Matemática II (1.º semestre, 2023/2024)
Exame da Época Normal
4 de janeiro de 2024

Nome: ______________________________ N.º de aluno/a: __________

Cotações								
1(a)	1(b)	1(c)	1(d)	2(a)	2(b)	3(a)	3(b)	3(c)
4(a)	4(b)	5	6(a)	6(b)	7			

Leia cuidadosamente as instruções seguintes:

1. Os telemóveis devem ser desligados e guardados. A utilização de telemóveis, *smartwatches*, computadores portáteis e demais equipamentos de comunicação é estritamente proibida durante a realização da prova. **A sua utilização determinará a anulação da prova, sem prejuízo da aplicação de outras eventuais sanções.**
2. Durante a prova os alunos não podem comunicar entre si por quaisquer meios. Qualquer tentativa de comunicação implicará a anulação das provas dos intervenientes.
3. É permitida a consulta de um formulário, preparado pelo próprio aluno, que não exceda 1 folha (2 páginas) A4.
4. **Não é permitido o uso de calculadora**.
5. As respostas deverão ser escritas a caneta preta ou azul e com letra legível. **Respostas a lápis ou a outra cor não serão consideradas.**
6. Só é permitido sair da sala 30 minutos após o início da prova, não sendo possível voltar a entrar. A saída da sala implicará a entrega da prova, ou a desistência.
7. Não serão esclarecidas dúvidas durante a prova. Quaisquer dúvidas deverão ser apresentadas por escrito para que possam ser, eventualmente, consideradas na correção.
8. **O enunciado do exame deve ser entregue entre as folhas de resposta**.

O exame tem uma duração de duas (2) horas.

1. Considere a matriz:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(1 val.) (a) Mostre que $\mathbf{u} = (1,0,0)$ e $\mathbf{v} = (0,0,1)$ são vetores próprios de A associados ao mesmo valor próprio e determine-o.

(1½ val.) (b) Sabendo que $A\mathbf{w} = \mathbf{w}$, para algum $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$, indique outro valor próprio de A e determine $\mathbf{w}$.

(1 val.) (c) Justifique que A é diagonalizável e indique uma matriz diagonal semelhante a A.

(1 val.) (d) Calcule a entrada $(3,2)$ da matriz A^5.

2. Considere a função $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = \ln(x+2y)\sqrt{x^2+y^2-2}.$$

(1 val.) (a) Determine analiticamente o domínio de f, D_f, e represente-o graficamente.

(1½ val.) (b) Descreva analiticamente a fronteira de D_f, $\mathrm{fr}(D_f)$, averigue se D_f é fechado, e indique uma sucessão de termos em D_f convergente para um ponto de $\mathrm{fr}(D_f)$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{3x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(1½ val.) (a) Mostre que f é contínua na origem.

(1½ val.) (b) Calcule $\nabla f(0,0)$ e a derivada de f em $(0,0)$ segundo o vetor $\mathbf{v} = (1,2)$.

(1 val.) (c) Com base nas alíneas anteriores, o que pode concluir acerca da diferenciabilidade de f na origem?

4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = -y + y^2 + x^2 - x^4$.

(2 val.) (a) Determine e classifique os pontos críticos, ou de estacionaridade, da função.

(1 val.) (b) Mostre que a função f não tem extremantes globais.

(2 val.) 5. Determine os extremos absolutos da função
$$f(x,y,z) = 2y + z$$
no conjunto $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9\right\}$.

6. Dado o integral $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \sin\left(y^3\right) dydx$.

(½ val.) (a) Esboce a região de integração.

(1½ val.) (b) Calcule o integral invertendo a ordem de integração. (*Não serão consideradas respostas que utilizem a ordem de integração dada no enunciado.*)

(2 val.) 7. Resolva o seguinte problema de valores iniciais:
$$\begin{cases} y' - \frac{3}{x} y = x \\ y(1) = 3 \end{cases}.$$