

# Simulação e Otimização

## Capítulo 1: Soluções incompletas



Ano letivo 2024/2025

1. O PL da alínea (b) é uma relaxação do da alínea (a) e o PL da alínea (a) é relaxação do da alínea (d).

2. (a)  $x^{RL} = (3, 0) \implies z = z^{RL} = 15$

(b)  $x^{RL} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) \implies z^{RL} = \frac{24}{5} \leq z$

3. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \min & 3x_1 - x_2 \\ \text{s.a: } & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

4. (a)

$$\begin{aligned} \max z &= 10u + (16 - 8u)x_1 + (10 - 2u)x_2 - ux_3 + (4 - 4u)x_4 \\ \text{sujeito a: } & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_3 + x_4 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \text{ e } u \geq 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \min z &= 3u_1 + 3u_2 + (3 - 2u_1 - 5u_2)x_1 + (2 - 5u_1 - 2u_2)x_2 \\ \text{sujeito a: } & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0 \text{ e } u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

5. (a) i.  $x^* = (0, 1, 0, 0), z(2) = 26$   
 ii.  $x^* = (1, 0, 0, 1), z(0.5) = 19$   
 iii.  $x^* = (1, 0, 0, 0), z(1) = 18$   
 iv.  $x^* = (0, 0, 0, 0), z(2) = 60 \implies$  Melhor limite  $z(1)$

- (b) i.  $x^* = (8, 0), z(1, 1) = -26$   
 ii.  $x^* = (0, 4), z(3/8, 3/8) = -1/4$   
 iii.  $x^* = (8, 0), z(0, 1) = -13$   
 iv.  $x^* = (0, 0), z(0, 1/2) = 3/2 \implies$  Melhor limite  $z(0, 1/2)$

6. Considere o seguinte problema de PLIM.

(a)

$$\begin{aligned} \min z(u_1, u_2) &= 41u_1 + (7 - u_1 - u_2)x_{11} + (8 - u_2)x_{12} + (3 - u_1)x_{21} + 5x_{22} + (7 - u_1)x_{31} + 9x_{32} + \\ & (150 + 38u_2)y_1 + 94y_2 + 105y_3 \\ \text{s. a: } & x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 55 \\ & x_{21} + x_{22} \leq 32y_2 \\ & x_{31} + x_{32} \leq 30y_3 \\ & y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, 3 \\ & x_{ij} \geq 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ e } u_1 \geq 0, u_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Por exemplo,  $z(1, -1) = 426 \leq z$ .

7.

$$z(u, v, y) = \max\{c(x) + u(b - Ax) + v(d - Dx) + y(t - Tx) : x \in X \cap \mathbb{Z}^n\}$$

$$w^{DL} = \min\{z(u, v, y) : u \leq 0, v \geq 0 \text{ e } y \text{ livre}\}$$

8. Considere o seguinte PLI.

$$\begin{aligned} (P) \equiv \max z &= x_1 + 10x_2 \\ \text{s.a: } 4x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

(a)  $x^{RL} = (0, 3/2)$  e  $z^{RL} = 15$

(b)

$$\begin{aligned} \max z(u) &= 4u + (1 - 4u)x_1 + (10 - u)x_2 \\ \text{s.a: } x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ e inteiros.} \end{aligned}$$

i.  $z(0) = 11$ ,  $z(1/4) = 43/4$  e  $z(4) = 22$ .

ii.  $z(u) = \begin{cases} 11 - u, & 0 \leq u \leq 1/4 \\ 10 + 3u, & 1/4 \leq u \leq 10 \\ 4u, & u \geq 10 \end{cases}$

iii.  $w^{DL} = z(1/4) = 43/4 \geq z$ .

(c)

$$\begin{aligned} \max z(u) &= 3u + (1 - u)x_1 + (10 - 2u)x_2 \\ \text{s.a: } 4x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

i. Satisfaz pois desenhando a RA vemos que todos os pontos extremos são inteiros.

ii. Como satisfaz a propriedade de integralidade,  $w^{DL} = z^{RL} = 15$ .

9. (...)

10. (a)  $x^* = (3, 6)$  e  $z = 39$ .

(b)  $x^* = (2, 2)$  e  $z = 12$ .

11.  $x^* = (0, 13, 20, 7)$  e  $z = 505$ .

12. Considere o seguinte problema de PLI

(a)  $x^{RL} = (45/26, 12/26)$  e  $z^{RL} = 33/26 \geq z$ .

(b)  $x^* = (2, 1)$  e  $z = 1$ .

(c) Seja  $u \geq 0$ . Considere

$$\begin{aligned} (P_u) \equiv \max z &= x_1 - x_2 + u(3 - 2x_1 + x_2) \\ \text{s.a: } 6x_1 + 10x_2 &\geq 15 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

Para mostrar que  $v(P_u) \geq v(P)$  basta mostrar que  $P_u$  é uma relaxação de  $P$ .

$P_0$  é ilimitado.  $v(P_{1/2}) = 3/2$ .  $v(P_1) = 3$

13. (a)  $\hat{z} = 31$  e  $\underline{z} = 26$ .  
(b) Cancelados: 8, 9 e 7. Ramificados: 4 e 6.
14. (a)  $x^* = (7, 0)$  e  $z = 21$ .  
(b)  $x^* = (2, 5)$  e  $z = -1$ .
15. i. Não é desigualdade válida.  
ii. Não é desigualdade válida.  
iii. É desigualdade válida mas não é corte.  
iv. É desigualdade válida e é corte.
16. (a)  $x^* = (1, 1)$  e  $z = 11$ .  
(b)  $X^* = (1, 0)$  e  $z = 1$ .
17. Corte de Gomory:  $7x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 24$ .
18.  $x^* = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0)$ .
19.  $2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 1$
20.  $x_1 + x_2 \leq 1$  e  $x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$ .
21.  $y_1 + y_2 + y_3 \geq 1$
22.  $x_i \leq y, \forall i \in \{1, \dots, m\}$