

### Formulações em programação linear inteira (mista)

1. Crie um enunciado para uma aplicação prática do problema do caixeiro viajante.
2. Considere a seguinte instância para o problema do caixeiro viajante.

|   |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|
|   | 1  | 2  | 3  | 4  |
| 1 | -  | 15 | 12 | 13 |
| 2 | 15 | -  | 9  | 2  |
| 3 | 12 | 9  | -  | 19 |
| 4 | 13 | 2  | 19 | -  |

- (a) Resolva o problema utilizando a formulação MTZ.
  - (b) Resolva o problema utilizando a formulação SCF.
  - (c) Determine o valor da relaxação linear das formulações desenvolvidas nas alíneas anteriores e compare-os.
3. Uma fábrica, localizada no nodo 0, necessita de matéria-prima e existem  $n$  fornecedores que a podem fornecer. O fornecedor  $i \in \{1, \dots, n\}$  tem  $w_i$  unidades de matéria-prima disponível e a fábrica tem uma necessidade de  $W$  unidades. A fábrica pretende determinar a rota que deve executar de forma a garantir que recolhe toda a matéria-prima que necessita ao mínimo custo de deslocação.
    - (a) Adapte uma formulação compacta para resolver o problema apresentado. Nota: Este problema é uma variante do problema do caixeiro viajante chamada *prize-collecting traveling salesman problem*.
    - (b) Considere a seguinte matriz de custos e valores de  $w_i$ .

|   |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|
|   | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  |
| 0 | -  | 17 | 13 | 7  | 4  |
| 1 | 14 | -  | 3  | 10 | 17 |
| 2 | 9  | 7  | -  | 8  | 14 |
| 3 | 11 | 6  | 11 | -  | 3  |
| 4 | 17 | 7  | 18 | 2  | -  |

|       |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|
| $w_i$ | 4 | 7 | 2 | 4 |
|-------|---|---|---|---|

- i. Considerando  $W = 10$ , determine a solução ótima da instância apresentada.
  - ii. Considere outros valores de  $W$ . Existe alguma relação entre o valor ótimo da instância e o valor de  $W$ ? Se sim, indique qual.
4. Crie um enunciado para uma aplicação prática do problema do roteamento de veículos.
  5. Considere a seguinte matriz de custos de uma instância do problema de roteamento de veículos.

|    | 0  | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0  | -  | 20 | 55 | 50 | 40 | 15 | 30 | 40 |
| C1 | 20 | -  | 40 | 20 | 50 | 25 | 15 | 50 |
| C2 | 55 | 40 | -  | 50 | 20 | 30 | 40 | 10 |
| C3 | 50 | 20 | 50 | -  | 20 | 50 | 60 | 35 |
| C4 | 40 | 50 | 20 | 20 | -  | 50 | 60 | 20 |
| C5 | 15 | 25 | 30 | 50 | 50 | -  | 80 | 20 |
| C6 | 30 | 15 | 40 | 60 | 60 | 80 | -  | 25 |
| C7 | 40 | 50 | 10 | 35 | 20 | 20 | 25 | -  |

Existem três veículos homogêneos com capacidade 80 e as procuras dos clientes são apresentadas na tabela seguinte.

|       | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|
| $d_i$ | 45 | 50 | 30 | 20 | 25 | 35 | 30 |

- (a) Formule o problema utilizando a formulação MTZ e determine a sua solução ótima.
- (b) Considere a formulação SCF.
- Determine o valor da sua relaxação linear utilizando as restrições de limite  $0 \leq f_{ij} \leq Qx_{ij}$ .
  - Determine o valor da sua relaxação linear utilizando as restrições de limite  $d_j x_{ij} \leq f_{ij} \leq (Q - d_i)x_{ij}$  e compare-o com o valor obtido na alínea anterior.
  - Determine o valor ótimo da instância apresentada.
6. O Sr. Y tem uma pequena empresa de distribuição de enlatados com uma frota de dois camiões. O camião 1 tem capacidade para transportar 50 caixas de enlatados enquanto o camião 2 tem capacidade para transportar 70. As necessidades em caixas de enlatados dos clientes do Sr. X assim com as distâncias entre o centro de distribuição (depósito - 0) e as localizações dos clientes são apresentadas na tabela seguinte.

|       | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 |
|-------|----|----|----|----|----|----|
| $d_i$ | 28 | 22 | 26 | 33 | 20 | 34 |

| $c_{ij}$ | 0  | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 |
|----------|----|----|----|----|----|----|----|
| 0        | -  | 37 | 28 | 35 | 21 | 30 | 39 |
| C1       | 32 | -  | 28 | 29 | 31 | 31 | 33 |
| C2       | 38 | 28 | -  | 38 | 27 | 30 | 24 |
| C3       | 37 | 29 | 20 | -  | 38 | 20 | 35 |
| C4       | 25 | 26 | 33 | 37 | -  | 25 | 34 |
| C5       | 37 | 40 | 21 | 20 | 32 | -  | 32 |
| C6       | 20 | 20 | 34 | 32 | 29 | 22 | -  |

Desenvolva uma formulação compacta para o problema apresentado e indique qual o plano ótimo de distribuição que o Sr. Y deve adotar.

7. O Sr. U tem dois veículos disponíveis com capacidade 130 para fazer a distribuição dos produtos adquiridos na sua loja online. Quando fazem a sua encomenda, os clientes indicam uma janela temporal  $[a_i, b_i]$  que corresponde ao intervalo de tempo durante qual a sua encomenda pode ser entregue. Na tabela seguinte encontra-se a procura de cada cliente ( $d_i$ ), a janela temporal em que devem ser servidos ( $[a_i, b_i]$ ) e o tempo de serviço ( $ts_i$ ), que corresponde ao tempo que a sua encomenda demora a ser entregue.

|              | $C1$    | $C2$    | $C3$     | $C4$    | $C5$     | $C6$     | $C7$     |
|--------------|---------|---------|----------|---------|----------|----------|----------|
| $d_i$        | 45      | 50      | 30       | 20      | 25       | 35       | 30       |
| $[a_i, b_i]$ | [2, 15] | [8, 20] | [10, 30] | [2, 15] | [10, 30] | [10, 30] | [16, 40] |
| $ts_i$       | 2       | 4       | 2        | 3       | 4        | 2        | 3        |

A matriz de tempos de deslocação é apresentada de seguida.

|      | 0  | $C1$ | $C2$ | $C3$ | $C4$ | $C5$ | $C6$ | $C7$ |
|------|----|------|------|------|------|------|------|------|
| 0    | -  | 10   | 8    | 7    | 6    | 4    | 5    | 6    |
| $C1$ | 8  | -    | 4    | 2    | 5    | 3    | 2    | 5    |
| $C2$ | 10 | 4    | -    | 5    | 2    | 3    | 4    | 1    |
| $C3$ | 6  | 3    | 4    | -    | 2    | 5    | 6    | 4    |
| $C4$ | 5  | 4    | 3    | 3    | -    | 5    | 6    | 2    |
| $C5$ | 6  | 3    | 1    | 6    | 4    | -    | 8    | 2    |
| $C6$ | 7  | 2    | 5    | 5    | 7    | 5    | -    | 3    |
| $C7$ | 8  | 5    | 2    | 4    | 3    | 6    | 5    | -    |

- Desenvolva uma formulação compacta para o problema apresentado cujo objetivo é minimizar o tempo de deslocação.
- Determine o plano ótimo de distribuição que o Sr. U deve adotar.
- Tendo em conta as especificidades do problema, crie uma desigualdade válida.

## Relaxações e heurísticas

8. Considere a seguinte matriz de custos relativa a uma instância do problema do caixeiro viajante.

|   | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | - | 3 | 5 | 1 |
| 2 | - | - | 1 | 6 |
| 3 | 6 | 1 | - | 3 |
| 4 | 1 | 5 | - | - |

- Obtenha a solução ótima do problema relaxado em que não se consideram as restrições de eliminação de subcircuitos.
  - Introduza na solução obtida na alínea anterior as restrições de eliminação de subcircuitos da formulação CC até encontrar a solução ótima do problema.
9. Considere a matriz de custos seguinte relativa a uma instância do problema do caixeiro viajante.

|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | - | 8 | 4 | 3 |
| 3 | 4 | 8 | - | 5 | 2 |
| 4 | 1 | 4 | 5 | - | 3 |
| 5 | 2 | 3 | 2 | 3 | - |

- Obtenha uma solução do problema relaxado em que não se consideram as restrições de eliminação de subcircuitos. Relacione o valor da solução obtida com o ótimo da instância.
  - Obtenha uma solução para o problema relaxado em que não se consideram as restrições de grau. Relacione o valor da solução obtida com o ótimo da instância.
  - Obtenha uma solução admissível para o problema utilizando a heurística de inserção de menor custo. Relacione o valor da solução obtida com o ótimo da instância.
10. Seja  $G = (V, E)$  um grafo não orientado, onde  $E$  é o conjunto das arestas em vez do conjunto de arcos. Considere as variáveis  $x_e$ , que tomam valor 1 se a aresta  $e \in E$  é visitada na solução.
- Adapte a formulação CC para o caso simétrico.
  - Determine a solução ótima da instância apresentada no exercício anterior utilizando a formulação desenvolvida na alínea anterior. Quais são as vantagens/desvantagens de usar a formulação simétrica comparativamente à assimétrica?
11. Considere a seguinte instância do problema do caixeiro viajante.

|      | $C1$ | $C2$ | $C3$ | $C4$ | $C5$ | $C6$ |
|------|------|------|------|------|------|------|
| $C1$ | -    | 7    | 10   | 12   | 2    | 9    |
| $C2$ | 7    | -    | 11   | 14   | 8    | 1    |
| $C3$ | 10   | 11   | -    | 12   | 6    | 8    |
| $C4$ | 12   | 14   | 12   | -    | 7    | 9    |
| $C5$ | 2    | 8    | 6    | 7    | -    | 11   |
| $C6$ | 9    | 1    | 8    | 9    | 11   | -    |

- Construa uma solução admissível utilizando a heurística do vizinho mais próximo.

- (b) Identifique um minorante relaxando as restrições de eliminação de subcircuitos. O que pode concluir sobre o valor ótimo da instância apresentada?
- (c) Introduza, na solução da alínea anterior, as restrições relaxadas da formulação CC até encontrar uma solução ótima da instância.

12. Considere a seguinte instância do problema do caixeiro viajante.

|   | 1 | 2 | 3  | 4 | 5 |
|---|---|---|----|---|---|
| 1 | - | 3 | 7  | 6 | 2 |
| 2 | 4 | - | 11 | 9 | 6 |
| 3 | 2 | 6 | -  | 1 | 5 |
| 4 | 5 | 5 | 3  | - | 4 |
| 5 | 6 | 2 | 7  | 6 | - |

- (a) Obtenha uma solução admissível utilizando a heurística de inserção de menor custo.
- (b) Identifique um minorante recorrendo à relaxação das restrições de saída de um nodo.
- (c) Introduza, na solução da alínea anterior as restrições relaxadas até encontrar uma solução ótima para a instância apresentada.

13. Considere a seguinte instância para o problema do caixeiro viajante:

|   | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |
|---|----|----|----|----|----|
| 1 | -  | 22 | 61 | 44 | 50 |
| 2 | 22 | -  | 40 | 22 | 31 |
| 3 | 61 | 40 | -  | 22 | 42 |
| 4 | 44 | 22 | 22 | -  | 22 |
| 5 | 50 | 31 | 42 | 22 | -  |

Obtenha uma solução admissível para a instância apresentada utilizando as seguintes heurísticas:

- (a) Heurística do vizinho mais próximo.
- (b) Heurística da inserção de menor custo.

14. Considere a seguinte matriz de custos de uma instância do problema de roteamento de veículos.

|    | 0  | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0  | -  | 20 | 55 | 50 | 40 | 15 | 30 |
| C1 | 25 | -  | 40 | 20 | 50 | 25 | 15 |
| C2 | 60 | 35 | -  | 50 | 20 | 30 | 40 |
| C3 | 35 | 30 | 45 | -  | 20 | 50 | 60 |
| C4 | 25 | 40 | 35 | 30 | -  | 50 | 60 |
| C5 | 30 | 35 | 10 | 60 | 35 | -  | 80 |
| C6 | 45 | 20 | 35 | 50 | 70 | 45 | -  |

Considere ainda que estão disponíveis três veículos homogêneos com capacidade 65 e que as procuras dos clientes são:

|       | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 |
|-------|----|----|----|----|----|----|
| $d_i$ | 23 | 17 | 47 | 20 | 36 | 43 |

- (a) Construa uma relaxação do problema removendo as restrições de eliminação de subcircuitos e as restrições de capacidade e determine um minorante para o valor ótimo.
- (b) Adicione cortes RCC até obter uma solução admissível para a instância apresentada.

15. Considere a seguinte matriz de custos de uma instância do problema de roteamento de veículos.

|    | 0  | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 0  | -  | 20 | 55 | 50 | 40 | 15 |
| C1 | 20 | -  | 40 | 20 | 50 | 25 |
| C2 | 55 | 40 | -  | 50 | 20 | 30 |
| C3 | 50 | 20 | 50 | -  | 20 | 50 |
| C4 | 40 | 50 | 20 | 20 | -  | 50 |
| C5 | 15 | 25 | 30 | 50 | 50 | -  |

Existem dois veículos homogêneos com capacidade 100 e as procuras dos clientes são apresentadas na tabela seguinte.

|       | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 |
|-------|----|----|----|----|----|
| $d_i$ | 45 | 50 | 30 | 20 | 25 |

- (a) Determine uma solução admissível utilizando a heurística de Clarke & Wright.
  - (b) Proponha uma heurística do tipo Agupar  $\rightarrow$  Rotear e aplique-a.
  - (c) Proponha uma heurística do tipo Rotear  $\rightarrow$  Agrupar e aplique-a.
  - (d) Compare as soluções admissíveis obtidas nas alíneas anteriores entre si e indique o que pode concluir sobre o valor ótimo da instância apresentada.
16. Resolva de novo os Exercícios 5, 14 e 15 utilizando o VRP Spreadsheet Solver. Compare as soluções obtidas pelo VRP Spreadsheet Solver com as que obteve quando resolveu os exercícios.