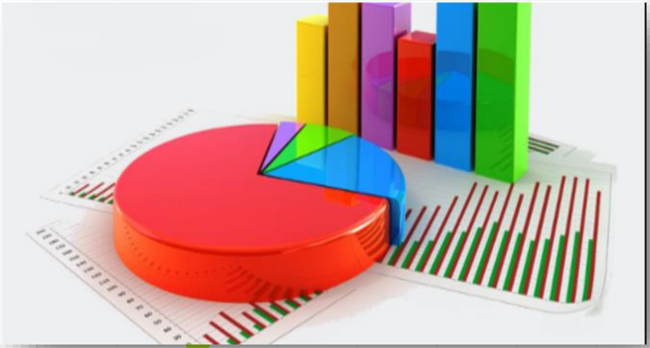
Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

Estatística I

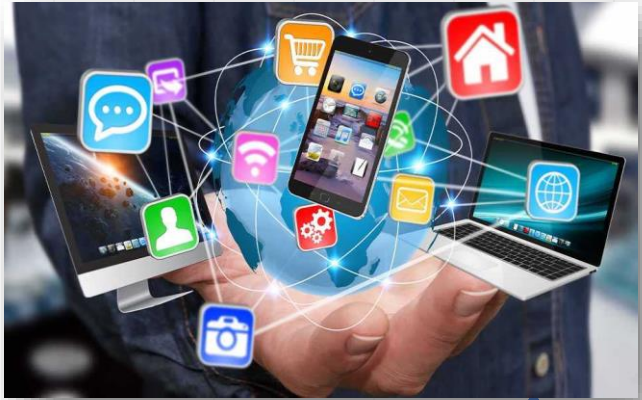
Licenciatura em Gestão
2.º Ano/1.º Semestre
2023/2024

Aulas Teórica N.ºs 13 (Semana 7)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao



https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teóricas (Semanas 1 a 3)	Aulas Teóricas (Semanas 3 a 5)	Aulas Teóricas (Semanas 5 a 7)	Aulas Teóricas (Semanas 8 a 13)
• **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	• **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Distribuições Teóricas • **Capítulo 6**: Amostragem. Distribuições por Amostragem.

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

https://cas.iseg.ulisboa.pt

Aula 13	Valores esperados de funções de duas v.a. Exemplos. Momentos de v.a. bidimensionais. Covariância como medida de associação. Propriedades e exemplos. Covariância e independência. Valores esperados condicionados. Exemplo.
Aula 14	Regra do valor esperado iterado. Exemplo e demonstração. Independência em média. Variância condicionada. Propriedades. **Início do capítulo 4**: distribuição uniforme discreta, distribuição de Bernoulli e distribuição Binomial. Propriedades.

Pares Aleatórios Discretos: Exercícios

1

Distribuição Conjunta, Marginais e Condicionais;
Independência; Covariância e Correlação

5.1 Uma loja de electrodomésticos vende televisores da marca X e da marca Y. A função de probabilidade conjunta do número de televisores vendidos diariamente é a seguinte:

$Y \setminus X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

(a) Calcule as funções de probabilidade marginais de X e de Y.

(b) Calcule a função de distribuição marginal de X.

(c) Calcule a probabilidade de que num dia a marca Y seja mais vendida do que a marca X.

(d) Determine o valor esperado e a variância do número total de televisores vendidos diariamente.

Exercício 5.1 (a): Funções de Probabilidade Marginais

$Y \setminus X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$P(y=x)$

$0.12+0.25+0.13=0.5$

$0.05+0.30+0.01=0.36$

$0.03+0.10+0.01=0.14$

$$f_X(x)=\begin{cases}0.2, & x=0\\ 0.65, & x=1\\ 0.15, & x=2\end{cases};$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}0.5, & y=0\\ 0.36, & y=1\\ 0.14, & y=2\end{cases}$$

Slides Professora Claúdia Nunes

Exercício 5.1 (b): Função de Distribuição

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

P(y = x)
0.12+0.25+0.13 = 0.5
0.05+0.30+0.01 = 0,36
0.03+0.10+0.01 = 0.14

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.2, & x = 0 \\ 0.65, & x = 1 \\ 0.15, & x = 2 \end{cases};$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0. & x < 0 \\ 0.2, & 0 \leq x < 1 \\ 0.85, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

Slides Professora Claúdia Nunes

Exercício 5.1 (c): Função de Probabilidade

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$P(y=x)$

$0.12+0.25+0.13=0.5$

$0.05+0.30+0.01=0,36$

$0.03+0.10+0.01=0.14$

P(Y>X) = P(X=0, Y= 1) + P(X=0, Y= 2) + P(X=1, Y= 2) = 0,05+0,03+0,1 = 0,18

Slides Professora Claúdia Nunes

Exercício 5.1 (d): Valor Médio e Variância da Soma

Y\X	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

P(y=x)
0.12+0.25+0.13 = 0,5
0.05+0.30+0.01 = 0,36
0.03+0.10+0.01 = 0.14

$$f_X(x)=\begin{cases}0.2, & x=0\\ 0.65, & x=1\\ 0.15, & x=2\end{cases};$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}0.5, & y=0\\ 0.36, & y=1\\ 0.14, & y=2\end{cases}$$

Cov(X,Y) = E(XY)-E(X)E(Y)

E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 0,95 + 0,64 = 1,59

Slides Professora Claúdia Nunes

Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2× Cov(X,Y)
= (1,25 – 0,95^2) + (0,92 – 0,64^2) + 2×(0,56-0,95*0,64) = 0,7619

Pares Aleatórios: Função de Probabilidade Condicional

Considere-se a função de probabilidade conjunta f(x,y) apresentada abaixo. Determine a função de probabilidade condicional de X dado que Y=1.

Caracterização condicional

[cap. 2: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$]

Tomando como "inspiração" esta fórmula, vamos definir probabilidades e momentos condicionados:

i) Prob. condicionada de X em Y

$$\boxed{P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}} \quad \forall x, y$$

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$P(Y=x)$

$0.12+0.25+0.13=0.5$

$0.05+0.30+0.01=0.36$

$0.03+0.10+0.01=0.14$

Exemplo:

$$P(X=x|Y=1) = \frac{P(X=x, Y=1)}{P(Y=1)} = \begin{cases} \frac{0.05}{0.36} & x=0 \\ \frac{0.30}{0.36} & x=1 \\ \frac{0.01}{0.36} & x=2 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Slides Professora Claúdia Nunes

Pares Aleatórios: Função de Distribuição Condicional

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$P(y=x)$

$0.12+0.25+0.13=0.5$

$0.05+0.30+0.01=0.36$

$0.03+0.10+0.01=0.14$

À custa desta probabilidade condicionada, podemos definir:

- Função de distribuição condicionada de x em y

Slides Professora Claúdia Nunes

Pares Aleatórios: Função de Distribuição Condicional

exemplo: $F_{X|Y=1}(x) = P(X \le x \mid Y=1)$

$[\, F_X(x) = P(X \le x) \,]$

$$= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{0.05}{0.36} & 0 \le x < 1 \\ \dfrac{0.05+0.30}{0.36} & 1 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$P(X \le 1.3 \mid Y=0) =$

$= \dfrac{P(X \le 1.3,\ Y=0)}{P(Y=0)} = \dfrac{0.12+0.25}{0.5}$

$P(X \le 1.3 \mid Y=1) = F_{X|Y=1}(1.3) = \dfrac{0.05+0.30}{0.36}$

Slides Professora Claúdia Nunes

Pares Aleatórios: Valores Esperados Condicionais

Valores esperados condicionados

$$\boxed{E[X|Y=y] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x\, P(X=x|Y=y)}$$

Exemplo: $E[X|Y=1] = \sum_{x=0}^{2} x\, P(X=x|Y=1)$

Exemplo:

$$P(X=x|Y=1) = \frac{P(X=x, Y=1)}{P(Y=1)} = \begin{cases} \frac{0.05}{0.36} & x=0 \\ \frac{0.30}{0.36} & x=1 \\ \frac{0.01}{0.36} & x=2 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$= 0 \times \frac{0.05}{0.36} + 1 \times \frac{0.30}{0.36} + 2 \times \frac{0.01}{0.36}$$

Pares Aleatórios: Variâncias Condicionais

$$\boxed{E[X^2 | Y=y] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x^2 P(X=x | Y=y)}$$

$$\boxed{E[g(X) | Y=y] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} g(x) P(X=x | Y=y)}$$

Em particular:

$$\boxed{\mathrm{var}[X | Y=y] = E[X^2 | Y=y] - E^2[X | Y=y]}$$

<u>NOTA</u>: idênticas definições (devidamente adaptadas para o caso de Y condicionado em X)

Função de Distribuição Conjunta

Dada uma v.a. bidimensional (par aleatório) (X,Y), discreta, a função de distribuição conjunta de (X,Y) é definida da seguinte forma:

$$F(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y] = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f(x_i, y_j),$$

e satisfaz as seguintes condições:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x,y) = 0$, com y fixo;
2. $\lim\limits_{y \to -\infty} F(x,y) = 0$, com x fixo;
3. $\lim\limits_{x,y \to -\infty} F(x,y) = 0$;
4. $\lim\limits_{x,y \to +\infty} F(x,y) = 1$;
5. $0 \leq F(x,y) \leq 1, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$;
6. $F(x_1,y_1) \leq F(x_2,y_2), \ \forall \ x_1 < x_2, \ y_1 < y_2$

Função de Distribuição Conjunta

A partir da probabilidade conjunta podemos definir a função de distribuição conjunta:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Exemplo:

$Y \setminus X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$$F_{X,Y}(1,1) = P(X \leq 1, Y \leq 1)$$

$$= \sum_{x \leq 1} \sum_{y \leq 1} P(X=x, Y=y)$$

$$= 0.12 + 0.25 + 0.05 + 0.30$$

Em termos de propriedades, tem propriedades semelhantes à f. distribuição para uma v.a, tendo em linha de conta q̃ agora temos 2 v.a.

Nota: Tal como no caso univariado, nós podemos calcular $F_{X,Y}(x,y)$ $\forall x, y$ [Temos vários

Slides Professora Claúdia Nunes

Pares Aleatórios Contínuos

2

Distribuição Conjunta, Marginais e Condicionais; Independência; Covariância e Correlação

Função Densidade de Probabilidade Conjunta

A função $f(x, y)$ é uma função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias x e y se:

1. $f(x, y) \geq 0$ p/ todos (x, y)
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\ dx\ dy = 1$
3. $P[(X, Y) \in A] = \int\int f(x, y)\ dx\ dy$ para qualquer região A no plano xy.

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Função Densidade de Probabilidade Conjunta: Exemplo

Uma fábrica de doces distribuiu caixas de chocolates com mistura de creme, toffees e amêndoas, envolta em chocolate branco e marrom. Para uma caixa selecionada ao acaso, seja x e y, respectivamente, a proporção de chocolate branco e marrom existente no creme e suponha que f.d.p. conjunta é:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x + 3y) & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

A função f(x,y) é uma fdp conjunta?

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Função Densidade de Probabilidade Conjunta: Exemplo

A função f(x,y) é uma fdp conjunta?

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dx\,dy$$

$\Rightarrow$ integra em relação a "x"; depois em relação a "y".

$$= \frac{2}{5}\int_0^1\left(\int_0^1 2x\,dx + \int_0^1 3y\,dx\right)dy$$

$$= \frac{2}{5}\int_0^1\left(2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 3yx\Big|_0^1\right)dy$$

$$= \frac{2}{5}\int_0^1 (1+3y)\,dy$$

$$= \frac{2}{5}\left[\int_0^1 dy + \int_0^1 3y\,dy\right]$$

$$= \frac{2}{5}\left[y\Big|_0^1 + \frac{3y^2}{2}\Big|_0^1\right]$$

$$= \frac{2}{5}\left[1+\frac{3}{2}\right] = \frac{2}{5}\left[\frac{2+3}{2}\right] = 1 \quad \text{c.q.d!}$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Funções Densidade de Probabilidade Marginais

$$g(x) = \sum_{y} f(x,y) \quad e \quad h(y) = \sum_{x} f(x,y) \qquad \text{variável discreta}$$

$$\boxed{g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \quad e \quad h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx} \qquad \text{variável contínua}$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Funções Densidade de Probabilidade Marginais: Exemplo

Considere-se a fdp conjunta f(x,y) apresentada abaixo. Determine a fdp marginal de X definida por g(x):

$$f(x,y) = x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y) & 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{outro valor} \end{cases}$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Por definição a distribuição de probabilidade marginal de x é dada por:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dy = \frac{2}{5}\left[2xy\Big|_0^1 + \frac{3y^2}{2}\Big|_0^1\right]$$

$$= \frac{2}{5}\left[2x + \frac{3}{2}\right] = \frac{4x}{5} + \frac{3}{5}$$

$$\therefore g(x) = \frac{4x+3}{5}$$

ou seja:

$$\therefore g(x) \begin{cases} \frac{4x+3}{5} & 0 \le x \le 1 \\ 0 \end{cases}$$

Funções Densidade de Probabilidade Marginais: Exemplo

Considere-se a fdp conjunta f(x,y) apresentada abaixo. Determine a fdp marginal de Y definida por h(y):

$$f(x,y) = x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y) & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{outro valor} \end{cases}$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 (2x+3y)dx$$

$$= \frac{2}{5}\left[\frac{2x^2}{2}\Big|_0^1 + 3yx\Big|_0^1\right] = \frac{2}{5}[1+3y]$$

$$= \frac{2+6y}{5}$$

ou seja:

$$h(y)\begin{cases} \frac{2+6y}{5} & p/\ 0 \le y \le 1 \\ 0 \end{cases}$$

Funções Densidade de Probabilidade Condicionais

Sabemos que:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad , \; P(A) > 0$$

Definindo:

A → o evento onde X = x

B → o evento onde Y = y

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \quad e \quad h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \quad \text{variável contínua}$$

Temos que:

$$P(Y = y / X = x) := \frac{f(x,y)}{g(x)}$$

ou ainda

$$P(X = x / Y = y) := \frac{f(x,y)}{h(y)}$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Funções Densidade de Probabilidade Condicionais: Exemplo

Considere-se a fdp conjunta f(x,y) = 10xy² $0 < x < y < 1$
a) Determine as fdp´s marginais de X e Y definidas por g(x) e h(y), respetivamente.
b) Determine a função densidade condicional de Y|X.
c) Calcule P(Y > 0,5 | X = 0,25)

a)

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{x}^{1} 10xy^2 dy$$

$$= \frac{10xy^3}{3}\Big|_x^1 = \frac{10x}{3}\left(1 - x^3\right) = \frac{10x - 10x^4}{3}$$

$$\boxed{g(x) = \frac{10x}{3}\Big|_x^1 = \frac{10x}{3}\left(1 - x^3\right), \qquad 0 < x < 1}$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{x=0}^{x=y} 10xy^2 dx = \frac{10y^2.x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=y}$$

$$= 5y^2\left(y^2 - 0\right) = 5y^4$$

$$\boxed{h(y) = 5y^4 \quad , \qquad 0 < y < 1}$$

Funções Densidade de Probabilidade Condicionais: Exemplo

Considere-se a fdp conjunta $f(x,y) = 10xy^2$ $0 < x < y < 1$
a) Determine as fdp´s marginais de X e Y definidas por g(x) e h(y), respetivamente.
b) Determine a função densidade condicional de Y|X.
c) Calcule P(Y > 0,5 | X = 0,25)

b)

f(y/x)

por definição $f(y/x) = \dfrac{f(x,y)}{g(x)} = \dfrac{10xy^2}{\frac{10}{3}x(1-x^3)}$

$$\boxed{= \frac{3.10xy^2}{10x(1-x^3)} = \frac{3y^2}{(1-x^3)} \quad , \quad 0 < x < y < 1}$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Funções Densidade de Probabilidade Condicionais: Exemplo

Considere-se a fdp conjunta f(x,y) = 10xy² $0<x<y<1$
a) Determine as fdp´s marginais de X e Y definidas por g(x) e h(y), respetivamente.
b) Determine a função densidade condicional de Y|X.
c) Calcule P(Y > 0,5 | X = 0,25)

c)

$$P\left(y>\frac{1}{2}\middle|x=0{,}25\right)$$

Por definição:

$$P(a<y<b/X=x)=\int_a^b f(y/x).dy$$

f(y/x)

$$\text{por definição } f(y/x)=\frac{f(x,y)}{g(x)}=\frac{10xy^2}{\frac{10}{3}x(1-x^3)}$$

$$=\frac{3.10xy^2}{10x(1-x^3)}=\frac{3y^2}{(1-x^3)} \quad , \quad 0<x<y<1$$

$$P(a<y<b/X=x)=\int_a^b f(y/x).dy$$

$$=\int_{1/2}^{1}\frac{3y^2}{(1-x^3)}dy=\frac{3}{(1-0{,}25^3)}\int_{1/2}^{1}y^2dy=\frac{3}{(1-0{,}25^3)}\left.\frac{y^3}{3}\right|_{1/2}^{1}$$

$$=\frac{1}{(1-0{,}25^3)}\left(1-\frac{1}{8}\right)=\left(\frac{1-1/8}{1-1/64}\right)=\frac{\frac{8-1}{8}}{\frac{64-1}{64}}=\frac{\frac{7}{8}}{\frac{63}{64}}=\frac{7}{8}\cdot\frac{64}{63}=\frac{8}{63}\cdot\frac{53}{63}=\frac{8}{9}$$

Função de Distribuição Conjunta

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

Distribuições Conjuntas de Probabilidade | Resumos LEIC-A

Funções de Distribuição Marginais

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du \qquad F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(u)\, du$$

Distribuições Conjuntas de Probabilidade | Resumos LEIC-A

Obrigada!

Questões?