

Simulação e Otimização

Capítulo 1: Técnicas de resolução de problemas de otimização combinatoria



Ano letivo 2024/2025

Relaxações

1. Considere os seguintes problemas de PLIM.

(a)	(c)
$\begin{aligned} \max & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a: } & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \max & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a: } & \frac{2}{3}x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$
(b)	(d)
$\begin{aligned} \max & 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a: } & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq -2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \max & x_1 + x_2 \\ \text{s.a: } & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 0 \text{ e inteiro} \end{aligned}$

Indique, justificando, quais são os problemas que formam um par (problema original, relaxação).

2. Considere os seguintes problemas de PLI:

(a)	(b)
$\begin{aligned} \max & 5x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a: } & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 - x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \min & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a: } & x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ & 2x_1 + x_1 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$

Resolva a sua relaxação linear e indique o que pode concluir sobre o seu valor ótimo.

3. Indique uma relaxação, que não seja a linear, do seguinte problema de PLI:

$$\begin{aligned} \min & 3x_1 - x_2 \\ \text{s.a: } & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

4. Escreva a relaxação lagrangeana dos seguintes PLI, relaxando as restrições assinaladas com (*).

(a)

$$\begin{aligned} \max z &= 16x_1 + 10x_2 + 4x_4 \\ \text{sujeito a: } 8x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &\leq 10 \quad (*) \\ x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_3 + x_4 &\leq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a: } 2x_1 + 5x_2 &\geq 3 \quad (*) \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 3 \quad (*) \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

5. Resolva os problemas relaxados do exercício anterior considerando os seguintes multiplicadores de Lagrange.

(a) i. $u = 2$

ii. $u = 0,5$

iii. $u = 1$

iv. $u = 6$

(b) i. $u = (1, 1)$

ii. $u = (\frac{3}{8}, \frac{3}{8})$

iii. $u = (0, 1)$

iv. $u = (0, \frac{1}{2})$

Indique, em cada alínea, o valor do melhor limite encontrado.

6. Considere o seguinte problema de PLIM.

$$\begin{aligned} \min z &= 7x_{11} + 8x_{12} + 3x_{21} + 5x_{22} + 7x_{31} + 9x_{32} + 150y_1 + 94y_2 + 105y_3 \\ \text{s. a: } x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 41 \quad (*) \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &\geq 55 \\ x_{11} + x_{12} &\leq 38y_1 \quad (*) \\ x_{21} + x_{22} &\leq 32y_2 \\ x_{31} + x_{32} &\leq 30y_3 \\ y_i &\in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, 3 \\ x_{ij} &\geq 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

(a) Atribuindo valores admissíveis aos multiplicadores de Lagrange defina e resolva a relaxação Lagrangeana do problema, relaxando as restrições assinaladas com (*). Relacione o valor ótimo do problema resolvido com o valor ótimo do problema inicial (sem o resolver).

(b) Escreva o enunciado de um problema que pudesse dar origem ao modelo apresentado e defina as variáveis de forma compatível.

(c) Escreva um enunciado para uma nova restrição que inclua apenas as variáveis binárias e escreva a restrição correspondente a adicionar ao modelo inicial.

7. Considere o seguinte PLI

$$z = \max\{c(x) : Ax \geq b, Dx \leq d, Tx = t, x \in X \cap \mathbb{Z}^n\}.$$

Deduza as expressões da relaxação lagrangeana e do problema dual lagrangeano considerando que todos os conjuntos de restrições (à exceção das restrições que definem X) devem ser relaxados.

8. Considere o seguinte PLI.

$$\begin{aligned}(P) \equiv \max z &= x_1 + 10x_2 \\ \text{s.a: } 4x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ e inteiros}\end{aligned}$$

- (a) Resolva graficamente a relaxação linear de (P).
- (b) Considere a relaxação Lagrangeana obtida relaxando a primeira restrição $4x_1 + x_2 \leq 4$.
 - i. Resolva para os seguintes valores dos multiplicadores: $0, \frac{1}{4}, 4$.
 - ii. Determine a função dual Lagrangeana.
 - iii. Resolva o problema dual Lagrangeano. O que pode concluir sobre a solução ótima de P?
- (c) Considere a relaxação lagrangeana obtida relaxando a segunda restrição $x_1 + 2x_2 \leq 3$.
 - i. Mostre que satisfaz a propriedade da integralidade.
 - ii. Determine o valor ótimo do problema dual Lagrangeano.

Resolução exata de POCs

Algoritmo de branch-and-bound

9. Escreva o algoritmo de branch-and-bound considerando que P é um problema de maximização.
10. Resolva utilizando o algoritmo de B&B os seguintes PLIs, considerando as seguintes regras de ramificação:
(i) Ramificando a variável de menor índice, e (ii) Ramificando a variável mais fracionária.

(a)

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s.a: } & -x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ & x_1 - x_2 \leq 16 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \min z &= 5x_1 + x_2 \\ \text{s.a: } & 5x_1 - x_2 \geq 7 \\ & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

11. Considere o seguinte problema de PLI:

$$\begin{aligned} \min z &= 21x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 10x_4 \\ \text{s.a: } & 1.4x_1 - 2.3x_2 + 2.4x_3 + 2.2x_4 \geq 33.3 \\ & -0.5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 5 \\ & -x_1 - 0.8x_2 + 2.5x_3 - 3.5x_4 \geq 15 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

Resolva recorrendo ao algoritmo de branch-and-bound, considerando como critério de paragem “resolver não mais de dez subproblemas”, e ramificando escolhendo sempre a variável de índice mais baixo. Indique a melhor SA encontrada e indique o valor ótimo ou, caso não o tenha encontrado, enquadre-o utilizando os melhores valores possíveis para o minorante e o majorante. Nota: Utilize o Solver do Excel para resolver as relaxações lineares dos subproblemas.

12. Considere o seguinte problema de PLI

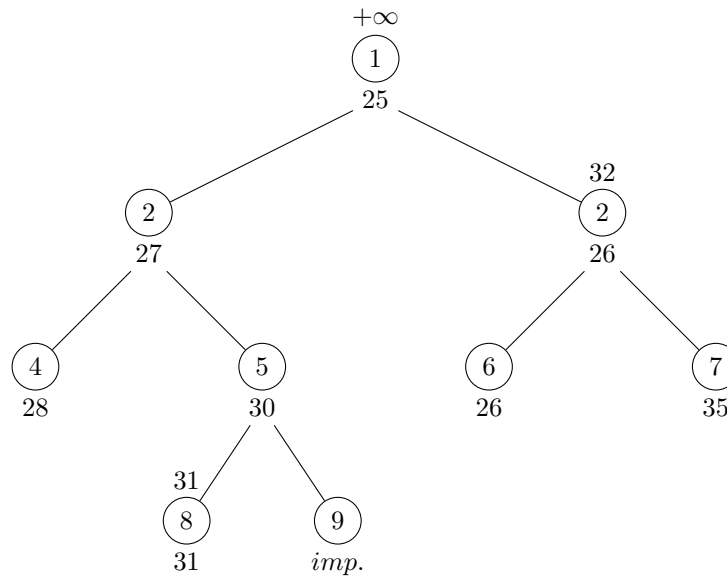
$$\begin{aligned} (P) \equiv \max z(u) &= x_1 - x_2 \\ \text{s.a: } & 2x_1 - x_2 \leq 3 \\ & 6x_1 + 10x_2 \geq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

- (a) Resolva graficamente a relaxação linear de (P). O que pode concluir acerca do valor ótimo de (P)?
(b) Resolva (P) com o algoritmo de branch-and-bound.
(c) Seja $u \geq 0$. Considere

$$\begin{aligned} (P_u) \equiv \max z &= x_1 - x_2 + u(3 - 2x_1 + x_2) \\ \text{s.a: } & 6x_1 + 10x_2 \geq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

Mostre que $v(P_u) \geq v(P)$. Determine $v(P_u)$ para u igual a 0, $\frac{1}{2}$ e 1.

13. Considere a seguinte árvore enumerativa para um problema de minimização, onde se indicam os limites inferiores para os subproblemas associados a cada nodo, bem como limites superiores para alguns dos subproblemas.



- (a) Indique os melhores limites, inferior e superior, para o valor ótimo do problema, bem como um majorante do desvio da melhor solução em relação ao valor ótimo.
- (b) Quais os nodos da árvore apresentada poderiam ser cancelados e quais deveriam estar sujeitos a nova ramificação ?
14. Resolva pelo algoritmo de branch-and-bound os seguintes problemas de PLI. Escolha para ramificar o problema com melhor majorante/minorante (em caso de empate escolha o último problema criado), e a variável fracionária mais próxima de 0.5 (em caso de empate escolha a variável com maior coeficiente na FO).
- (a) (b)

$$\begin{aligned}
 \max z &= 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a: } &2x_1 + 5x_2 \leq 25 \\
 &x_1 + x_2 \leq 7 \\
 &x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \min z &= -3x_1 + x_2 \\
 \text{s.a: } &16x_1 - 4x_2 \leq 13 \\
 &-3x_1 - 2x_2 \leq -8 \\
 &x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}
 \end{aligned}$$

Algoritmo de planos de corte de Gomory

15. Considere o seguinte problema de programação linear inteira:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 10x_2 \\ \text{s.a:} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

Indique quais das seguintes desigualdades são válidas para o problema apresentado e, das desigualdades válidas, quais são planos de corte para a solução ótima da relaxação linear.

- i. $3x_1 + 4x_2 \leq 6$
- ii. $-2x_1 + 2x_2 \leq 1$
- iii. $-x_1 + 2x_2 \leq 3$
- iv. $x_1 + 3x_2 \leq 4$

16. Resolva os problemas de PLI apresentados de seguida utilizando o algoritmo de planos de corte de Gomory. Represente graficamente os cortes de Gomory obtidos para cada um dos problemas.

(a) (b)

$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 10x_2 \\ \text{s.a:} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.a:} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \in \{0, 1\} \end{aligned}$
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

17. Considere o seguinte PLI em que x_2 e x_3 são as VBs na SO da sua relaxação linear.

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a:} \quad & 9x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 27 \\ & 2x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 16 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

Obtenha o valor ótimo da relaxação linear após a introdução de um corte de Gomory. Para gerar o corte de Gomory considere a restrição associada à VB de menor índice. Compare o valor obtido com o valor que obteria se resolvesse o PLI dado. Sem resolver, explique se seria necessário introduzir novo corte.

Técnicas de melhoria

18. Aplique as técnicas de melhoria aprendidas ao seguinte PLB de forma a obter um problema equivalente com menos restrições funcionais. Se possível, identifique uma SO sem resolver o problema.

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 4x_5 + x_6 + 6x_7 + x_8 + 4x_9 \\ \text{s.a: } x_1 + x_3 - x_7 - x_9 &\geq 1 \\ x_2 + x_3 + 4x_7 + x_9 &\geq 4 \\ x_6 + x_7 &\leq 1 \\ x_2 + 2x_5 + 3x_8 + 2x_9 &\geq 4 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 - x_7 - 3x_8 + x_9 &\leq 5 \\ x_i &\in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 9 \end{aligned}$$

19. Aplique o algoritmo de fortalecimento de restrições com variáveis binárias à restrição $3x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 1$, com $x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$.
20. Encontre dois cortes de cobertura para a seguinte restrição de um problema saco-mochila

$$7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 12.$$

21. Considere o conjunto

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^+, y_1, y_2, y_3, y_4 \in \{0, 1\} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 36, x_1 \leq 20y_1, x_2 \leq 10y_2, x_3 \leq 10y_3, x_4 \leq 8y_4\}.$$

Derive uma restrição válida para X que seja uma restrição saco-mochila.

22. Determine desigualdades válidas para o conjunto de pontos (x_1, \dots, x_m, y) definidos por

$$\sum_{i=1}^m x_i \leq my, 0 \leq x_i \leq 1, y \in \{0, 1\}.$$