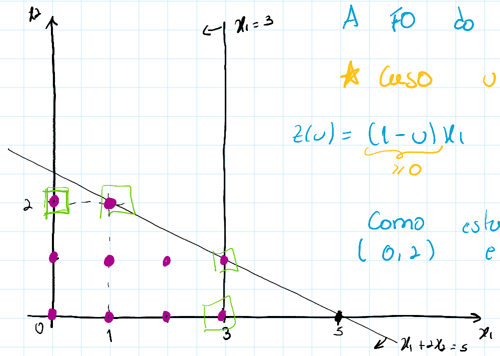
Queremos determinar o valor ótimo (w_{DL}) do seguinte problema dual Lagrangeano:

$$w_{DL} = \boxed{\max_{u \geq 0} z(u)} = \boxed{\min_{(x_1,x_2)\in X} (1-u)x_1 + (-2+u)x_2}$$

com $X = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{Z}^2 : x_1 + 2x_2 \leq 5,\ x_1 \leq 3 \text{ e } x_1, x_2 \geq 0\}$

Para calcularmos w_{DL} precisamos de determinar a expressão de $z(u)$, que depende da resolução de um PLI. Assim, começamos por resolver o PLI, determinando quais as SOs possíveis para valores de $u \geq 0$, para podermos construir $z(u)$, e depois calcularmos o máximo de $z(u)$.

Primeira parte: Resolver o PLI considerando todos os valores de u



A RA – Conj. X – são os pontos assinalados a cor-de-rosa.

A FO do PLI é $(1-u)x_1 + (-2+u)x_2$.

★ Caso $u \leq 1$:

$$z(u) = \underbrace{(1-u)}_{\geq 0} x_1 + \underbrace{(-2+u)}_{< 0} x_2$$

Como estamos a minimizar a SO é $(0,2)$ e:

$$z(u) = (1-u)\times 0 + (-2+u)\times 2 = -4+2u$$

★ Caso $u \geq 2$:

$$z(u) = \underbrace{(1-u)}_{<0} x_1 + \underbrace{(-2+u)}_{\geq 0} x_2$$

Como estamos a minimizar a SO é $(3,0)$ e

$$z(u) = (1-u)\times 3 + (-2+u)\times 0 = 3-3u$$

★ Caso $1 \leq u \leq 2$

$$z(u) = \underbrace{(1-u)}_{\leq 0} x_1 + \underbrace{(-2+u)}_{\leq 0} x_2$$

Observando a RA as SOs possíveis são $(1,2)$ e $(3,1)$.

Para que valores de u é que a SO é $(1,2)$?

Ou, $(1,2)$ é a SO se o valor da FO nesse ponto for $\boxed{\leq}$ (min.) que o valor da FO no ponto $(3,1)$, ou seja:

$$(1-u)\times 1 + (-2+u)\times 2 \leq (1-u)\times 3 + (-2+u)\times 1$$

$$\Leftrightarrow 1-u-4+2u \leq 3-3u-2+u \Leftrightarrow \cancel{-u} + 2\cancel{u} + 3u - \cancel{u} \leq \cancel{3} - \cancel{2} - \cancel{1} + 4$$

$$\Leftrightarrow 3u \leq 4 \Leftrightarrow u \leq \frac{4}{3} \implies (1,2) \text{ é SO para } 1 \leq u \leq \frac{4}{3}$$

Assim, para $1 \leq u \leq 4/3$, $z(u) = (1-u)\times 1 + (-2+u)\times 2 = 1-u-4+2u = -3+u$.

Utilizando um raciocínio análogo, podemos concluir que $(3,1)$ é SO quando $4/3 \leq u \leq 2$. Assim, para $4/3 \leq u \leq 2$, temos

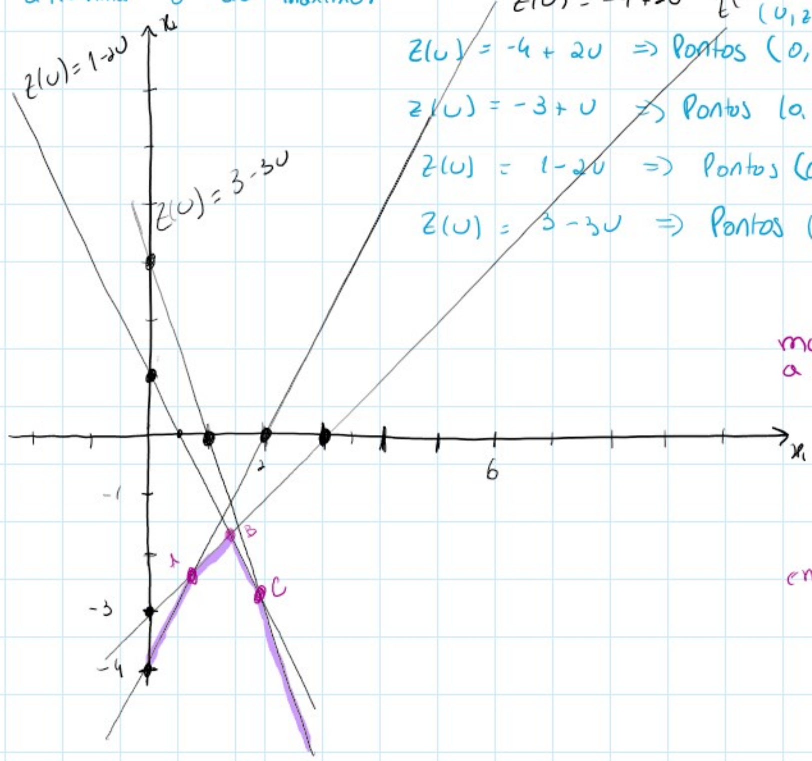
$$z(u) = (1-u)\times 3 + (-2+u)\times 1 = 3-3u-2+u = 1-2u$$

A função $z(u)$ que queremos otimizar é:

$$z(u) = \begin{cases} -4+2u, & 0 \le u \le 1 \\ -3+u, & 1 \le u \le 4/3 \\ 1-2u, & 4/3 \le u \le 2 \\ 3-3u, & u \geq 2 \end{cases}$$

Segunda parte: Determinar o máximo da função $z(u)$

Vamos representar graficamente a função $z(u)$ para determinar o seu máximo.



$(u, z(u))$

$z(u) = -4+2u \Rightarrow$ Pontos $(0,-4)$ e $(2,0)$

$z(u) = -3+u \Rightarrow$ Pontos $(0,-3)$ e $(3,0)$

$z(u) = 1-2u \Rightarrow$ Pontos $(0,1)$ e $(1/2, 0)$

$z(u) = 3-3u \Rightarrow$ Pontos $(0,3)$ e $(1,0)$

A função $z(u)$ tem máximo no ponto B, que é a intersecção das retas:

$$\begin{cases} z(u) = -3+u \\ z(u) = 1-2u \end{cases} \Rightarrow -3+u = 1-2u$$

$$\Leftrightarrow 3u = 4 \Leftrightarrow u = \frac{4}{3}$$

Logo, a função $z(u)$ tem máx. em $u = \frac{4}{3}$ e

$$z\left(\frac{4}{3}\right) = -3 + \frac{4}{3} = \frac{-9+4}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$\therefore \; w_{DL} = z\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{5}{4} \le z$$

Resolução "força bruta"

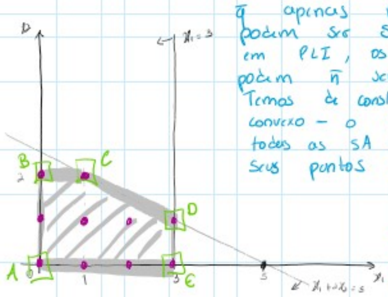
18 September 2024 08:28

Queremos determinar o valor ótimo (w_{DL}) do seguinte problema dual Lagrangeano:

$$w_{DL} = \boxed{\max_{u \geq 0} z(u)} = \boxed{\min_{(x_1,x_2)\in X} (1-u)x_1 + (-2+u)x_2 \quad \text{com } X = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{Z}^2 : x_1 + 2x_2 \leq 5,\ x_1 \leq 3 \text{ e } x_1, x_2 \geq 0\}}$$

Para calcularmos w_{DL} precisamos de determinar a expressão de $z(u)$, que depende da resolução de um PLI. Assim, vamos começar por identificar quais os SA do PLI é que podem ser SO e calcularmos o $z(u)$ para essa solução. Depois de representarmos a função $z(u)$ para todas as sol., identificamos quais é que originam o mínimo.

Primeira parte: Identificar que SAs podem ser SO



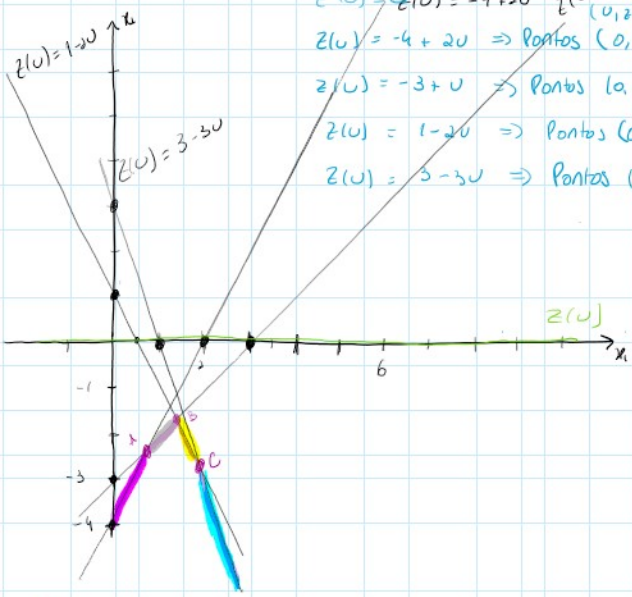
Sabemos da teoria da PL que apenas pontos extremos podem ser SO. Como estamos em PLI, os pontos extremos podem não ser SA do problema. Temos de construir o invólucro convexo – o menor conj. que contém todas as SA – e calcular os seus pontos extremos.

O invólucro convexo é o conjunto assinalado a cinzento e os pontos extremos desse conj. são os assinalados com um quadrado verde.

A RA – conj. X – são os pontos assinalados a cor-de-rosa.

Ponto	$z(u) = (1-u)x_1 + (-2+u)x_2$
$A = (0,0)$	$z(u) = 0$
$B = (0,2)$	$z(u) = (1-u)\times 0 + (-2+u)\times 2 = -4 + 2u$
$C = (1,2)$	$z(u) = (1-u)\times 1 + (-2+u)\times 2 = 1 - u - 4 + 2u = -3 + u$
$D = (3,1)$	$z(u) = (1-u)\times 3 + (-2+u)\times 1 = 3 - 3u - 2 + u = 1 - 2u$
$E = (3,0)$	$z(u) = (1-u)\times 3 + (-2+u)\times 0 = 3 - 3u$

Agora temos de determinar a expressão da função $z(u)$.



$z(u) = 0$

$(0, z(u))$

$z(u) = -4 + 2u \Rightarrow$ Pontos $(0,-4)$ e $(2,0)$

$z(u) = -3 + u \Rightarrow$ Pontos $(0,-3)$ e $(3,0)$

$z(u) = 1 - 2u \Rightarrow$ Pontos $(0,1)$ e $(1/2, 0)$

$z(u) = 3 - 3u \Rightarrow$ Pontos $(0,3)$ e $(1,0)$

Cada uma destas retas é o mínimo nos troços assinalados. Só nos resta determinar para que valores de u é que isso acontece.

Cálculo da coordenada u dos pontos A, B e C.

Ponto A: $\begin{cases} z(u) = -3 + u \\ z(u) = -4 + 2u \end{cases} \Rightarrow -3 + u = -4 + 2u \Leftrightarrow u = 1$

Ponto B: $\begin{cases} z(u) = -3 + u \\ z(u) = 1 - 2u \end{cases} \Rightarrow -3 + u = 1 - 2u \Leftrightarrow 3u = 4 \Leftrightarrow u = \frac{4}{3}$

Ponto C: $\begin{cases} z(u) = 1 - 2u \\ z(u) = 3 - 3u \end{cases} \Rightarrow 1 - 2u = 3 - 3u \Leftrightarrow 1 - 3 = -3u + 2u \Leftrightarrow u = 2$

Temos então:

$$z(u) = \begin{cases} -4 + 2u, & 0 \leq u \leq 1 \\ -3 + u, & 1 \leq u \leq 4/3 \\ 1 - 2u, & 4/3 \leq u \leq 2 \\ 3 - 3u, & u \geq 2 \end{cases}$$

$-3 + \frac{4}{3}$

$1 - 2u, \quad \frac{4}{3} \leq u \leq 2 \qquad -3 + \frac{4}{3}$

$3 - 3u, \quad u \geq 2$

O máximo de $z(u)$ é obtido no ponto B, ou seja, em $u = 4/3$, e:

$$z\left(\frac{4}{3}\right) = 1 - 2 \times \frac{4}{3} = 1 - \frac{8}{3} = \frac{3-8}{3} = -\frac{5}{3} \Rightarrow w_{DL} = -\frac{5}{3}$$