Estatística I

Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)

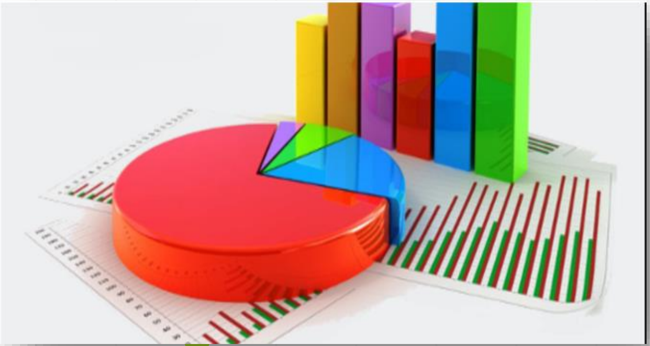
2.º Ano/1.º Semestre

2023/2024

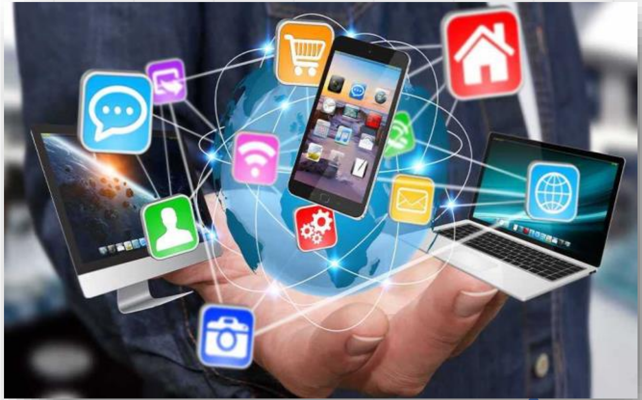
Aula Teórico-Prática N.º 13 (Semana 7)

Docente: Elisabete Fernandes

E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao



https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas TP (Semanas 1 e 3)	Aulas TP (Semanas 3 a 6)	Aulas TP (Semanas 7 a 9)	Aulas TP (Semanas 10 a 12)
• **Capítulo 1**: Análise Descritiva • **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	• **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Variáveis Aleatórias Especiais

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

3. Variáveis aleatórias unidimensionais

3.1. Variável aleatória

3.2. Função de distribuição

3.3. Classificação de variáveis aleatórias.

3.4. Variável aleatória discreta

3.5. Variável aleatória contínua

3.6. Função distribuição de uma função de uma variável aleatória

3.7. Valores esperados de variáveis aleatórias

3.8. Valores esperados de funções de variáveis aleatórias

3.9. Propriedades dos valores esperados

3.10. Momentos em relação à origem

3.11. Momentos em relação à média

3.12. Variância de uma variável aleatória

Variáveis Aleatórias Contínuas: Exercícios

1

Murteira et al (2015)

Cap3 do Livro: 11, 12, 18, 25, 26, 27, 29 e 42 (22)

18. O tempo de reparação, em dezenas de horas, de certo tipo de avarias em computadores é uma variável a aleatória com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x > 0) \\ 0 & (\text{outros } x). \end{cases}$$

a) Determine a função de distribuição da variável aleatória X.

b) Que limite superior, para o tempo de reparação, pode ser estabelecido em 40% dos casos?

c) Está instituído na empresa um sistema de prémios que atribui €20 aos trabalhadores que façam uma reparação em menos de 5 horas, e de €10 se demorar entre 5 e 8 horas. Obtenha a distribuição da variável aleatória que representa o prémio atribuído.

Exercício 18 (a): Função de Distribuição

X - v.a. tempo reparação, em dezenas horas

$f(x) = e^{-x} \quad (x > 0)$

Função de distribuição: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$

- $x < 0 \rightarrow F(x) = 0$
- $x \geq 0 \rightarrow F(x) = \int_0^x f(u)\,du = \int_0^x e^{-u}\,du = \left[-e^{-u}\right]_0^x = -e^{-x} - (-e^0) = 1 - e^{-x}$

Logo, a função de distribuição é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 - e^{-x} & (x \geq 0) \end{cases}$$

Exercício 18 (b): Limite Inferir para a V.a.

Seja k o limite superior para X. Logo, quer-se:

$P(X \leq k) = 0.4 \Leftrightarrow F(k) = 0.4 \Leftrightarrow 1 - e^{-k} = 0.4 \Leftrightarrow -e^{-k} = -0.6 \Leftrightarrow e^{-k} = 0.6 \Rightarrow$

$\Rightarrow -k = \ln(0.6) \Leftrightarrow k = -\ln(0.6) \approx 0.5108$

Exercício 18 (c): Função de Distribuição

Y - v.a. do prémio, em euros $\rightarrow$ $Y = \begin{cases} 20 & (X < 0.5) \\ 10 & (0.5 \leq X < 0.8) \\ 0 & (X \geq 0.8) \end{cases}$

$D_Y = \{0, 10, 20\}$ $\rightarrow$ Y é v.a. discreta

<u>Função probabilidade de Y</u>

• $y = 0 \rightarrow f_Y(0) = P(Y=0) = P(X \geq 0.8) = 1 - P(X < 0.8) = 1 - F_X(0.8^-) = 1 - F_X(0.8)$

$= 1 - (1 - e^{-0.8}) = e^{-0.8} \approx 0.4493$

Exercício 18 (c): Função de Distribuição

- $y = 10 \rightarrow f_Y(10) = P(Y=10) = P(0.5 \leq X < 0.8) = F_X(0.8^-) - F_X(0.5^-) =$

  $= F_X(0.8) - F_X(0.5) = (1 - e^{-0.8}) - (1 - e^{-0.5}) = e^{-0.5} - e^{-0.8} \approx$

  ≈ 0.1572

- $y = 20 \rightarrow f_Y(20) = P(Y=20) = P(X < 0.5) = F_X(0.5^-) = F_X(0.5) = 1 - e^{-0.5} \approx 0.393!$

Logo, a função probabilidade de Y é dada por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0.4493 & (y=0) \\ 0.1572 & (y=10) \\ 0.3935 & (y=20) \end{cases}$$

25. Considere a variável aleatória X com a seguinte função de probabilidade

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.2	0.2	0.1	0.3	0.2

a) Calcule $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

b) Faça $Y = 1 - 3X$ e calcule $E(Y)$ e $\mathrm{Var}(Y)$.

c) Sendo $Z = |X - 2|$, determine $E(Z)$ e $\mathrm{Var}(Z)$.

Exercício 25 (a): Valor Médio e Variância

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 & (x=0) \\ 0.2 & (x=1) \\ 0.1 & (x=2) \\ 0.3 & (x=3) \\ 0.2 & (x=4) \end{cases} \longrightarrow D = \{0,1,2,3,4\}$$

Exercício 25 (a): Valor Médio e Variância

$$E(x) = \mu_x = \sum_{x \in D} x\, f(x) = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.1 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.2 = 2.1$$

$$Var(x) = \sigma_x^2 = E\left[(x-\mu_x)^2\right] = \sum_{x \in D} (x-\mu_x)^2 f(x) = (0-2.1)^2 \times 0.2 + (1-2.1)^2 \times 0.2 +$$

$$+ (2-2.1)^2 \times 0.1 + (3-2.1)^2 \times 0.3 + (4-2.1)^2 \times 0.2 = 2.09$$

Alternativamente,

$$Var(x) = E(x^2) - \left[E(x)\right]^2$$

- $$E(x^2) = \sum_{x \in D} x^2 f(x) = 0^2 \times 0.2 + 1^2 \times 0.2 + 2^2 \times 0.1 + 3^2 \times 0.3 + 4^2 \times 0.2 = 6.5$$

$$Var(x) = 6.5 - 2.1^2 = 2.09$$

Exercício 25 (b): Valor Médio e Variância

$Y = 1 - 3X$ → É uma função linear em X.

$$E(Y) = E(1-3X) = 1 - 3E(X) = 1 - 3 \times 2.1 = -5.3$$
μ_Y

$$Var(Y) = Var(1-3X) = (-3)^2\, Var(X) = 9 \times 2.09 = 18.81$$
σ_Y^2

Exercício 25 (c): Valor Médio e Variância

$Z = |X-2|$ → É uma função não linear em X

z	0	1	2
f(z)	0,1	0,5	0,4

$$E(Z) = E(|X-2|) = \sum_{x \in D} |x-2| f(x) = |0-2| \times 0.2 + |1-2| \times 0.2 + |2-2| \times 0.1 + |3-2| \times 0.3 + |4-2| \times 0.2 = 1.3$$

μ_Z

$$Var(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$$

- $E(Z^2) = E(|X-2|^2) = E[(X-2)^2] = E(X^2 - 4X + 4) = E(X^2) - 4E(X) + 4 =$

$$= 6.5 - 4 \times 2.1 + 4 = 2.1$$

$$Var(Z) = 2.1 - 1.3^2 = 0.41$$

σ_Z^2

26. O número de unidades de um produto procuradas diariamente por uma empresa é uma variável aleatória X com função probabilidade dada por:

$$f(x) = 1/5 \quad (x = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Se o produto é vendido durante o dia, proporciona um ganho de 5 euros por unidade; se o não é, deve ser inutilizado, o que acarreta um prejuízo de 4 euros por unidade.

a) Calcule o valor esperado e a variância de X.

b) Qual deve ser o aprovisionamento diário de modo que o lucro esperado seja máximo?

Exercício 26 (a): Valor Médio e Variância

X - v.a. nº unidades procuradas

$$f_X(x) = \frac{1}{5} \quad (x = 0,1,2,3,4)$$

Ganho de 5 € por unidade vendida

Prejuízo de 4 € por unidade não vendida

Exercício 26 (a): Valor Médio e Variância

$$E(x) = \sum_x x \cdot f(x) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{5} = 2 \rightarrow \mu_x$$

$$Var(x) = E(x^2) - E(x)^2$$

- $E(x^2) = \sum_x x^2 \cdot f(x) = 0^2 \times \frac{1}{5} + 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{1}{5} + 3^2 \times \frac{1}{5} + 4^2 \times \frac{1}{5} = 6$

Logo;

$$Var(x) = 6 - 2^2 = 2 \rightarrow \sigma_x^2$$

Exercício 26 (b): Máximo

Seja,

- L - v.a. lucro
- K - aprovisionamento (stock) diário (K é constante, com $K = 0, 1, 2, 3, 4$)

$\rightarrow$ se $X < K \Rightarrow L = 5X - 4(K - X) = 5X - 4K + 4X = 9X - 4K$

$\rightarrow$ se $X \geq K \Rightarrow L = 5K$

Ou seja,

$$L = \begin{cases} 9X - 4K & (X < K) \\ 5K & (X \geq K) \end{cases} \longrightarrow L = \psi(X) \Rightarrow E(L) = \sum_{x} \psi(x) f(x)$$

Exercício 26 (b): Máximo

• Se $K=0 \Rightarrow L = \begin{cases} 0 & (x \geq 0) \end{cases}$

$$E(L) = \sum_{x=0}^{4} 0 \times \frac{1}{5} = \sum_{x=0}^{4} 0 = 5 \times 0 = 0$$

• Se $K=1 \Rightarrow L = \begin{cases} 9x-4 & (x<1) \\ 5 & (x \geq 1) \end{cases}$

$$E(L) = \sum_{x=0}^{0} (9x-4) \times \frac{1}{5} + \sum_{x=1}^{4} 5 \times \frac{1}{5} = (9 \times 0 - 4) \times \frac{1}{5} + \sum_{x=1}^{4} 1 = -\frac{4}{5} + 4 \times 1 = 3.2$$

• Se $K=2 \Rightarrow L = \begin{cases} 9x-8 & (x<2) \\ 10 & (x \geq 2) \end{cases}$

$$E(L) = \sum_{x=0}^{1} (9x-8) \times \frac{1}{5} + \sum_{x=2}^{4} 10 \times \frac{1}{5} = (9 \times 0 - 8) \times \frac{1}{5} + (9 \times 1 - 8) \times \frac{1}{5} + \sum_{x=2}^{4} 2 =$$

$$= -\frac{8}{5} + \frac{1}{5} + 3 \times 2 = 4.6$$

Exercício 26 (b): Máximo

• se $K = 3 \Rightarrow L = \begin{cases} 9x - 12 & (x < 3) \\ 15 & (x \geq 3) \end{cases}$

$$E(L) = \sum_{x=0}^{2} (9x - 12) \times \frac{1}{5} + \sum_{x=3}^{4} 15 \times \frac{1}{5} = (9 \times 0 - 12) \times \frac{1}{5} + (9 \times 1 - 12) \times \frac{1}{5} + (9 \times 2 - 12) \times \frac{1}{5}$$

$$+ \sum_{x=3}^{4} 3 = -\frac{12}{5} - \frac{3}{5} + \frac{6}{5} + 2 \times 3 = 4.2$$

• se $K = 4 \Rightarrow L = \begin{cases} 9x - 16 & (x < 4) \\ 20 & (x \geq 4) \end{cases}$

$$E(L) = \sum_{x=0}^{3} (9x - 16) + \sum_{x=4}^{4} 20 \times \frac{1}{5} = (9 \times 0 - 16) \times \frac{1}{5} + (9 \times 1 - 16) \times \frac{1}{5} + (9 \times 2 - 16) \times \frac{1}{5} +$$

$$+ (9 \times 3 - 16) \times \frac{1}{5} + \sum_{x=4}^{4} 4 = -\frac{16}{5} - \frac{7}{5} + \frac{2}{5} + \frac{11}{5} + 1 \times 4 = 2$$

Logo, o aprovisionamento diário deverá ser de $K = 2$ unidades de produto.

27. Sabe-se que o primeiro e o segundo momentos em relação à origem da variável aleatória discreta X, são iguais a 6 e a 62, respectivamente. Sendo $Y = (X/2) + 3$, determine a média, a variância e o desvio padrão de Y.

Exercício 27: Média, Variância e Desvio Padrão

$E(X) = 6 \qquad E(X^2) = 62$

$Y = \frac{X}{2} + 3$

$$\underset{\mu_Y}{E(Y)} = E\left(\frac{X}{2} + 3\right) = \frac{1}{2} E(X) + 3 = \frac{1}{2} \cdot 6 + 3 = 6$$

$$\underset{\sigma_Y^2}{Var(Y)} = Var\left(\frac{X}{2} + 3\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 Var(X) = \frac{1}{4}\left\{E(X^2) - [E(X)]^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(62 - 6^2\right) = \frac{1}{4} \cdot 26 = 6.5$$

$$\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{6.5} \approx 2.5495$$

29. Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade,

$$f_X(x) = \begin{cases} x & (0 < x < 1) \\ 1/2 & (1 < x < 2). \end{cases}$$

a) Calcule a média e a variância de X.

b) Utilizando as propriedades do valor esperado, obtenha a média e a variância da variável aleatória $Y = 4X - 2$.

c) Calcule a média das seguintes variáveis aleatórias:

$$Z = \frac{1}{X}\,;\; U = \begin{cases} -1 & (X < 0.5) \\ 1 & (X \geq 0.5). \end{cases}$$

d) Determine o 1.º e o 3.º quartis.

Exercício 29 (a): Média e Variância

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot x\, dx + \int_1^2 x \cdot \tfrac{1}{2}\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1^3}{3} + \left(\frac{2^2}{4} - \frac{1^2}{4}\right) = \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{13}{12} \approx 1.0833$$

$$\mathrm{Var}(X) = \cancel{E[(x-\mu_x)^2]} = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\bullet\ E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_0^1 x^2 \cdot x\, dx + \int_1^2 x^2 \cdot \tfrac{1}{2}\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{6}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1^4}{4} + \left(\frac{2^3}{6} - \frac{1^3}{6}\right) = \frac{1}{4} + \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{17}{12}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{17}{12} - \left(\frac{13}{12}\right)^2 = \frac{35}{144} \approx 0.24306$$

Ou,

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[(X-\mu_X)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_x)^2 f(x)\, dx = \int_0^1 \left(x - \frac{13}{12}\right)^2 \cdot x\, dx + \int_1^2 \left(x - \frac{13}{12}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\, dx$$

$$= \ldots = \frac{35}{144}$$

Exercício 29 (b): Média e Variância

$Y = 4X - 2$

$E(Y) = E(4X-2) = 4E(X) - 2 = 4 \times 13/12 - 2 = 7/3 \approx 2.3333$

$Var(Y) = Var(4X-2) = 4^2\, Var(X) = 16 \times 35/144 = 35/9 \approx 3.8889$

Exercício 29 (c): Média

$$Z = \underbrace{1/X}_{\psi(X)}$$

$$E(Z) = E(1/X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot x\, dx + \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}\, dx = \int_0^1 1\, dx + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \left[x\right]_0^1 + 1/2 \left[\ln|x|\right]_1^2 = 1 + 1/2 (\ln 2 - \ln 1) = 1 + 1/2 \ln 2 \approx 1.3466$$

$$U = \begin{cases} -1 & (X < 0.5) \\ 1 & (X \geq 0.5) \end{cases}$$

$$E(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot f(x)\, dx = \int_0^{0.5} (-1) \cdot x\, dx + \int_{0.5}^1 1 \cdot x\, dx + \int_1^2 1 \cdot 1/2\, dx =$$

$$= \left[-x^2/2\right]_0^{0.5} + \left[x^2/2\right]_{0.5}^1 + \left[x/2\right]_1^2 = -\frac{0.5^2}{2} + \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0.5^2}{2}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} =$$

$$= 3/4 = 0.75$$

Exercício 29 (d): 1º e 3º Quartis

1º Quartil: $Q_{0.25}$

$$\int_{-\infty}^{Q_{0.25}} f(x)\,dx = 0.25$$

3º Quartil: $Q_{0.75}$

$$\int_{-\infty}^{Q_{0.75}} f(x)\,dx = 0.75$$

Verificação da posição dos quartis nos Ramos. Para o 1º Ramo tem-se:

$$\int_0^1 x\,dx = \left[x^2/2\right]_0^1 = 1/2 = 0.5 \Rightarrow \begin{cases} 1º\text{ Quartil no 1º Ramo}: & 0 < Q_{0.25} < 1 \\ 3º\text{ Quartil no 2º Ramo}: & 1 < Q_{0.75} < 2 \end{cases}$$

$$Q_{0.25}: \int_0^{Q_{0.25}} x\,dx = 0.25 \Leftrightarrow \left[x^2/2\right]_0^{Q_{0.25}} = 0.25 \Leftrightarrow \frac{(Q_{0.25})^2}{2} = 0.25 \Leftrightarrow (Q_{0.25})^2 = 0.5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q_{0.25} = \sqrt{0.5} \vee Q_{0.25} = -\sqrt{0.5} \Rightarrow Q_{0.25} = \sqrt{0.5} \approx 0.7071$$

$$Q_{0.75}: \int_0^1 x\,dx + \int_1^{Q_{0.75}} 1/2\,dx = 0.75 \Leftrightarrow 0.5 + \left[x/2\right]_1^{Q_{0.75}} = 0.75 \Leftrightarrow \frac{Q_{0.75}}{2} - \frac{1}{2} = 0.2$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q_{0.75}}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow Q_{0.75} = 3/2 = 1.5$$

42. A variável aleatória X tem função probabilidade tal que

$$f(x) = \frac{x}{10} \quad (x = 1, 2, 3, 4).$$

a) Calcule $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

b) Sendo $Y = X^2$, determine $E(Y)$ e $\mathrm{Var}(Y)$.

Exercício 42 (a): Valor Médio e Variância

$f(x) = \frac{x}{10} \quad (x = 1, 2, 3, 4)$

(a)

$$E(x) = \sum_x x\, f(x) = \sum_{x=1}^{4} x \cdot \frac{x}{10} = \sum_{x=1}^{4} \frac{x^2}{10} = \frac{1^2}{10} + \frac{2^2}{10} + \frac{3^2}{10} + \frac{4^2}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$\bullet\ E(x^2) = \sum_x x^2 f(x) = \sum_{x=1}^{4} x^2 \cdot \frac{x}{10} = \sum_{x=1}^{4} \frac{x^3}{10} = \frac{1^3}{10} + \frac{2^3}{10} + \frac{3^3}{10} + \frac{4^3}{10} = \frac{100}{10} = 10$$

Logo,

$$Var(x) = 10 - 3^2 = 1$$

Exercício 42 (b): Valor Médio e Variância

$Y = X^2$

$E(Y) = E(X^2) = 10$

$Var(Y) = Var(X^2) = E(X^4) - [E(X^2)]^2$

- $E(X^4) = \sum_x x^4 f(x) = \sum_{x=1}^{4} x^4 \frac{x}{10} = \sum_{x=1}^{4} \frac{x^5}{10} = \frac{1^5}{10} + \frac{2^5}{10} + \frac{3^5}{10} + \frac{4^5}{10} = \frac{1300}{10} = 130$

Logo,

$Var(Y) = 130 - 10^2 = 30$

Extra

22. Seja X uma variável aleatória com função densidade definida por:

$$f_X(x) = kx^2 \quad (-1 < x < 1).$$

a) Mostre que $k = 1.5$.

b) Sabendo que X é positivo, e utilizando a função de distribuição, calcule a probabilidade de X ser maior que 0.5.

c) Obtenha a função de distribuição da variável aleatória Y que concentra os valores negativos de X no ponto zero e mantém, sem alteração, os positivos. Classifique a variável aleatória.

d) Se $Z = (X^3 + 1)/2$, verifique que a respectiva função densidade é $g(z) = 1$ para $0 < z < 1$.

Exercício 22 (a): fdp

$f_X(x) = K x^2 \quad (-1 < x < 1)$

(a)

$K: \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} K x^2\,dx = 1 \Leftrightarrow K\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow K\left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = 1 \Leftrightarrow K \cdot \frac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow K = \frac{3}{2} = 1.5$

Logo,

$f_X(x) = 1.5\ x^2 \quad (-1 < x < 1)$

Exercício 22 (b): Probabilidade

$$P(X > 0.5 \mid X > 0) = ?$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du = \int_{-1}^{x} 1.5\, u^2\, du = 1.5 \left[\frac{u^3}{3} \right]_{-1}^{x} = 1.5 \left(\frac{x^3}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) =$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{x^3 + 1}{2}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x < -1) \\ \frac{x^3+1}{2} & (-1 \leq x < 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

Exercício 22 (b): Probabilidade

Logo,

$$P(X>0.5 \mid X>0) = \frac{P(X>0.5 \cap X>0)}{P(X>0)} = \frac{P(X>0.5)}{P(X>0)} = \frac{1-P(X\leq 0.5)}{1-P(X\leq 0)} =$$

$$= \frac{1-F_X(0.5)}{1-F_X(0)} = \frac{1-(0.5^3+1)/2}{1-(0^3+1)/2} = 0,875$$

Exercício 22 (c): Probabilidade

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x < -1) \\ \frac{x^3+1}{2} & (-1 \leq x < 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 0 & (X < 0) \\ X & (X \geq 0) \end{cases}$$

- $y = 0 \rightarrow P(Y=0) = P(X<0) = F_X(0^-) = F_X(0) = \frac{1}{2}$ → $y = 0$ é ponto de descontinuidade

- $0 \leq x < 1 \Leftrightarrow 0 \leq y < 1$

$$\rightarrow F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq y) = F_X(y) = \frac{y^3+1}{2}$$

Exercício 22 (c): Probabilidade

Logo,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & (y < 0) \\ \dfrac{y^2+1}{2} & (0 \leq y < 1) \\ 1 & (y \geq 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} Y \text{ é v.a. mista} \\ D_Y = \{0\} \neq \phi \text{ e } P(Y=0) = \frac{1}{2} < 1 \end{array}$$

Exercício 22 (d): Função de Distribuição

$$Z = \frac{X^3+1}{2}$$

$$G(z) = P(Z \leq z) = P\left(\frac{X^3+1}{2} \leq z\right) = P\left(X^3+1 \leq 2z\right) = P\left(X^3 \leq 2z-1\right) = P\left(X \leq (2z-1)^{1/3}\right)$$

$$= F_X\left((2z-1)^{1/3}\right)$$

- $x < -1 \Leftrightarrow x^3 < -1 \Leftrightarrow x^3+1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x^3+1}{2} < 0 \Leftrightarrow z < 0$

$\rightarrow G(z) = F_X\left((2z-1)^{1/3}\right) = 0$

Exercício 22 (d): Função de Distribuição

- $-1 \leq x < 1 \iff -1 \leq x < 1 \iff 0 \leq x^3 + 1 < 2 \iff 0 \leq \frac{x^3+1}{2} < 1 \iff 0 \leq z < 1$

$$\rightarrow G(z) = F_X\left((2z-1)^{1/3}\right) = \frac{\left[(2z-1)^{1/3}\right]^3 + 1}{2} = \frac{2z - 1 + 1}{2} = z$$

- $x \geq 1 \iff x^3 \geq 1 \iff x^3 + 1 \geq 2 \iff \frac{x^3+1}{2} \geq 1 \iff z \geq 1$

$$\rightarrow G(z) = F_X\left((2z-1)^{1/3}\right) = 1$$

Exercício 22 (d): Função de Distribuição

Logo,

$$G(z) = \begin{cases} 0 & (z < 0) \\ z & (0 \leq z < 1) \\ 1 & (z \geq 1) \end{cases}$$

Porque $g(z) = G'(z)$, obtém-se:

$g(z) = (z)' = 1 \quad (0 < z < 1)$ e $g(z) = 0 \quad$ (outros z)

Logo,

$g(z) = 1 \quad (0 < z < 1)$

Obrigada!

Questões?