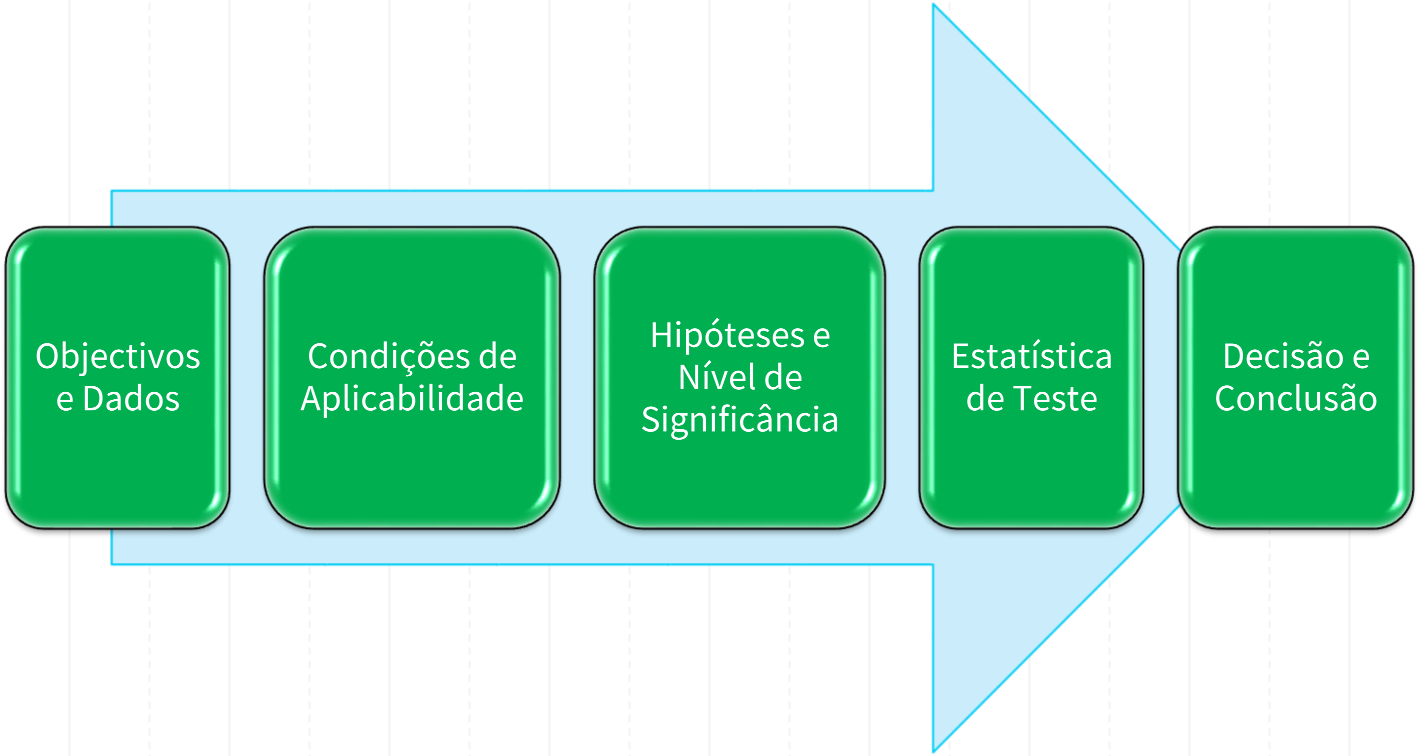
- Teste de Independência do Qui-Quadrado

Condições de Aplicabilidade de Testes Paramétricos

Normalidade

Homogenidade de variâncias

Construção de um Teste de Hipóteses



Tipo de Hipóteses

1) $H_0: \underbrace{\mu = 1,70}_{\text{simples}}$ vs. $H_1: \underbrace{\mu = 1,80}_{\text{simples}}$

2) $H_0: \underbrace{\mu = 1,70}_{\text{simples}}$ vs. $H_1: \underbrace{\mu > 1,70}_{\text{composta}}$

3) $H_0: \underbrace{\mu \leq 1,70}_{\text{comp.}}$ vs. $H_1: \underbrace{\mu > 1,70}_{\text{comp.}}$

4) $H_0: \underbrace{\mu = 1,70}_{\text{simples}}$ vs. $H_1: \underbrace{\mu \neq 1,70}_{\text{composta}}$

Tipos de Erros vs Nível de Significância

$\alpha = P(\text{erro do tipo I}) =$

$= P(\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira})$

A α chama-se nível de significância.

$\beta = P(\text{erro do tipo II}) =$

$= P(\text{"Aceitar" } H_0 | H_0 \text{ é falsa})$

Tipos de erros

- Erro tipo I (1ª espécie): rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira
- Erro tipo II (2ª espécie): não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa

Decisão	H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Não rejeitar H_0	Correto $1-\alpha$	Erro tipo II β
Rejeitar H_0	Erro tipo I α	Correto $1-\beta$

Poder ou potência do teste

Definição: Chama-se potência do teste à probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando a hipótese alternativa é verdadeira ($= 1 - \beta$).

Nível de significância ($0 \leq \alpha \leq 1$)

- Probabilidade que o investigador estabelece à priori como limite para decidir se rejeita H_0
- Níveis usuais de significância: 0,5%, 1% , 5% e 10%

Decisão: Região de Rejeição vs Valor-p

Nota: Supondo que a estatística de teste tem distribuição normal.

Região de rejeição (RR) ou Região crítica (RC): Conjunto para o qual H_0 é rejeitada

- Teste unilateral à esquerda: RR = $]-\infty; z_\alpha]$
- Teste unilateral à direita: RR = $[z_{1-\alpha}; +\infty[$
- Teste bilateral: RR = $]-\infty; -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}; +\infty[$

$\Leftrightarrow$

Regra (considerando os valores críticos):

- $z_0 \leq z_\alpha \Rightarrow$ Rejeita-se H_0
- $z_0 \geq z_{1-\alpha} \Rightarrow$ Rejeita-se H_0
- $|z_0| \geq z_{1-\alpha/2} \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

Regra: $z_0 \in$ RR $\Rightarrow$ Rejeita-se H_0

Dimensão do teste

Valor-p ou P-value: Probabilidade sob H_0 de a estatística de teste tomar valores tão ou mais desfavoráveis a H_0 do que o seu valor observado

- Teste unilateral à esquerda: valor-p = $P(Z \leq z_0)$
- Teste unilateral à direita: valor-p = $P(Z \geq z_0)$
- Teste bilateral: valor-p = $P(Z \leq -z_0 \text{ ou } Z \geq z_0) = 2 \times P(Z \geq |z_0|)$

Regra: Valor-p $< \alpha \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

O nível de significância α é a probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira (conhecido como erro do tipo I).[5] Em testes de hipóteses estatísticas, diz-se que há significância estatística ou que o resultado é estatisticamente significante quando o *p*-valor observado é menor que o nível de significância α definido para o estudo.[2][3] O nível de significância é geralmente determinado pelo pesquisador *antes* da coleta dos dados e é tradicionalmente fixado em 0,05 ou menos, dependendo da área de estudo.[6][7][8] Em muitas áreas de estudo, resultados com nível de significância de 0,05 (probabilidade de erro de 5%) são considerados estatisticamente relevantes.[9][10][11]

O *p*-valor (nível descritivo ou probabilidade de significância) é a probabilidade de se obter uma estatística de teste igual ou mais extrema que a estatística observada a partir de uma amostra aleatória de uma população quando a hipótese nula é verdadeira. Em outras palavras, o *p*-valor é o menor nível de significância para o qual se rejeita a hipótese nula. Por exemplo, a hipótese nula é rejeitada a 5% quando o *p*-valor é menor que 5%.[12]

https://pt.wikipedia.org/wiki/Signific%C3%A2ncia_estat%C3%ADstica

Definição: valor-p é o menor nível de significância a partir do qual H_0 é rejeitada.

Testes de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

8

Hipóteses Simples e Lema de Neyman-Pearson

Tipo de Hipóteses

1) $H_0: \underbrace{\mu = 1{,}70}_{\text{simples}}$ vs. $H_1: \underbrace{\mu = 1{,}80}_{\text{simples}}$

2) $H_0: \underbrace{\mu = 1{,}70}_{\text{simples}}$ vs. $H_1: \underbrace{\mu > 1{,}70}_{\text{composta}}$

3) $H_0: \underbrace{\mu \leq 1{,}70}_{\text{comp.}}$ vs. $H_1: \underbrace{\mu > 1{,}70}_{\text{comp.}}$

4) $H_0: \underbrace{\mu = 1{,}70}_{\text{simples}}$ vs. $H_1: \underbrace{\mu \neq 1{,}70}_{\text{composta}}$

Lema de Neyman-Pearson

Lema de Neyman-Pearson – (Livro)

$X \sim f(x \mid \theta), \quad \theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$ e $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ amostra casual dessa população,

Seja $C > 0$, e $W \subset \Re^n$ o conjunto do espaço-amostra definido por

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta_0)} > C \Leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W, \quad \text{em que } P\left[(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in W \mid \theta = \theta_0\right] = \alpha .$$

O teste associado com a região crítica W é o teste mais potente de dimensão α para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta = \theta_1$.

Seja X1, …, Xn uma amostra aleatória de dimensão n da distribuição normal com valor médio μ e variância 1. Determine o teste de hipóteses mais potente para testar as hipóteses nula e alternativa, H0: μ = 0 versus H1: μ = 1.

Construção do Teste de Hipóteses: Hipóteses Simples

$$A_1^* = \{ \underset{\sim}{x} ; \underbrace{e^{n\bar{x} - \frac{n}{2}} > k} \}$$

$$e^{n\bar{x} - \frac{n}{2}} > k \rightarrow e^{n\bar{x}} e^{-n/2} > k$$

$$e^{n\bar{x}} > \frac{k}{e^{-\frac{n}{2}}} \rightarrow \underbrace{\log(e^{n\bar{x}})} > \log\left(\frac{k}{e^{-\frac{n}{2}}}\right)$$

$$n\bar{x} > \log\left(\frac{k}{e^{-\frac{n}{2}}}\right)$$

$$\bar{x} > \frac{\log\left(\frac{k}{e^{-\frac{n}{2}}}\right)}{n} \quad k^*$$

$$A_1^* = \{ \underset{\sim}{x} ; \bar{x} > k^* \}$$

qual o valor de k^*?

R: Fixar o erro do tipo I

Construção do Teste de Hipóteses: Hipóteses Simples

Ex: Se fixamos $P(\text{Erro tipo I}) = 0{,}05$ qual valor de k^*?

$$P(\text{Região crítica} \mid \mu = 0) = \underbrace{P(\bar{X} > k^* \mid \mu = 0)} = 0{,}05$$

Se $X_1, \ldots, X_n \; N(\mu, 1)$, $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{n}\right)$

Estatística de teste $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{1}{n}}}$ $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \sim N(0,1)$

$$P(\bar{X} > k^* \mid \mu = 0) = P\Big(\underbrace{\sqrt{n}(\bar{X} - \underset{0}{\mu})}_{Z} > \sqrt{n}(k^* - \underset{0}{\mu})\Big) = 0{,}05$$

$$P(Z > \underbrace{\sqrt{n}\, k^*}_{1{,}645}) = 0{,}05$$

Construção do Teste de Hipóteses: Hipóteses Simples

$\sqrt{n}\, k^* = 1,645$ $\qquad k^* = \dfrac{1,645}{\sqrt{n}}$

Regra de decisão: Rejeitar H_0 se $\bar{x} > \dfrac{1,645}{\sqrt{n}}$

Suponha que $n = 9$ e $\bar{x} = 0,7$

$\bar{x} = 0,7$ $\qquad k^* = \dfrac{1,645}{\sqrt{9}} = \dfrac{1,645}{3} \doteq 0,55$

Decisão: Rejeita H_0 +

Rejeita-se H0 se a média amostral pertencer a este intervalo: RR = [1,65/n^0.5; +∞[
ou
Rejeita-se H0 se o valor da estatística de teste Z pertence a este intervalo: RR = [1,645; +∞[

z = Média*n^0,5 = 0,7*3 = 2,1 > 1,645

Obrigada!

Questões?