ISEG Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

# Estatística I

## Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)

## 2.º Ano/1.º Semestre

## 2024/2025

# Aulas Teórico-Práticas N.ºs 3 e 4
# (Semana 2)

**Docente**: Elisabete Fernandes
**E-mail**: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

# Conteúdos Programáticos

| Aulas TP (Semanas 1 e 3) | Aulas TP (Semanas 3 a 6) | Aulas TP (Semanas 7 a 9) | Aulas TP (Semanas 10 a 12) |
|---|---|---|---|
| • **Capítulo 1**: Análise Descritiva<br>• **Capítulo 2**: Probabilidades | • **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais | • **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais | • **Capítulo 5**: Variáveis Aleatórias Especiais |

**Material didático:** Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

**Bibliografia**: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

**1. Introdução à Estatística**

1.1. Estatística Descritiva

**2. Probabilidades**

2.1. Introdução

2.2. Experiência aleatória. Espaço de resultados. Acontecimentos

2.3. Medida de probabilidade. Axiomática de Kolmogorov

2.4. Interpretações do conceito de probabilidade

2.5. Probabilidade condicionada.

2.6. Teorema da probabilidade total e teorema de Bayes

2.7. Acontecimentos independentes

**3. Variáveis aleatórias unidimensionais**

3.1. Variável aleatória

3.2. Função de distribuição

3.3. Classificação de variáveis aleatórias.

3.4. Variável aleatória discreta

3.5. Variável aleatória contínua

3.6. Função distribuição de uma função de uma variável aleatória

3.7. Valores esperados de variáveis aleatórias

3.8. Valores esperados de funções de variáveis aleatórias

3.9. Propriedades dos valores esperados

3.10. Momentos em relação à origem

3.11. Momentos em relação à média

3.12. Variância de uma variável aleatória

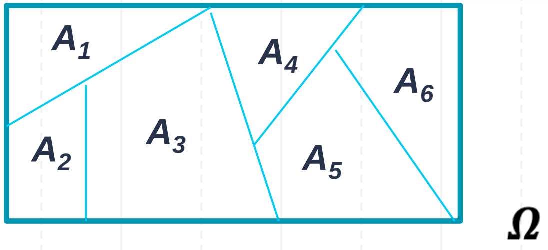
# Teorema da Probabilidade Total e Teorema de Bayes

1

# Definição de Partição

Diz-se que os acontecimentos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constituem uma partição de $\Omega$ se e só se:

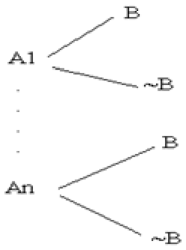
- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são mutuamente incompatíveis, isto é,
  $A_i \cap A_j = \varnothing;\ i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j$;
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

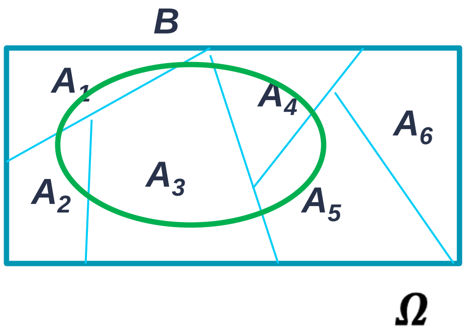


# Teorema/Lei da Probabilidade Total

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ definem uma partição sobre $\Omega$, então para qualquer $B$ definido em $\Omega$ temos:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P[B|A_i] \times P(A_i) = P[B|A_1] \times P(A_1) + P[B|A_2] \times P(A_2) + \ldots + P[B|A_n] \times P(A_n)$$




Se a partição é A, $\overline{A}$, então tem-se o caso especial

$$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})$$

**Nota**: Aplica-se este teorema quando se quer calcular a probabilidade de ocorrência de um efeito originado por várias causas.

# Teorema de Bayes
# (ou Teorema da Probabilidade Inversa)

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ definem uma partição sobre $\Omega$, então para qualquer $B$ definido em $\Omega$ temos:

$$P[A_i|B] = \frac{P[B|A_i] \times P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P[B|A_i] \times P(A_i)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\underbrace{P(B|A_1)P(A_1) + \ldots + P(B|A_n)P(A_n)}_{\text{Teorema da Probabilidade Total}}} \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Quando a partição de $A$ é $\bar{A}$, tem-se o caso especial

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}.$$

**Nota**: Aplica-se este teorema quando se quer calcular a probabilidade de ter sido $A_k$ que originou $B$.

# Teorema de Bayes: Exemplo

1 Probabilidade condicional

2 Probabilidades a priori

Seja

M = doença meningite

S = dor no pescoço

Um Doutor sabe:

$P(S|M) = 0.5$

$P(M) = 1/50000$

$P(S) = 1/20$

$$\mathbf{P}(M|S) = \frac{\mathbf{P}(S|M)\mathbf{P}(M)}{\mathbf{P}(S)}$$

$$= \frac{0{,}5*(1/50000)}{1/20} = 0{,}0002$$

A probabilidade de uma pessoa ter meningite dado que ela está com dor no pescoço é 0,02% ou ainda 1 em 5000.

https://www.dei.isep.ipp.pt/~csr/SP/SP-Bayes.ppt

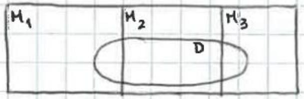
# Teorema da Probabilidade Total e Teorema de Bayes: Exercícios

2

Exercício do Livro Murteira et al (2015)

28. Uma fábrica utiliza três máquinas para a produção de um mesmo produto, com as seguintes percentagens de produção: M1 - 40%; M2 - 35%; M3 - 25%. As percentagens de peças defeituosas produzidas por cada máquina são, respectivamente: 4%, 2% e 1%.
    a) Escolhida uma peça ao acaso da produção total, qual a probabilidade de ser não defeituosa?
    b) Qual a probabilidade de ter sido produzida pela máquina M1, observando-se que é defeituosa?
    c) Se forem retiradas duas peças, sucessivamente e com reposição, da produção total, qual a probabilidade de que uma seja defeituosa, e outra, não?

# Exercício 28 a)




→ $M_1$, $M_2$ e $M_3$ formam uma partição de $\Omega$, onde D representa peça defeituosa.

$P(M_1) = 0.4$ $\quad$ $P(M_2) = 0.35$ $\quad$ $P(M_3) = 0.25$

$P(D|M_1) = 0.04$ $\quad$ $P(D|M_2) = 0.02$ $\quad$ $P(D|M_3) = 0.01$

(a)

$P(\bar{D}) = ?$ Sabe-se que: $P(\bar{D}) = 1 - P(D)$

Pela regra da probabilidade total, obtém-se:

$$P(D) = \sum_{j=1}^{3} P(M_j)\,P(D|M_j) = P(M_1)\,P(D|M_1) + P(M_2)\,P(D|M_2) + P(M_3)\,P(D|M_3) =$$

$$= 0.4 \times 0.04 + 0.35 \times 0.02 + 0.25 \times 0.01 = 0.0255$$

Logo,

$$P(\bar{D}) = 1 - 0.0255 = 0.9745$$

# Exercício 28 b)

$P(M_1 | D) = ?$

Pelo teorema de Bayes, tem-se:

$$P(M_1|D) = \frac{P(M_1)\,P(D|M_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(M_i)\,P(D|M_i)} = \frac{0.4 \times 0.04}{0.0255} \approx 0.627$$

# Exercício 28 c)

Esquema binomial: $P = C_x^n \, p^x \, (1-p)^{n-x}$ , onde $n = 2$, $x = 1$, $p = P(D) = 0.0255$

Logo,

$$P = C_1^2 \times 0.0255^1 \times 0.9745^1 \approx 0.0497$$

Numa população de elementos, existe uma percentagem $p$ com determinado atributo. Retirando $n$ elementos dessa população, qual a probabilidade de $x$ deles $(x \leq n)$ terem esse atributo?

Exercício do Livro Murteira et al (2015)

33. Numa pastelaria fabrica-se bolo-rei. Sabe-se que, 20% dos bolos são de tamanho grande, 50% são pequenos e os restantes são de tamanho médio. Uma fava é colocada em 60% dos bolos pequenos e em 20% de cada um dos outros. Nos bolos grandes, quando se coloca a fava, também se põe um brinde especial.

a) Qual a percentagem de bolos com brinde especial?

b) Admitindo que comprou dois bolos naquela pastelaria, qual a probabilidade de ambos terem fava?

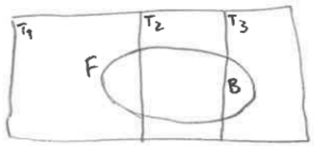
# Exercício 33 a)

2.33

$T_1$ - pequeno $\quad P(T_1) = 0.5$

$T_2$ - médio $\quad P(T_2) = 1 - 0.5 - 0.2 = 0.3$

$T_3$ - grande $\quad P(T_3) = 0.2$




F - fava $\quad P(F|T_1) = 0.6 \quad P(F|T_2) = 0.2 \quad P(F|T_3) = 0.2$

B - brinde $\rightarrow$ $B = F \cap T_3$ (Fava e bolo grande em simultâneo)

(a)

$$P(B) = P(F \cap T_3) = P(F|T_3)\,P(T_3) = 0.2 \times 0.2 = 0.04$$

# Exercício 33 b)

(b)

$P(F) \rightarrow$ Regra Probabilidade Total

$$P(F) = P(T_1)P(F|T_1) + P(T_2)P(F|T_2) + P(T_3)P(F|T_3) =$$

$$= 0.5 \times 0.6 + 0.3 \times 0.2 + 0.2 \times 0.2 = 0.4$$

Esquema binomial $(n=2, x=2, p=P(F)=0.4)$

$$P = C_2^2 \times 0.4^2 \times (1-0.4)^{2-2} = 0.4^2 = 0.16$$

Exercício do Livro Murteira et al (2015)

35. Uma prova de Estatística tem a duração de duas horas. Dos alunos que entregam a prova, sabe-se que 20% o fazem antes das 2 horas, 50% no limite fixado e os restantes depois. Têm nota positiva 70% dos primeiros, 50% dos segundos e 15% dos últimos.

a) Qual a percentagem de alunos com nota positiva?

b) Comente a seguinte frase: "dos alunos que têm nota positiva, mais de metade entregou dentro do tempo regulamentar".

c) Em 10 alunos escolhidos ao acaso, dos que entregam a prova, qual a probabilidade de exactamente quatro deles terem-na feito no tempo fixado?

# Exercício 35

Sejam os acontecimentos,

$H_1$ - terminar antes do limite fixado
$H_2$ - terminar no limite fixado
$H_3$ - terminar depois do limite fixado

$\left.\right\}$ $H_1$, $H_2$ e $H_3$ formam partição de $\Omega$

$B$ - ter nota positiva

$P(H_1) = 0.2$ $\quad$ $P(H_2) = 0.5$ $\quad$ $P(H_3) = 1 - 0.2 - 0.5 = 0.3$

$P(B|H_1) = 0.7$ $\quad$ $P(B|H_2) = 0.5$ $\quad$ $P(B|H_3) = 0.15$

# Exercício 35 (a): Teorema da Probabilidade Total

(a)

$P(B) = ?$

Pela regra da probabilidade total, obtém-se:

$$P(B) = \sum_{j=1}^{3} P(H_j)\,P(B|H_j) = P(H_1)\,P(B|H_1) + P(H_2)\,P(B|H_2) + P(H_3)\,P(B|H_3)$$

$$= 0.2 \times 0.7 + 0.5 \times 0.5 + 0.3 \times 0.15 = 0.435$$

# Exercício 35 (b): Teorema de Bayes

(b)

É necessário verificar se: $P(\underbrace{H_1 \cup H_2}_{\text{Entregar no tempo regulamentar}} \mid B) > 0.5$ nota positiva

$$P(H_1 \cup H_2 \mid B) = P(H_1 \mid B) + P(H_2 \mid B) - \overbrace{P(\underbrace{H_1 \cap H_2}_{\emptyset} \mid B)}^{0}$$

Pelo teorema de Bayes, obtém-se:

- $$P(H_1 \mid B) = \frac{P(H_1)\, P(B \mid H_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i)\, P(B \mid H_i)} = \frac{0.2 \times 0.7}{0.435} \approx 0.322$$

- $$P(H_2 \mid B) = \frac{P(H_2)\, P(B \mid H_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i)\, P(B \mid H_i)} = \frac{0.5 \times 0.5}{0.435} \approx 0.575$$

Logo,

$$P(H_1 \cup H_2 \mid B) \approx 0.322 + 0.575 = 0.897 > 0.5$$

Assim sendo, a afirmação está correcta.

# Exercício 35 (c): Esquema Binomial

(c)

Esquema binomial: $P = C^n_x \, p^x (1-p)^{n-x}$, onde $n = 10$, $x = 4$,
$p = P(H_2) = 0.5$

Logo,

$$P = C^{10}_4 \times 0.5^4 \times 0.5^6 \approx 0.2058$$

Exercício do Livro Murteira et al (2015)

42. Maria, uma promissora engenheira química, está interessada em saber se determinada substância está contaminada por uma impureza que conduz à sua inutilização. Existe um teste laboratorial que tem probabilidade 0.8 de assinalar a impureza quando a substância está efectivamente contaminada, e probabilidade de 0.1 de assinalar a presença da impureza quando esta não está contaminada. Sabe-se ainda que, antes de efectuar qualquer teste, a probabilidade da substância estar contaminada por essa impureza é de 0.4.

a) Qual a probabilidade de um teste laboratorial assinalar a presença da impureza?

b) Tendo o teste assinalado a impureza, calcule a probabilidade da substância estar efectivamente contaminada.

# Exercício 42 (a)

$A \equiv$ { O teste assinala impureza }

$C \equiv$ { A substância está contaminada }

$P(A|C) = 0.8$ $\qquad$ $P(C) = 0.4$

$P(A|\bar{C}) = 0.1$ $\qquad$ $P(\bar{C}) = 0.6$

{ $C$ e $\bar{C}$ formam uma partição de $\Omega$.

a) Usando a regra da probabilidade total:

$$P(A) = P(A \cap C) + P(A \cap \bar{C}) =$$

$$= P(A|C)\,P(C) + P(A|\bar{C})\,P(\bar{C}) =$$

$$= 0.8 \times 0.4 + 0.1 \times 0.6 = 0.38$$

# Exercício 42 (b)

b)

$$P(C \mid A) = \frac{P(A \mid C)\, P(C)}{P(A)} = \frac{0.8 \times 0.4}{0.38} = 0.842$$

# 3

# Variáveis Aleatórias Discretas

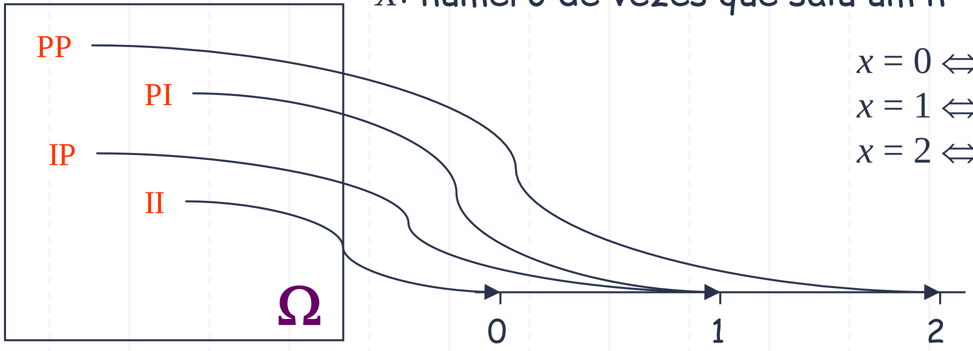
Variável Aleatória, Função de Distribuição, Função Massa de Probabilidade, Valor Esperado, Moda, Variância e Quantis

# Variável Aleatória

Uma função ***X*** que associa a cada elemento ***w*** do espaço amostral **Ω** um valor ***x*** ∈ ***R*** é denominada de *variável aleatória (v.a.)*.

Experiência: lançar um 1 dado duas vezes e observar o resultado
(P = par e I = impar)

$X$: número de vezes que saiu um nº par em 2 lançamentos do dado




$x = 0 \Leftrightarrow$ II
$x = 1 \Leftrightarrow$ IP ou PI
$x = 2 \Leftrightarrow$ PP

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

**Definição:** *Uma variável aleatória é uma aplicação do espaço dos possíveis em* $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} X : \quad & \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ & \omega \longrightarrow X(\omega) = x \end{aligned}$$

Slides do Professor Manuel Scotto do IST

# Tipos de Variáveis Aleatórias

Uma variável aleatória pode ser classificada em:

- Variável aleatória **discreta**
- Variável aleatória **contínua**

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Variável Aleatória Discreta

Uma v.a. é discreta quando o conjunto de valores possíveis que ela assume for finito ou numerável de possibilidades.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Variável Aleatória Discreta: Exemplo 1

Considere-se o sexo (característica) das crianças em famílias com três filhos (*M*: masculino e *F*: feminino).

**<u>Espaço amostral</u>**:

$$\Omega = \{\underset{\omega_1}{(MMM)}, \underset{\omega_2}{(MMF)}, \underset{\omega_3}{(MFM)}, \underset{\omega_4}{(FMM)}, \underset{\omega_5}{(MFF)}, \underset{\omega_6}{(FMF)}, \underset{\omega_7}{(FFM)}, \underset{\omega_8}{(FFF)}\}$$

Defina-se a v.a. $X$: nº de crianças do sexo masculino ($M$).

| $\Omega$ | $MMM$ | $MMF$ | $MFM$ | $FMM$ | $MFF$ | $FMF$ | $FFM$ | $FFF$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 |

→ Então $X$ assume valores no conjunto {0, 1, 2, 3}, logo é uma variável aleatória discreta.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Variável Aleatória Contínua

Uma v.a. é contínua quando o conjunto de valores possíveis que ela assume for não enumerável.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Variável Aleatória Contínua: Exemplo

Considere-se o tempo de vida, em horas, das lâmpadas produzidas por uma fábrica.

Defina-se a v.a. $T$: tempo de vida, em horas, de uma lâmpada que foi escolhida, ao acaso, da fábrica.

$\rightarrow$ Então, $T$ é uma variável aleatória contínua que assume qualquer valor real não negativo.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Função Massa de Probabilidade

**Função massa de probabilidade (f.m.p):** É a função que atribui a cada valor $x_i$ da v. a. discreta $X$ a sua probabilidade de ocorrência e pode ser representada pela tabela:

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $P(X=x_1)$ | $P(X=x_2)$ | ... | $P(X=x_n)$ |

Uma função massa de probabilidade deve satisfazer:

$$\boxed{0 \leq P(X = x_i) \leq 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1}$$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Função Massa de Probabilidade: Exemplo 1

Defina-se a v.a. $X$: nº de crianças do sexo masculino em famílias com três filhos (*M*: masculino e *F*: feminino).

| $\Omega$ | $MMM$ | $MMF$ | $MFM$ | $FMM$ | $MFF$ | $FMF$ | $FFM$ | $FFF$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Acontecimentos independentes

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Função Massa de Probabilidade: Resumindo...

- **Função de probabilidade de uma variável discreta X:**

Se X é uma v.a. discreta, que assume valores distintos $x_1$, $x_2,\ldots$, $x_n,\ldots$, então a função de probabilidade (f.p.) de X é definida como

$$f(x) = p(x) = \begin{cases} P[X = x] & \text{se } x = x_i \\ 0 & \text{se } x \neq x_i \end{cases} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

e deve satisfazer as seguintes condições:

1. $0 \leq f(x) \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R};$
2. Se n finito, $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1.$

Caso n infinito, $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ terá de ser uma série convergente de soma 1.

Ao conjunto de pares ordenados $(x_i, f(x_i))$, i $=1,2,\ldots,n,\ldots$, designa-se por **distribuição de probabilidades da variável aleatória**.

# Variável Aleatória Discreta: Exemplo 2

O Departamento de Estatística é formado por 35 professores, sendo 21 homens e 14 mulheres. Uma comissão de 3 professores será constituída sorteando, ao acaso, três membros do departamento.

Qual é a probabilidade da comissão ser formada por ***pelo menos duas mulheres***?

Vamos definir a v.a.

$X$: nº de mulheres na comissão.

Quais são os possíveis valores que $X$ pode assumir?

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Variável Aleatória Discreta: Exemplo 2

| Espaço amostral | Probabilidade | $X$ |
|---|---|---|
| (HHH) | $\frac{21}{35}\times\frac{20}{34}\times\frac{19}{33}=0{,}203$ | 0 |
| (HHM) | $\frac{21}{35}\times\frac{20}{34}\times\frac{14}{33}=0{,}150$ | 1 |
| (HMH) | $\frac{21}{35}\times\frac{14}{34}\times\frac{20}{33}=0{,}150$ | 1 |
| (MHH) | $\frac{14}{35}\times\frac{21}{34}\times\frac{20}{33}=0{,}150$ | 1 |
| (HMM) | $\frac{21}{35}\times\frac{14}{34}\times\frac{13}{33}=0{,}097$ | 2 |
| (MHM) | $\frac{14}{35}\times\frac{21}{34}\times\frac{13}{33}=0{,}097$ | 2 |
| (MMH) | $\frac{14}{35}\times\frac{13}{34}\times\frac{21}{33}=0{,}097$ | 2 |
| (MMM) | $\frac{14}{35}\times\frac{13}{34}\times\frac{12}{33}=0{,}056$ | 3 |

Acontecimentos dependentes

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Função Massa de Probabilidade: Exemplo 2

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | 0,203 | 0,450 | 0,291 | 0,056 |

Assim, tem-se $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = 0,291 + 0,056 = 0,347$.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Variável Aleatória Discreta: Exemplo 3

Um dado é lançado duas vezes, de forma independente. Qual é a probabilidade da ***soma dos pontos nos dois lançamentos ser menor do que 6***?

$\Omega$ = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}.

*Qual é a probabilidade de cada ponto $w_i$ de $\Omega$ ?*

Admitindo que o dado é perfeitamente homogêneo e sendo os lançamentos independentes,

$P(w_i)$ = 1/36 , qualquer $w_i \in \Omega$.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Função Massa de Probabilidade: Exemplo 3

Função massa de probabilidade de $X$:

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

| | | $2^0$. lançamento | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| **$1^0$. Lançamento** | **1** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | **2** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| | **3** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | **4** | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | **5** | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | **6** | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

$X$: Soma dos pontos nos dois lançamentos do dado

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Função Massa de Probabilidade: Exemplo 3

$X$: soma dos pontos nos dois lançamentos do dado.

Função massa de probabilidade de $X$:

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

Então, a probabilidade da soma dos pontos nos dois lançamentos ser menor do que 6 é

$$P(X < 6) = P(X=5) + P(X=4) + P(X=3) + P(X=2)$$
$$= 4/36 + 3/36 + 2/36 + 1/36$$
$$= 10/36 = 0{,}278$$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Função Massa de Probabilidade: Outros Exemplos

Podemos estar interessados em outras variáveis aleatórias definidas para o mesmo espaço amostral.

$Y$: valor máximo obtido nos dois lançamentos do dado.

| $y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(Y = y)$ | 1/36 | 3/36 | 5/36 | 7/36 | 9/36 | 11/36 |

$Z$: diferença entre os pontos do 2º e do 1º lançamento do dado.

| $z$ | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(Z = z)$ | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Variável Aleatória Discreta: Exemplo 3

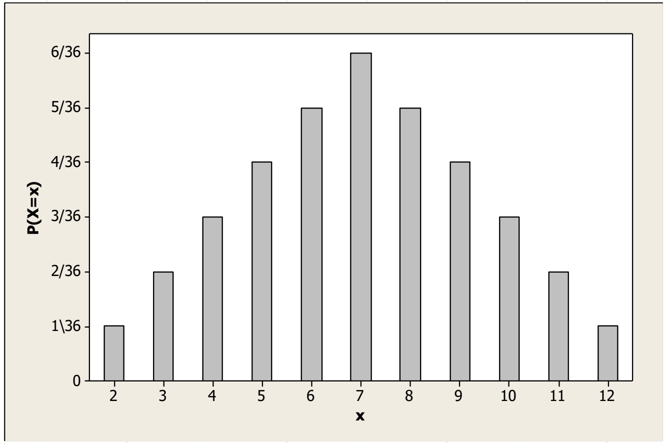
*Qual é o valor médio da soma dos pontos ($X$) no lançamento de dois dados?*

$\Omega$ = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

$\Rightarrow$ 36 pontos igualmente prováveis

| $x$ | $P(X = x)$ |
|---|---|
| 2 | 1/36 |
| 3 | 2/36 |
| 4 | 3/36 |
| 5 | 4/36 |
| 6 | 5/36 |
| 7 | 6/36 |
| 8 | 5/36 |
| 9 | 4/36 |
| 10 | 3/36 |
| 11 | 3/36 |
| 12 | 1/36 |

Representação algébrica e gráfica da função massa de probabilidade da v.a. X




https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Variável Aleatória Discreta: Valor Médio

**Valor Esperado (média populacional):** Dada a v.a. $X$, assumindo os valores $x_1, x_2, ..., x_n$, chamamos de **valor médio**, ***valor esperado*** ou ***esperança matemática de $X$*** o valor

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + \ldots + x_n \times P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)$$

Notação: $\mu = E(X)$

Seja $X$ uma variável aleatória discreta que assume valores em $\mathcal{R}_X$ com função de probabilidade $p(x)$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Temos então que

$$\boxed{\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x_i \in \mathcal{R}_X} g(x_i)p(x_i) = \sum_{x_i \in \mathcal{R}_X} g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i).}$$

# Valor Médio da V.a. Discreta: Exemplo 3

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

No exemplo, para média da v.a. $X$ (soma de pontos), tem-se:

$$E(X) = 2\times(1/36) + 3\times(2/36) + \ldots + 11\times(2/36) + 12\times(1/36)$$
$$= 252/36 = 7,$$

ou seja, em média, a soma dos pontos no lançamento dos dois dados é igual a 7.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Variável Aleatória Discreta: Variância

**Variância:** É o valor esperado da v.a. $(X - E(X))^2$, ou seja, se $X$ assume os valores $x_1, x_2, ..., x_n$, então

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 \times P(X = x_i)$$

Notação: $\sigma^2 = \text{Var}(X)$.

Da relação acima, tem-se que

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

# Momentos

- **Definição 3.9 – Momento de ordem *k* em relação à origem**

$$\mu'_k = E(X^k) \qquad \text{(se existir)}$$

Observações:

- Trata-se do valor esperado da função $\psi(X) = X^k$.
- No caso discreto $E(X^k) = \sum_{x \in D} x^k f_X(x)$ enquanto no caso contínuo $E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)dx$

- **Definição 3.10 – Momento de ordem *k* em relação à média**

$$\mu_k = E\left[(X - \mu)^k\right] \qquad \text{(se existir)}$$

Murteira et al (2015)

# Variável Aleatória Discreta: Desvio Padrão

**Desvio Padrão:** É definido como a raiz quadrada positiva da variância, isto é,

$$\mathrm{DP}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Notação: $\sigma = \mathrm{DP}(X).$

# Variância da V.a. Discreta: Exemplo 3

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

$$\mathrm{Var}(X) = (2-7)^2 \times \frac{1}{36} + (3-7)^2 \times \frac{2}{36} + \ldots + (11-7)^2 \times \frac{2}{36} + (12-7)^2 \times \frac{1}{36}$$

$$= \frac{210}{36} = 5{,}83.$$

Alternativamente, poderíamos calcular

$$E(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \ldots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36}$$

$$= \frac{1974}{36} = 54{,}83$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

e, portanto, $\mathrm{Var}(X) = 54{,}83 - 7^2 = 5{,}83$.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

# Propriedades do Valor Médio e Variância

1) Se $X = a$, em que $\underline{a}$ é uma constante, então

$$\mathrm{E}(X) = a \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Var}(X) = 0.$$

2) Se $Y = aX + b$, em que $a$ e $b$ são constantes, então

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$$

e

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X).$$

# Propriedades do Valor Médio e Variância (Cont.)

3) Sejam $X$ e $Y$ duas variáveis quaisquer, então

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

**P4.** Sejam $n$ variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$. Então,

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \ldots + \mathbb{E}(X_n).$$

4) Sejam $X$ e $Y$ duas variáveis independentes, então

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

**P4)** Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes. Então,

$$\mathrm{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \ldots + \mathrm{Var}(X_n).$$

# Variável Aleatória Discreta: Moda

**Moda**: A moda de uma variável aleatória discreta $X$, designada por $mo$, corresponde ao ponto de máximo da função massa de probabilidade de $X$

$$mo = \max_x P(X = x).$$

A moda de uma variável aleatória discreta **nem sempre é única**.

Slides do Professor Manuel Scotto do IST

# Variável Aleatória Discreta: Covariância

**Definição 4.2.1:** Sejam $X$ e $Y$ variáveis aleatórias integráveis. Então a covariância entre X e Y é definida por

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))],$$

**Teorema 4.2.1:** Sejam $X_1,\dots,X_n$ variáveis aleatórias integráveis. Então,

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)] + 2\sum_{i<j} Cov(X_i,X_j).$$

Em particular se $Cov(X_i,X_j)=0$ para $i\neq j$ então

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

**Definição 4.2.2:** Seja X e Y variáveis aleatórias integráveis então o coeficiente de correlação entre X e Y é dado por

$$\rho(X,Y) := \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y-\mathbb{E}(Y)}{\sigma_Y}\right)\right]$$

**Proposição 4.2.1:** O coeficiente de correlação é independente da escola e transação da variáveis, ou seja,

$$\rho(X,Y) = \rho(aX+b, cY+d)$$

# Função de Distribuição

- **Função de distribuição de uma variável aleatória discreta X:**

Define-se função de distribuição (f.d.) de uma variável aleatória X como

$$\boxed{F(x)=P[X \leq x].}$$

Esta função tem domínio $\mathbb{R}$, conjunto de chegada [0,1] e verifica as seguintes propriedades:

1. $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$
2. $F(x_1) \leq F(x_2), \forall x_1, x_2: x_1 < x_2$ (é uma função monótona não decrescente);
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1;$
4. $P[x_1 < X \leq x_2] = F(x_2) - F(x_1), \forall x_1, x_2: x_1 < x_2.$

A **Função distribuição** é uma função contínua à direita.

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

# Função de Distribuição: Notas

1. $P(X \in B) = \sum_{x_i \in B} f_X(x_i)$;
2. $F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i)$;
3. $f_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-)$, onde $F_X(x^-) \equiv P(X < x)$;
4. $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) + f_X(a)$;
5. $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) - f_X(b)$;
6. $P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a) - f_X(b) + f_X(a)$;
7. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Notas de Probabilidades e Estatística dos Professores Giovani Silva e Carlos Daniel

# Função Massa de Probabilidade: Exemplo 4

X = número de vezes que saiu cara em três lançamentos de uma moeda,

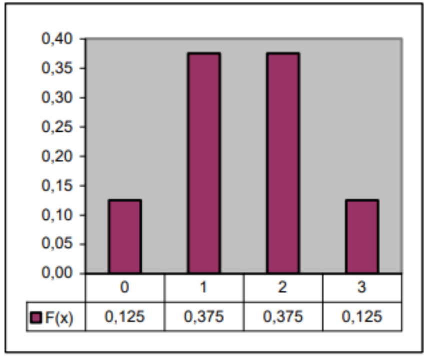
$P[X = 0] = P[(C \cap C \cap C)] = \frac{1}{8}$

$P[X = 1] = P[(F \cap C \cap C) \cup (C \cap F \cap C) \cup (C \cap C \cap F)] = \frac{3}{8}$

$P[X = 2] = P[(F \cap F \cap C) \cup (F \cap C \cap F) \cup (C \cap F \cap F)] = \frac{3}{8}$

$P[X = 3] = P[(F \cap F \cap F)] = \frac{1}{8}$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| f ( x ) | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |




Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

# Função de Distribuição: Exemplo 4

$$F(0) = P[X \le 0] = \sum_{x \le 0} f(x) = \frac{1}{8};$$

$$F(1) = P[X \le 1] = \sum_{x \le 1} f(x) = \frac{4}{8}$$

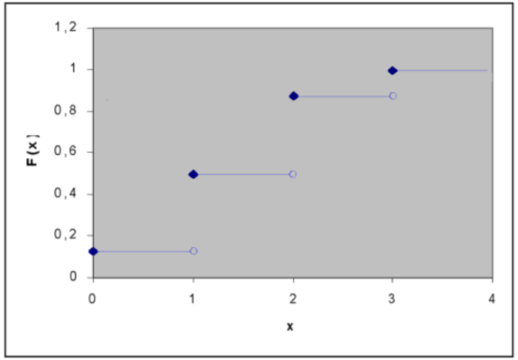
$$F(2) = P[X \le 2] = \sum_{x \le 2} f(x) = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = P[X \le 3] = \sum_{x \le 3} f(x) = 1$$

A representação gráfica da função distribuição de uma variável aleatória é "em escada"

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{8}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{4}{8}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{8}, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)



# Obrigada!

## Questões?