Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

Estatística I

Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)

2.º Ano/1.º Semestre

2024/2025

Aulas Teórico-Práticas N.ºs 3 e 4 (Semana 2)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas TP (Semanas 1 e 3)	Aulas TP (Semanas 3 a 6)	Aulas TP (Semanas 7 a 9)	Aulas TP (Semanas 10 a 12)
• **Capítulo 1**: Análise Descritiva • **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	• **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Variáveis Aleatórias Especiais

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

1. **Introdução à Estatística**

1.1. Estatística Descritiva

2. **Probabilidades**

2.1. Introdução

2.2. Experiência aleatória. Espaço de resultados. Acontecimentos

2.3. Medida de probabilidade. Axiomática de Kolmogorov

2.4. Interpretações do conceito de probabilidade

2.5. Probabilidade condicionada.

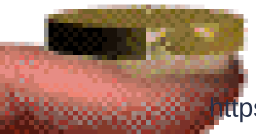
2.6. Teorema da probabilidade total e teorema de Bayes

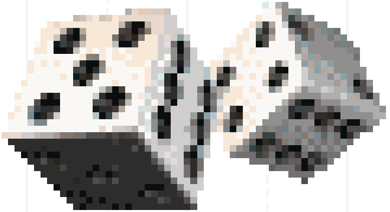
2.7. Acontecimentos independentes

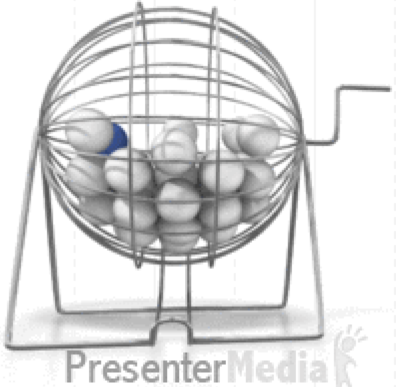
1 Experiência Aleatória, Espaço de Resultados e Acontecimentos

Experiência Aleatória

É toda a experiência que, mesmo repetida várias vezes, sob condições semelhantes, apresenta resultados imprevisíveis, dentro dos resultados possíveis.







https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Espaço de Resultados / Espaço Amostral / Universo

- É o conjunto de todos os resultados possíveis da experiência.

- Representa-se por S ou Ω.

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Espaço de Resultados

Qual é o espaço de resultados do lançamento de uma moeda?

$\Omega = \{Cara, Coroa\}$

Qual é o espaço de resultados do lançamento de um dado?

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Acontecimento ou Evento

É todo subconjunto de um espaço de resultados Ω de uma experiência aleatória.

Acontecimento ou Evento

No lançamento de um dado, deseja-se que “saiam” valores menores que 4. Qual o evento desta experiência?

$A = \{1, 2, 3\}$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Tipos de Acontecimentos

- Certo;
- Impossível;
- Muito provável;
- Pouco provável;
- Elementar;
- Composto.

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Tipos de Acontecimentos

Obter um número menor que 7 no lançamento de um dado representa que tipo de evento?

E um resultado igual a zero?

E um resultado maior que 5?

Resumindo....
Experiência Aleatória, Espaço de Resultados e Acontecimentos

Experiência Aleatória ou casual caracteriza-se pela impossibilidade de prever o resultado que se obterá, apesar de todos os seus possíveis resultados serem conhecidos à partida.

Universo, espaço de resultados ou espaço amostral de uma experiência aleatória é o conjunto de todos os seus resultados possíveis, denotado por Ω.

Acontecimento de uma experiência aleatória E com universo Ω é um subconjunto de Ω.

Exemplo:

- Experiência E: Lançamento de um dado
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
- Acontecimentos elementares $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, …
- Acontecimentos compostos $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, …
- Acontecimento certo $A = \Omega$

Acontecimento impossível = { }

Espaço de acontecimentos = $\{ \{\}, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\}, \{1,2,3\}, \ldots \}$

Experiência Aleatória, Espaço de Resultados e Acontecimentos: Exercícios

2

Exercício do Livro Murteira et al (2015)

2. Duas lâmpadas vão ser submetidas a um teste que consiste em mantê-las ligadas até que ambas falhem, registando-se a duração de cada uma delas. Sabe-se que nenhuma das lâmpadas dura mais de 1600 horas.

   Represente o espaço de resultados e os seguintes acontecimentos:

   A – «Nenhuma das lâmpadas tem duração superior a 1000 horas.»

   B – «Só uma das lâmpadas tem duração superior a 1000 horas.»

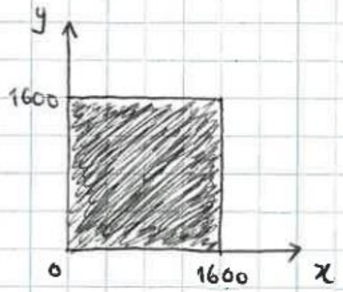
   C – «Uma das lâmpadas dura pelo menos o dobro da outra.»

   D – «A soma da duração das duas lâmpadas é superior a 2000 horas.»

Exercício 2

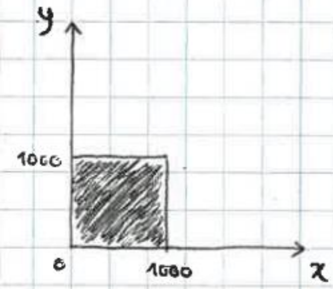
Experiência aleatória – observação da duração das duas lâmpadas.

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1600 \wedge 0 \leq y \leq 1600\}$$

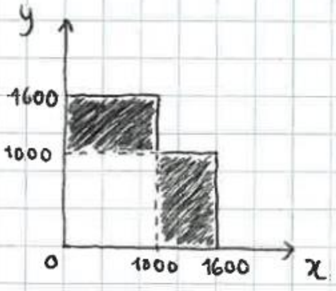


Exercício 2

$$A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1000 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 1000\}$$

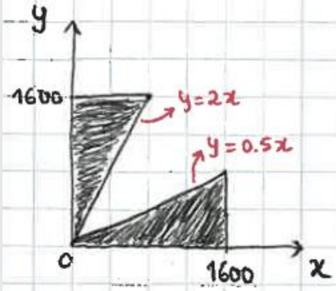


$$B = \{(x,y) : (1000 < x \leq 1600 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 1000) \ \vee \ (0 \leq x \leq 1000 \ \wedge \ 1000 < y \leq 1600)\}$$

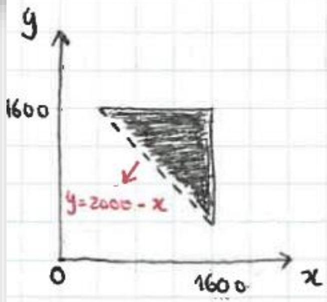


Exercício 2

$C = \{(x,y) : (x \geq 2y \ \vee \ y \geq 2x) \wedge (0 \leq x \leq 1600 \wedge 0 \leq y \leq 1600)\}$



$D = \{(x,y) : x + y > 2000 \ \wedge \ 0 \leq x \leq 1600 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 1600\}$



Conceitos Básicos de Probabilidade

3

Noção de Probabilidade, Probabilidade da União, Probabilidade da Interseção e Probabilidade da Diferença

É possível saber a chance/possibilidade de algo acontecer?

Imagem: Webmaster-chx / Creative Commons paternité – partage à l'identique 3.0 (non transposée)

Noção de Probabilidade

Sim, é possível medir a chance/possibilidade de algo acontecer.
Essa medida é chamada de PROBABILIDADE!

PROBABILIDADE (proporção ou percentagem) mede a possibilidade de ocorrência de um evento ou acontecimento.

Definições de Probabilidade

Definição frequencista de probabilidade

- Probabilidade de um acontecimento *A* é o valor para que tende a frequência relativa desse acontecimento quando o número de repetições da experiência aleatória é elevado, e representa-se por

$$P(A) \sim \text{frequência(A)}$$

Definição clássica de probabilidade (Lei de Laplace)

- Probabilidade de um acontecimento *A* é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Então, a probabilidade de *A* é dada por

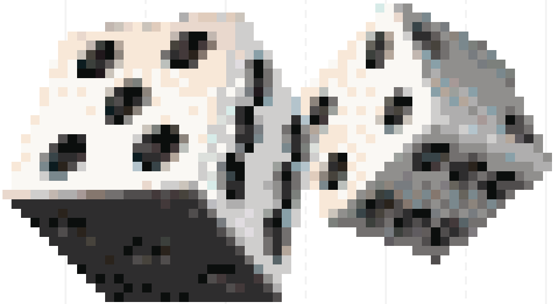
$$P(A) = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos favoráveis}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos possíveis}} = \frac{m}{n}$$

Nota: Aplica-se a definição clássica de probabilidade se os acontecimentos possíveis são equiprováveis, ou seja, ocorrem com a mesma probabilidade. Utiliza-se a definição frequencista de probabilidade caso os acontecimentos sejam equiprováveis ou não.

$P(A)$ é um número entre 0 e 1 ou 0% e 100%.

Tipos de Probabilidades

- Probabilidade simples;
- Probabilidade complementar;
- Probabilidade da união ou reunião;
- Probabilidade da interseção ou conjunta;
- Probabilidade da diferença;
- Probabilidade condicional.



Baseada em https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Simples: Exemplo

Exame com 15 questões com 4 alternativas. Qual é a probabilidade de um aluno acertar todas as questões ao acaso?

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Simples: Exemplo

É fácil acertar em 15 questões, ao acaso, no exame?

$$P(15) = \frac{1}{4^{15}} = 9{,}31323\mathrm{E}{-10}$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Complementar

– Probabilidade de um determinado evento A **não** ocorrer.

– Denota-se por P^c , $P(Ac)$ ou $P(\bar{A})$

– $A^c = \Omega - A$.

Probabilidade da diferença

– $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Complementar: Exemplo

No lançamento simultâneo de dois dados, qual é a probabilidade de não sair a soma 4?

$$\begin{aligned} P(\text{não sair a soma 4}) &= 1 - P(\text{sair a soma 4}) \\ &= 1 - 3/(6\times 6) = 11/12 \\ &= 0{,}92 = 92\% \end{aligned}$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Axiomática de Probabilidade

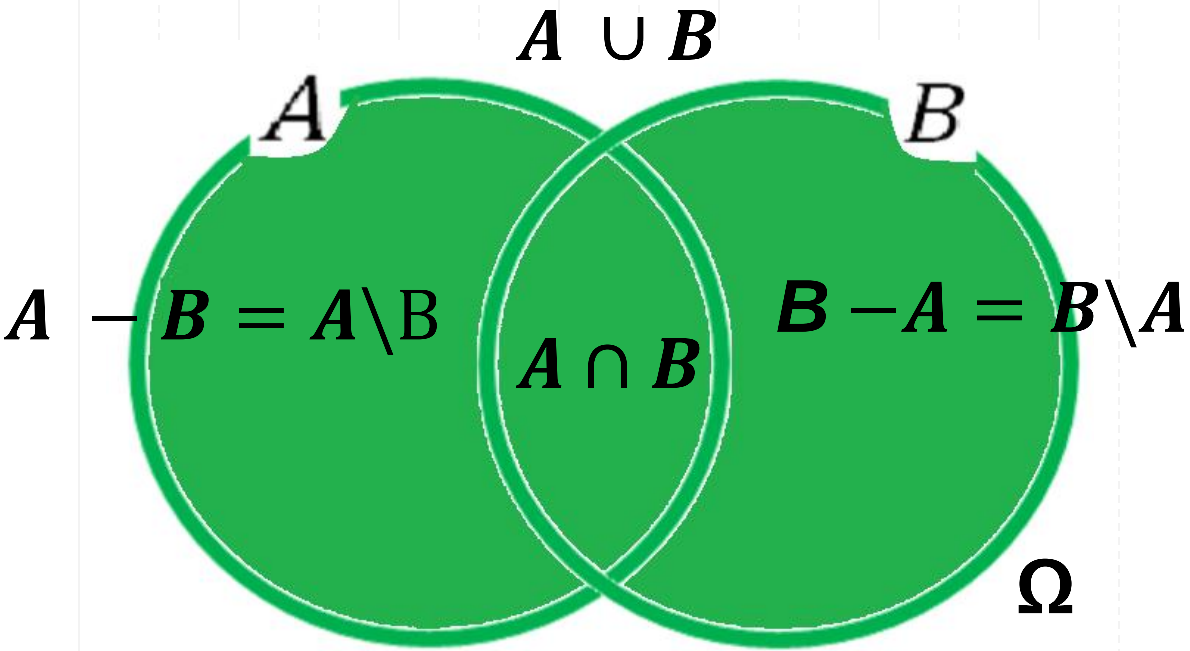
- $0 \leq P(A) \leq 1, \ \forall A \in$ Espaço dos acontecimentos
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\{\}) = 0$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ e $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- Se $A \subseteq B$ (Se a realização do acontecimento B implica a realização do acontecimento A), então $P(A) \leq P(B)$

Probabilidade da diferença: P(A-B) = P(A/B) e P(B-A) = P(B/A)

- $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$

Nota: A abordagem frequencista e a definição clássica de probabilidade respeitam esta axiomática (axiomática de Kolmogorov - caso finito).

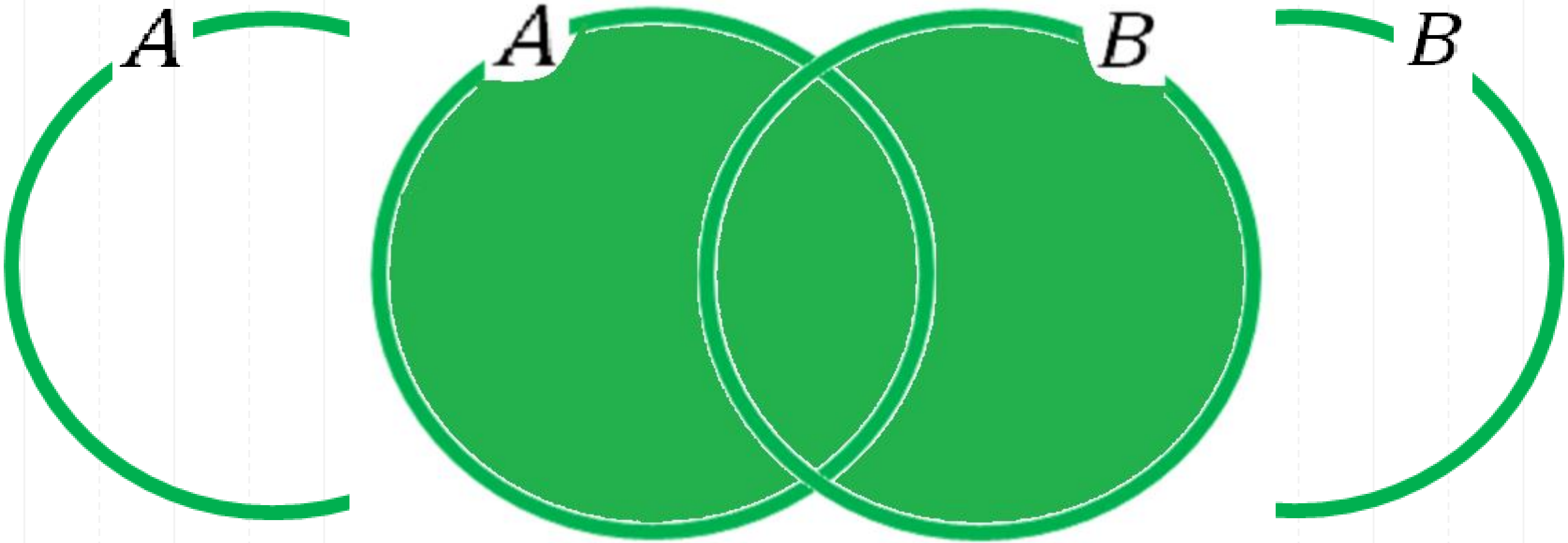
Diagrama de Venn



Baseado em https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade da União/Reunião

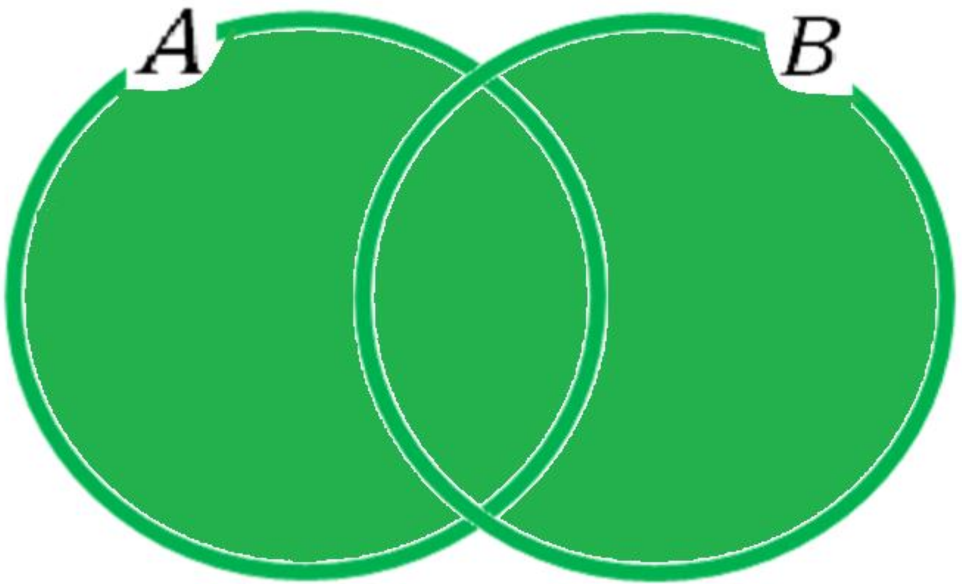
$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$$



https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade da União/Reunião

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade da União: Exemplo

Numa comunidade de 1000 habitantes, 400 são sócios do clube *A*, 300 do clube *B* e 200 de ambos. Qual é a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ser sócia de *A* ou de *B*?

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap B)}$$
$$\mathbf{= (400+300\text{-}200)/1000 = 0{,}5 \; = 50\%}$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Axiomática de Probabilidade

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\ \forall A, B \in$ Espaço dos acontecimentos (Probabilidade da reunião de acontecimentos)

  - Sejam A e B dois acontecimentos mutuamente exclusivos ou incompatíveis, definidos em Ω, ou seja, $A \cap B = \varnothing$, então tem-se $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,
    caso contrário $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

    Escrito de outra forma: $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,
    $A, B \in$ Espaço dos acontecimentos

Os **acontecimentos disjuntos**, mutuamente exclusivos ou incompatíveis não têm elementos comuns.

- Regra de Inclusão-exclusão:
  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

<u>**Nota**</u>: A abordagem frequencista e a definição clássica de probabilidade respeitam esta axiomática (axiomática de Kolmogorov - caso finito).

Probabilidade da Interseção: Independência

Quando os resultados do evento A não interferirem e nem influenciaram os resultados do evento B.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade da Interseção: Independência

Definição 1.6 (Acontecimentos independentes). $A, B \subset \Omega$ *dizem-se independentes sse*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Propriedades Se $A, B \subset \Omega$ independentes, então

1. $\bar{A}, B$ são independentes,
2. $A, \bar{B}$ são independentes,
3. $\bar{A}, \bar{B}$ são independentes.

Acontecimentos independentes

Definição 2.9: Diz-se que dois acontecimentos A e B de um mesmo espaço de resultados Ω são *independentes* se

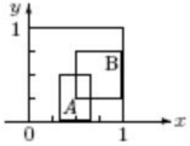
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

- Todo o acontecimento A é independente de $\emptyset$ e Ω.
- Se A e B são acontecimentos independentes, $P(A|B) = P(A)$ se $P(B) > 0$ e $P(B|A) = P(B)$ se $P(A) > 0$.
- Se A e B são acontecimentos independentes, também o são $\bar{A}$ e B, A e $\bar{B}$ e $\bar{A}$ e $\bar{B}$.
- Acontecimentos A e B são condicionalmente independentes ao acontecimento C, $P(C) > 0$, se $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$.
- Os acontecimentos A, B e C são completamente independentes, se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ e $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

  Nota: Independência 2 a 2 $\not\Rightarrow$ independência completa dos 3.
- Generalização: Os acontecimentos $A_1, \ldots, A_n$ dizem-se independentes se para todo o $k = 2, \ldots, n$ e todo o subconjunto $\{A_{i_j}, j = 1, \ldots, k\}$ de k desses acontecimentos, $P(\cap_{j=1}^{k} A_{i_j}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$.

  Nota: O número de relações é dado por $2^n - (n+1)$.

Exemplo 2.9: Considere o espaço de resultados Ω como o quadrado de vértices (0,0), (0,1), (1,0) e (1,1). Suponha que a probabilidade de uma região (acontecimento) contida em Ω seja a área desta região. Os acontecimentos $A = \{(x, y) : 1/3 \leq x \leq 2/3, 0 \leq y \leq 1/2\}$ e $B = \{(x, y) : 1/2 \leq x \leq 1, 1/4 \leq y \leq 3/4\}$ são independentes?



$P(A) = 1/6, \quad P(B) = 1/4$

$P(A \cap B) = 1/24 = P(A) \times P(B)$

$\therefore$ A e B são independentes.

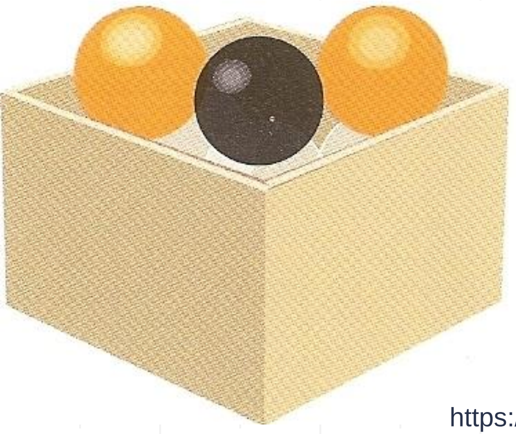
Fonte: PE_slides-print Notas Apoio Cap 1-9.pdf: Material do IST

Probabilidade da Interseção: Exemplo 1

Numa caixa há 4 bolas pretas e 6 bolas vermelhas. Qual é a probabilidade de tirarmos uma bola preta e uma vermelha, com reposição?

4 6

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = 0{,}24$$



https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade de Interseção: Exemplo 2

A probabilidade do Paulo Adriano “tirar” dez na prova de Matemática é 1/3 e a probabilidade do Paulo Lucas “tirar” dez na mesma prova é 2/3. Qual é a probabilidade de ambos terem nota dez nesta prova?

$$P(ambos\ os\ alunos\ têm\ nota\ 10) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Conceitos Básicos de Probabilidade: Exercícios

4

Noção de Probabilidade, Probabilidade da União, Probabilidade da Interseção e Probabilidade da Diferença

Exercício do Livro Murteira et al (2015)

4. Num curso superior, 70% dos alunos têm computador em casa, 40% têm computador portátil e 30% têm os dois. Escolhido um aluno ao acaso, calcule a probabilidade de:

a) Ter pelo menos um dos tipos de computadores.

b) Não ter computador.

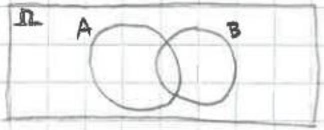
c) Ter um e um só computador.

Exercício 4 a)

A - ter computador em casa

B - ter portátil

$P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.4$, $P(A \cap B) = 0.3$



(a)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.4 - 0.3 = 0.8$

Exercício 4 b)

(b)

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.8 = 0.2$$

Exercício 4 c)

(c)

Ter apenas 1 computador é o acontecimento $(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)$

Porque $(A\cap\bar{B})\cap(\bar{A}\cap B)=\phi$, tem-se :

$$P\left[(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)\right]=P(A\cap\bar{B})+P(\bar{A}\cap B)=\left[P(A)-P(A\cap B)\right]+\left[P(B)-P(A\cap B)\right]=$$

$$=(0.7-0.3)+(0.4-0.3)=0.4+0.1=0.5$$

Exercício do Livro Murteira et al (2015)

6. Um sistema electrónico é formado por dois subsistemas, A e B. De ensaios anteriores sabe-se que: a probabilidade de A falhar é 0.2, a probabilidade de B falhar sozinho é 0.15, e a probabilidade de A e B falharem simultaneamente é 0.15. Determine a probabilidade de:

a) B falhar.

b) Falhar apenas A.

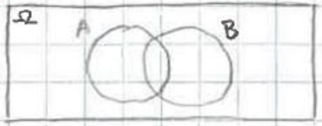
c) Falhar pelo menos um deles, A ou B.

d) Não falhar nem A nem B.

e) A e B não falharem simultaneamente.

Exercício 6 a)

$P(A) = 0.2$, $P(B-A) = P(\bar{A} \cap B) = 0.15$, $P(A \cap B) = 0.15$



(a)

$P(B) = ?$

Porque $B = \underbrace{(B-A)}_{(\bar{A} \cap B)} \cup (A \cap B)$ e $(\bar{A} \cap B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ tem-se que:

$P(B) = P\left[(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)\right] = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) = 0.15 + 0.15 = 0.3$

Exercício 6 b), c), d) e e)

(b)

$$\underbrace{P(A-B)}_{P(A\cap\overline{B})} = P(A) - P(A\cap B) = 0.2 - 0.15 = 0.05$$

(c)

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.2 + 0.3 - 0.15 = 0.35$$

(d)

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - 0.35 = 0.65$$

(e)

$$P(\overline{A\cap B}) = 1 - P(A\cap B) = 1 - 0.15 = 0.85$$

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

2.2 Sejam A e B acontecimentos tais que $P(A) + P(B) = x$ e $P(A \cap B) = y$. Determine em função de x e de y a probabilidade de:

(a) Não se realizar nenhum dos dois acontecimentos.

(b) Que se realize um e um só dos dois acontecimentos.

(c) Que se realize pelo menos um dos dois acontecimentos.

(d) Que se realize quanto muito um único acontecimento.

Exercício 2.2 (a): Leis de Morgan e Probabilidade de União

- **Eventos chave**

$$A, B \quad : \quad P(A) + P(B) = x$$

$$P(A \cap B) = y$$

- **Evento**

$C =$ não se realize nenhum dos dois eventos

$$= \overline{A} \cap \overline{B}$$ [não se realize A e não se realize B]

$$= \overline{A \cup B}$$ [leis de De Morgan]

$$\mathrm{P}(\bar{A}) \cup \mathrm{P}(\bar{B}) = \mathrm{P}(\overline{A \cap B})$$

$$\mathrm{P}(\bar{A}) \cap \mathrm{P}(\bar{B}) = \mathrm{P}(\overline{A \cup B})$$

Leis de Morgan

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$$

$$\boxed{\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}}$$

- **Probabilidade pedida**

$$P(C) = P\left(\overline{A \cup B}\right)$$

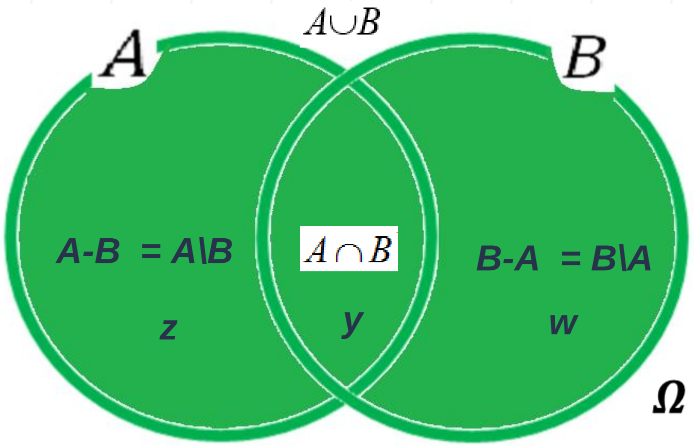
$$= 1 - P(A \cup B)$$ [consequência elementar axiomas]

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$ [consequência elementar axiomas: regra de adição]

$$= 1 - (x - y)$$

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

Exercício 2.2 (a): Diagrama de Venn



Sabe-se que:
P(A) + P(B) = *x*
P(A ∩ B) = *y*

P(*A*) = *z*+*y*

P(*B*) = *y*+*w*

x* = *z*+2*y*+*w

P(A U B) = P(A) + P(B) – P(A∩B) = *z*+*y*+*y*+*w* - *y* = *x* - *y*

P("não se realizar nenhum dos dois acontecimentos") = 1 - P("de se realizar pelo menos um dos dois acontecimentos") = 1 - P(A U B) = 1 - *(x-y)*

Exercício 2.2 (b): Probabilidade da Diferença

- **Evento**

$$D = \text{um e um só dos dois eventos}$$

$$= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \qquad \text{[só se realize A ou só se realize B]}$$

Como A\B e B\A são eventos disjuntos, tem-se P(A\B U B\A) = P(A\B) + P(B\A)

- **Probabilidade pedida**

$$P(D) = P[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)]$$

$$\mathrm{P}(A \setminus B) = \mathrm{P}(A - B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

$$= P(A \setminus B) + P(B \setminus A) \qquad \text{[eventos disjuntos, f. probabilidade, axioma 3]}$$

$$= [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)] \qquad \text{[consequência elementar axiomas]}$$

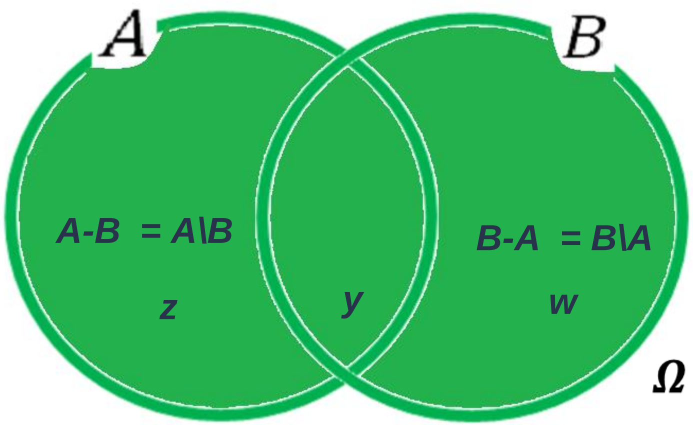
$$= [P(A) + P(B)] - 2P(A \cap B)$$

$$\mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B - A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(B \cap A)$$

$$= x - 2y$$

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B \cap A)$$

Exercício 2.2 (b): Diagrama de Venn



Sabe-se que:
P(A) + P(B) = x
P(A ∩ B) = y

$x = z+2y+w$

P("de acontecer apenas um dos dois acontecimentos")
$= z + w = x - 2y$

Exercício 2.2 (c): Probabilidade de União

- **Evento**

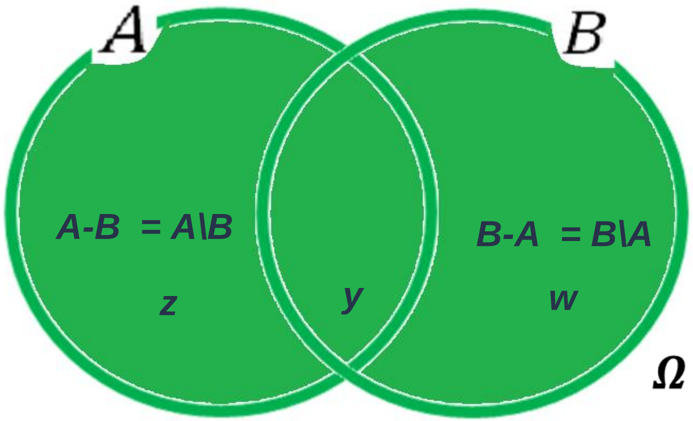
$$\begin{aligned} E &= \text{pelo menos um dos dois eventos} \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

- **Probabilidade pedida**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cup B) \\ &= [P(A) + P(B)] - P(A \cap B) \qquad \text{[consequência elementar axiomas: regra de adição]} \\ &= x - y \end{aligned}$$

Exercício 2.2 (c): Diagrama de Venn



Sabe-se que:
P(A) + P(B) = x
P(A ∩ B) = y

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

P("de acontecer pelo menos um dos dois acontecimentos") = x – y

Alínea (a)

Exercício 2.2 (d): Probabilidade Complementar

- **Evento**

$$F = \text{quanto muito um único evento.}$$

$$= \overline{A \cup B} \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \qquad \text{[nenhum evento ou somente o evento A ou somente o evento B]}$$

$$F = \overline{A \cap B}$$

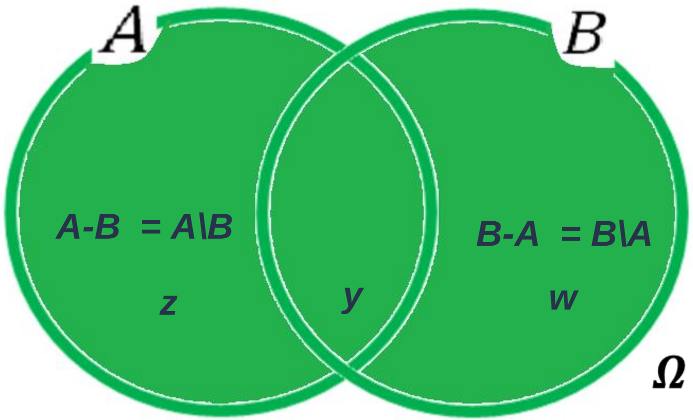
- **Probabilidade pedida**

$$P(F) = P\left(\overline{A \cap B}\right)$$

$$= 1 - P(A \cap B) \qquad \text{[consequência elementar axiomas]}$$

$$= 1 - y$$

Exercício 2.2 (d): Diagrama de Venn



Sabe-se que:
P(A) + P(B) = x
P(A ∩ B) = y

P(A U B) = P(A) + P(B) – P(A∩B) = z+y+w = $x - y$

P("que se realize quanto muito um acontecimento") = P("não se realizar nenhum dos dois acontecimentos") + P("de se realizar apenas um dos dois acontecimentos") = 1-(x-y) + (x - 2y) = 1 - y

Alínea (a)

Alínea (b)

Probabilidade Condicional

5

Probabilidade Condicional/Condicionada

– É quando um evento só acontece quando o outro evento do mesmo espaço amostral aconteceu (**condição de ocorrência**).

– A probabilidade de “A dado B”, “A se B” ou “A sabendo B” é a probabilidade de ocorrer A, quando o evento B ocorreu.

– O **espaço amostral** dos eventos A e B **reduz-se** com a condição de ocorrência.

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Condicional
(ou Probabilidade Condicionada)

Sejam A e B acontecimentos associados à mesma experiência aleatória. A probabilidade condicional de A dado que se observou B (ou probabilidade condicional de A se B), é o valor do quociente:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ com } P(B) \neq 0$$

Da mesma forma, tem-se

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \ .$$

Além disso, $P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$.

Probabilidade Condicional

$$P(A|B) = P(B|A)?$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \neq P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Condicional: Exemplo 1

Um estudante do IFRN é selecionado ao acaso, qual é a probabilidade dele ser de São Tomé, dado que ele não é de SPP?

$$\boldsymbol{P(ser\ São\ Tomé|Não\ é\ SPP) = \frac{1}{10}}$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Condicional: Exemplo 2

	1ª vez	Já voo antes	∑
Não conhecia	83	22	105
Já conhecia	23	12	35
∑	106	34	140

Cada turista de uma viagem de avião respondeu a duas perguntas:

1. Já voou antes?
2. Já conhece a cidade de destino?

Selecionou-se um turista ao acaso, e verificou-se que ele nunca voou antes.

Qual é a probabilidade dele conhecer a cidade de destino?

$$P = (Conhecer\ cidade|Nunca\ voou) = \frac{23}{106}$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Condicional: Exemplo 3

Sexo	Alfabetizada		Total
	Sim	Não	
Masc.	39.577	8.672	48.249
Fem.	46.304	7.297	56.601
Total	85.881	15.969	101.850

Qual é a probabilidade de um jovem escolhido ao acaso ser alfabetizado, sabendo que ele é do sexo feminino?

$$P(alfabetizado|Feminino) = \frac{46304}{56601}$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Condicional: Exemplo 4

Exemplo:

Num saco há 10 bolas, 5 brancas e 5 vermelhas. Qual é a probabilidade de retirar do saco ao acaso, uma bola branca?

$P(B1) = 5/10=0.5$

Sabendo que saiu bola branca, qual é a probabilidade de numa 2ª extracção sair bola branca?

$P(B2|B1)=4/9=0.4$

Probabilidade Conjunta ou Composta (ou Probabilidade de Interseção)

A probabilidade conjunta dos acontecimentos A e B é dada por (i.e., é o produto da probabilidade condicional pela probabilidade do condicionante)

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3 | A_1 \cap A_2) \times \ldots \times P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Os acontecimentos A e B são independentes, sse $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Nesse caso, tem-se $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$.

A definição de independência pode generalizar-se a mais de dois acontecimentos. Por exemplo, os acontecimentos A, B e C dizem-se mutuamente independentes se e só se

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$$

Probabilidade Condicional: Exercícios

6

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

2.13 Uma bolsa contém moedas de prata e cobre em igual número. Extrai-se ao acaso e sem reposição duas moedas. Calcule a probabilidade de que:

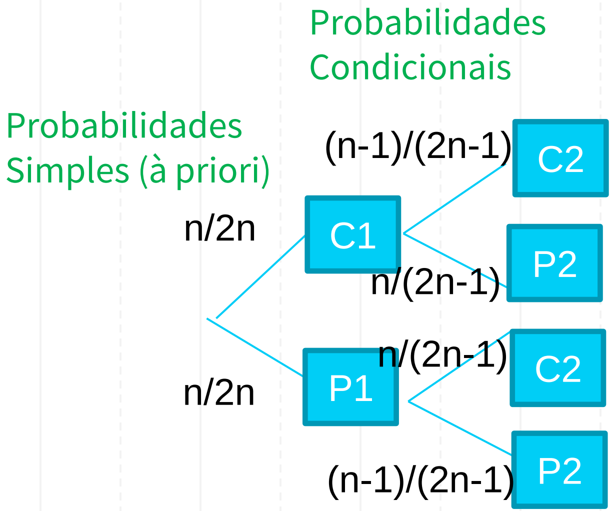
(a) A segunda moeda extraída seja de prata, sabendo que a primeira era de cobre.

(b) Saia uma moeda de prata na 2ª tiragem.

(c) Uma e uma só das moedas seja de prata.

(d) Pelo menos uma das moedas seja de cobre.

Exercício 2.13: Diagrama em Árvore



n = nº de moedas de prata = nº de moedas de cobre

Experiência Aleatória: Extração ao acaso e sem reposição de duas moedas

Acontecimentos:

P1/P2 = Moeda de prata na 1ª extração / Moeda de prata na 2ª extração

C1/C2 = Moeda de cobre na 1ª extração / Moeda de prata na 2ª extração

Exercício 2.13 (a)

n = nº de moedas de prata = nº de moedas de cobre

Experiência Aleatória: Extração ao acaso e sem reposição de duas moedas

$$P(P2|C1) = n/(n+n-1) = n/(2n-1)$$

Acontecimentos:

P2 = Moeda de prata na 2ª extração

C1 = Moeda de cobre na 1ª extração

Exercício 2.13 (b)

n = nº de moedas de prata = nº de moedas de cobre

Experiência Aleatória: Extração ao acaso e sem reposição de duas moedas

$P(P2) = P(P2|C1)P(C1) + P(P2|P1)P(P1)$
$= n/(2n-1) \times n/(2n) + (n-1)/(2n-1) \times n/(2n) = 1/2$

Acontecimentos:

P1/P2 = Moeda de prata na 1ª extração / Moeda de prata na 2ª extração

C1/C2 = Moeda de cobre na 1ª extração / Moeda de prata na 2ª extração

Exercício 2.13 (c)

n = nº de moedas de prata = nº de moedas de cobre

Extração ao acaso e sem reposição de duas moedas

P = Moeda de prata

C = Moeda de cobre

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A)$$

P("uma e uma só seja de prata") = P("de sair uma de prata na segunda tiragem e cobre na primeira") + P("de sair cobre na segunda tiragem e prata na primeira") = P(C1P2) + P(P1C2) =

$= P(P2|C1) \times P(C1) + P(C2|P1) \times P(P1) = n/(2n-1) \times (n/2n) + n/(2n-1) \times (n/2n)$

$= 2 \times [n/(2n-1) \times (n/2n)] = n/(2n-1)$

Exercício 2.13 (d)

n = nº de moedas de prata = nº de moedas de cobre

Extração ao acaso e sem reposição de duas moedas

P = Moeda de prata

C = Moeda de cobre

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A)$$

P("pelo menos uma das moedas seja cobre") = P(C1C2) + P(C1P2) + P(P1C2)
= P(C2|C1)×P(C1) + P(P2|C1)×P(C1) + P(C2|P1) ×P(P1)
= [(n-1)/(2n-1)]×(n/2n) + [n/(2n-1)]×(n/2n) + [n/(2n-1)]×(n/2n)
= 1/2[(n-1+n+n)/(2n-1)] = 1/2[(3n-1)/(2n-1)] = (3n-1)/(4n-2)

2.16 A execução de um projecto de construção de um edifício no tempo programado está relacionada com os seguintes acontecimentos:

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

$E =$ "escavação executada a tempo"

$F =$ "fundações executadas a tempo"

$S =$ "superestrutura executada a tempo"

supostos independentes e com probabilidades iguais a, respectivamente, 0.8, 0.7 e 0.9. Calcule a probabilidade de:

(a) O edifício ser terminado no tempo previsto, devido ao cumprimento dos prazos nas três actividades referidas.

(b) O prazo de execução ser cumprido para a escavação e não ser cumprido em pelo menos uma das outras actividades.

Exercício 2.16 (a)

Acontecimentos:

E = “escavação executada a tempo”

F = “fundações executadas a tempo”

S = “superestrutura executada a tempo”

Acontecimentos independentes

P (E) = 0,8

P(F) = 0,7

P(S) = 0,9

Definição 1.6 (Acontecimentos independentes). $A, B \subset \Omega$ *dizem-se independentes sse*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Propriedades Se $A, B \subset \Omega$ independentes, então

1. $\bar{A}, B$ são independentes,
2. $A, \bar{B}$ são independentes,
3. $\bar{A}, \bar{B}$ são independentes.

P(“Construção do edifício terminou no tempo previsto”) = P(E)×P(F)×P(S) = 0,504

Exercício 2.16 (b)

P("O prazo de execução ser cumprido para a escavação e não ser cumprido em pelo menos uma das outras atividades")
$= P(E) \times P(\sim F) \times P(S) + P(E) \times P(F) \times P(\sim S) + P(E) \times P(\sim F) \times P(\sim S)$
$= 0{,}8 \times 0{,}3 \times 0{,}9 + 0{,}8 \times 0{,}7 \times 0{,}1 + 0{,}8 \times 0{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}296$

Definição 1.6 (Acontecimentos independentes). $A, B \subset \Omega$ *dizem-se independentes sse*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Propriedades Se $A, B \subset \Omega$ independentes, então

1. $\bar{A}, B$ são independentes,
2. $A, \bar{B}$ são independentes,
3. $\bar{A}, \bar{B}$ são independentes.

Obrigada!

Questões?