Estatística I

Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)

2.º Ano/1.º Semestre

2024/2025

Aulas Teórico-Práticas N.ºs 7 e 8 (Semana 4)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas TP (Semanas 1 e 3)	Aulas TP (Semanas 3 a 6)	Aulas TP (Semanas 7 a 9)	Aulas TP (Semanas 10 a 12)
• **Capítulo 1**: Análise Descritiva • **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	• **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Variáveis Aleatórias Especiais

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

3. Variáveis aleatórias unidimensionais

3.1. Variável aleatória

3.2. Função de distribuição

3.3. Classificação de variáveis aleatórias.

3.4. Variável aleatória discreta

3.5. Variável aleatória contínua

3.6. Função distribuição de uma função de uma variável aleatória

3.7. Valores esperados de variáveis aleatórias

3.8. Valores esperados de funções de variáveis aleatórias

3.9. Propriedades dos valores esperados

3.10. Momentos em relação à origem

3.11. Momentos em relação à média

3.12. Variância de uma variável aleatória

Variáveis Aleatórias Discretas: Exercícios

1

Exercício do Livro Murteira et al (2015)

3. Seja

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 1) \\ x/3 & (1 \leq x < 2) \\ 1 & (x \geq 2). \end{cases}$$

a) Verifique que se trata de uma função de distribuição.

b) Classifique a variável aleatória em causa.

Exercício 3 a): V.a. Discreta e Função de Distribuição

P2) F é não decrescente

- para $(x < 1)$ e $(x \geq 2)$, F é não decrescente pois é sempre constante e igual a 0 e 1 respectivamente. ✓
- para $(1 \leq x < 2)$, F é não decrescente, pois $\left(\frac{x}{3}\right)' = \frac{1}{3} > 0$ ✓

P3) $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = \cancel{\lim_{x\to-\infty} 0} = 0$ ✓

$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \cancel{\lim_{x\to+\infty}} 1 = 1$ ✓

Exercício 3 a): V.a. Discreta e Função de Distribuição

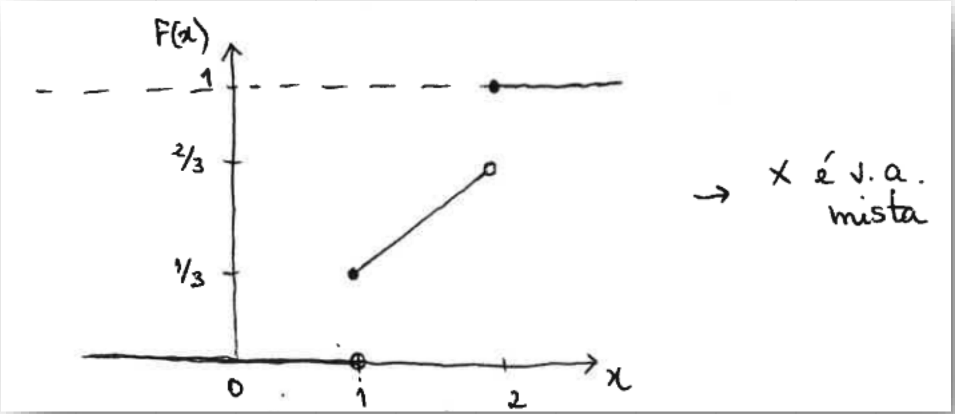
P5) F é contínua à direita : $F(a+0) = F(a)$

Pontos de transição de ramo : $x = 1$ e $x = 2$.

- $x = 1 \Rightarrow F(1+0) = \lim_{x \to 1+0} F(x) = \lim_{x \to 1+0} 1/3 = 1/3 = F(1)$ ✓

- $x = 2 \Rightarrow F(2+0) = \lim_{x \to 2+0} F(x) = \lim_{x \to 2+0} 1 = 1 = F(2)$ ✓

Exercício 3 b): V.a. Discreta e Função de Distribuição



Exercício do Livro Murteira et al (2015)

6. Seja X uma variável aleatória discreta com função de distribuição dada por,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < -1) \\ 0.2 & (-1 \le x < 0) \\ 0.7 & (0 \le x < 1) \\ 1 & (x \ge 1). \end{cases}$$

a) Determine a função probabilidade de X.

b) Calcule $P(X \ge 1)$.

c) Calcule $P(X < 0.5 \mid X \ge 0)$.

Exercício 6 a): V.a. Discreta e Função de Probabilidade

$$f(x) = F(x) - F(x^-)$$

- $x = -1 \rightarrow f(-1) = F(-1) - F(-1^-) = 0.2 - 0 = 0.2$
- $x = 0 \rightarrow f(0) = F(0) - F(0^-) = 0.7 - 0.2 = 0.5$
- $x = 1 \rightarrow f(1) = F(1) - F(1^-) = 1 - 0.7 = 0.3$

Logo,

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 & (x = -1) \\ 0.5 & (x = 0) \\ 0.3 & (x = 1) \end{cases}$$

Exercício 6 b): V.a. Discreta e Probabilidades

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - F(1^-) = 1 - 0.7 = 0.3$$

Exercício 6 c): V.a. Discreta e Probabilidades

$$P(X < 0.5 \mid X \geq 0) = \frac{P(X < 0.5 \wedge X \geq 0)}{P(X \geq 0)} = \frac{P(0 \leq X < 0.5)}{1 - P(X < 0)} = \frac{F(0.5^-) - F(0^-)}{1 - F(0^-)}$$

$$= \frac{0.7 - 0.2}{1 - 0.2} = \frac{5}{8} = 0.625$$

Exercício do Livro Murteira et al (2015)

7. O número de automóveis encomendados mensalmente num *stand*, é uma variável aleatória X com a seguinte função probabilidade:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.3	0.3	0.2	0.1	0.1

a) Calcule a função de distribuição de X.

b) Determine o número mínimo de automóveis que o *stand* deve ter num mês para que a probabilidade de satisfazer todas as encomendas não seja inferior a 0.75.

c) Num mês em que haja apenas dois automóveis em *stock* no *stand*, calcule a probabilidade de serem todos vendidos, e especifique a distribuição da variável aleatória que representa as vendas nesse mês.

Exercício 7 a): V.a. Discreta e Função de Distribuição

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

- $x < 0 \longrightarrow F(x) = 0$
- $0 \leq x < 1 \longrightarrow F(x) = f(0) = 0.3$
- $1 \leq x < 2 \longrightarrow F(x) = f(1) + f(0) = 0.3 + 0.3 = 0.6$
- $2 \leq x < 3 \longrightarrow F(x) = f(2) + f(1) + f(0) = 0.2 + 0.3 + 0.3 = 0.8$
- $3 \leq x < 4 \longrightarrow F(x) = f(3) + f(2) + f(1) + f(0) = 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.3 = 0.9$
- $x \geq 4 \longrightarrow F(x) = f(4) + f(3) + f(2) + f(1) + f(0) = 0.1 + 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.3 = 1$

Logo,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 0.3 & (0 \leq x < 1) \\ 0.6 & (1 \leq x < 2) \\ 0.8 & (2 \leq x < 3) \\ 0.9 & (3 \leq x < 4) \\ 1 & (x \geq 4) \end{cases}$$

Exercício 7 b): V.a. Discreta e Probabilidades

- Stand não tem automóveis $\Rightarrow P(E) = P(X=0) = f(0) = 0.3 < 0.75$
- Stand tem 1 automóvel $\Rightarrow P(E) = P(X \leq 1) = F(1) = 0.6 < 0.75$
- Stand tem 2 automóveis $\Rightarrow P(E) = P(X \leq 2) = F(2) = 0.8 > 0.75$

Logo, para que a probabilidade de satisfazer todas as encomendas não seja inferior a 0.75, o stand deve ter, no mínimo, 2 automóveis num mês.

Exercício 7 c): V.a. Discreta e Probabilidades

$$P(V) = P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - F(2^-) = 1 - 0.6 = 0.4$$

seja,

Y - nº automóveis vendidos num mês com 2 em stock

$$Y = \begin{cases} 0 & (X = 0) \\ 1 & (X = 1) \\ 2 & (X \geq 2) \end{cases} \longrightarrow Y \text{ é v.a. discreta}$$

Exercício 7 c): V.a. Discreta e Probabilidades

Função probabilidade de Y

- $y=0 \rightarrow f_Y(0) = P(Y=0) = P(X=0) = f_X(0) = 0.3$
- $y=1 \rightarrow f_Y(1) = P(Y=1) = P(X=1) = f_X(1) = 0.3$
- $y=2 \rightarrow f_Y(2) = P(Y=2) = P(X \geq 2) = 1 - F_X(2^-) = 1 - 0.6 = 0.4$

Logo,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0.3 & (y=0) \\ 0.3 & (y=1) \\ 0.4 & (y=2) \end{cases}$$

Função distribuição de Y

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & (y<0) \\ 0.3 & (0 \leq y < 1) \\ 0.6 & (1 \leq y < 2) \\ 1 & (y \geq 2) \end{cases}$$

Exercício do Livro Murteira et al (2015)

9. Calcule o valor de k de modo que as funções dadas nas alíneas seguintes definam funções probabilidade da variável aleatória X.

a) $f(x) = kx \quad (x = 1, 2, \ldots, 10)$;

b) $f(x) = k\left(\frac{1}{5}\right)^x \quad (x = 1,2,3,\ldots)$.

Exercício 9 a): V.a. Discreta e Função de Probabilidade

Sabe-se que : $\sum_{x \in D} f(x) = 1$

$f(x) = Kx \quad (x = 1, 2, \ldots, 10)$

$\sum_{x \in D} f(x) = 1 \Leftrightarrow \sum_{x=1}^{10} f(x) = 1 \Leftrightarrow \sum_{x=1}^{10} Kx = 1 \Leftrightarrow K \sum_{x=1}^{10} x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow K(1+2+\cdots+10) = 1 \Leftrightarrow 55K = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{55} \approx 0.018\dot{2}$

Exercício 9 b): V.a. Discreta e Função de Probabilidade

$$f(x) = K\left(\frac{1}{5}\right)^x \qquad (x = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\sum_{x \in D} f(x) = 1 \Leftrightarrow \sum_{x=1}^{+\infty} K\left(\frac{1}{5}\right)^x = 1 \Leftrightarrow K \underbrace{\sum_{x=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^x}_{\text{série geométrica}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K\left(\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}\right) = 1 \Leftrightarrow K\left(\frac{1/5}{4/5}\right) = 1 \Leftrightarrow K\left(\frac{1}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow K = 4$$

Exercício do Livro Murteira et al (2015)

25. Considere a variável aleatória X com a seguinte função de probabilidade

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.2	0.2	0.1	0.3	0.2

a) Calcule $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.

b) Faça $Y = 1 - 3X$ e calcule $E(Y)$ e $\text{Var}(Y)$.

c) Sendo $Z = |X - 2|$, determine $E(Z)$ e $\text{Var}(Z)$.

Exercício 25 (a): Valor Médio e Variância

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 & (x = 0) \\ 0.2 & (x = 1) \\ 0.1 & (x = 2) \\ 0.3 & (x = 3) \\ 0.2 & (x = 4) \end{cases} \longrightarrow D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Exercício 25 (a): Valor Médio e Variância

$$E(X) = \sum_{x \in D} x\, f(x) = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.1 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.2 = 2.1$$

μ_X

$$Var(X) = E\left[(X - \mu_X)^2\right] = \sum_{x \in D} (x - \mu_x)^2 f(x) = (0 - 2.1)^2 \times 0.2 + (1 - 2.1)^2 \times 0.2 + (2 - 2.1)^2 \times 0.1 + (3 - 2.1)^2 \times 0.3 + (4 - 2.1)^2 \times 0.2 = 2.09$$

σ_X^2

Alternativamente,

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

- $$E(X^2) = \sum_{x \in D} x^2 f(x) = 0^2 \times 0.2 + 1^2 \times 0.2 + 2^2 \times 0.1 + 3^2 \times 0.3 + 4^2 \times 0.2 = 6.5$$

$$Var(X) = 6.5 - 2.1^2 = 2.09$$

Exercício 25 (b): Valor Médio e Variância

$Y = 1 - 3X$ → É uma função linear em X

$$E(Y) = E(1-3X) = 1 - 3E(X) = 1 - 3 \times 2.1 = -5.3$$

μ_Y

$$Var(Y) = Var(1-3X) = (-3)^2\, Var(X) = 9 \times 2.09 = 18.81$$

σ_Y^2

Exercício 25 (c): Valor Médio e Variância

$Z = |X-2|$ → É uma função não linear em X

z	0	1	2
f(z)	0,1	0,5	0,4

$$\underset{\mu_Z}{E(Z)} = E(|X-2|) = \sum_{x \in D} |x-2| f(x) = |0-2| \times 0.2 + |1-2| \times 0.2 + |2-2| \times 0.1 + |3-2| \times 0.3 +$$

$$+ |4-2| \times 0.2 = 1.3$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$$

- $E(Z^2) = E(|X-2|^2) = E[(X-2)^2] = E(X^2 - 4X + 4) = E(X^2) - 4E(X) + 4 =$

$$= 6.5 - 4 \times 2.1 + 4 = 2.1$$

$$\underset{\sigma_Z^2}{Var(Z)} = 2.1 - 1.3^2 = 0.41$$

Exercício do Livro Murteira et al (2015)

26. O número de unidades de um produto procuradas diariamente por uma empresa é uma variável aleatória X com função probabilidade dada por:

$$f(x) = 1/5 \quad (x = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Se o produto é vendido durante o dia, proporciona um ganho de 5 euros por unidade; se o não é, deve ser inutilizado, o que acarreta um prejuízo de 4 euros por unidade.

a) Calcule o valor esperado e a variância de X.

b) Qual deve ser o aprovisionamento diário de modo que o lucro esperado seja máximo?

Exercício 26 (a): Valor Médio e Variância

X - v.a. nº unidades procuradas

$$f_X(x) = \frac{1}{5} \quad (x = 0, 1, 2, 3, 4)$$

Ganho de 5 € por unidade vendida

Prejuízo de 4 € por unidade não vendida

Exercício 26 (a): Valor Médio e Variância

$$E(x) = \sum_x x \cdot f(x) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{5} = 2 \rightarrow \mu_x$$

$$Var(x) = E(x^2) - E(x)^2$$

- $E(x^2) = \sum_x x^2 \cdot f(x) = 0^2 \times \frac{1}{5} + 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{1}{5} + 3^2 \times \frac{1}{5} + 4^2 \times \frac{1}{5} = 6$

Logo;

$$Var(x) = 6 - 2^2 = 2 \rightarrow \sigma_x^2$$

Exercício 26 (b): Máximo

Seja,

- L - v.a. lucro
- K - aprovisionamento (stock) diário (K é constante, com $K = 0,1,2,3,4$)

→ se $X < K \Rightarrow L = 5X - 4(K - X) = 5X - 4K + 4X = 9X - 4K$

→ se $X \geq K \Rightarrow L = 5K$

Ou seja,

$$L = \begin{cases} 9X - 4K & (X < K) \\ 5K & (X \geq K) \end{cases} \longrightarrow L = \psi(X) \Rightarrow E(L) = \sum_x \psi(x) f(x)$$

Exercício 26 (b): Máximo

• Se $K=0 \Rightarrow L = \begin{cases} 0 & (x \geq 0) \end{cases}$

$$E(L) = \sum_{x=0}^{4} 0 \times \frac{1}{5} = \sum_{x=0}^{4} 0 = 5 \times 0 = 0$$

• Se $K=1 \Rightarrow L = \begin{cases} 9x-4 & (x<1) \\ 5 & (x \geq 1) \end{cases}$

$$E(L) = \sum_{x=0}^{0} (9x-4) \times \frac{1}{5} + \sum_{x=1}^{4} 5 \times \frac{1}{5} = (9 \times 0 - 4) \times \frac{1}{5} + \sum_{x=1}^{4} 1 = -\frac{4}{5} + 4 \times 1 = 3.2$$

• Se $K=2 \Rightarrow L = \begin{cases} 9x-8 & (x<2) \\ 10 & (x \geq 2) \end{cases}$

$$E(L) = \sum_{x=0}^{1} (9x-8) \times \frac{1}{5} + \sum_{x=2}^{4} 10 \times \frac{1}{5} = (9 \times 0 - 8) \times \frac{1}{5} + (9 \times 1 - 8) \times \frac{1}{5} + \sum_{x=2}^{4} 2 =$$

$$= -\frac{8}{5} + \frac{1}{5} + 3 \times 2 = 4.6$$

Exercício 26 (b): Máximo

• se $K = 3 \Rightarrow L = \begin{cases} 9x - 12 & (x < 3) \\ 15 & (x \geq 3) \end{cases}$

$$E(L) = \sum_{x=0}^{2} (9x - 12) \times \frac{1}{5} + \sum_{x=3}^{4} 15 \times \frac{1}{5} = (9 \times 0 - 12) \times \frac{1}{5} + (9 \times 1 - 12) \times \frac{1}{5} + (9 \times 2 - 12) \times \frac{1}{5}$$

$$+ \sum_{x=3}^{4} 3 = -\frac{12}{5} - \frac{3}{5} + \frac{6}{5} + 2 \times 3 = 4.2$$

• se $K = 4 \Rightarrow L = \begin{cases} 9x - 16 & (x < 4) \\ 20 & (x \geq 4) \end{cases}$

$$E(L) = \sum_{x=0}^{3} (9x - 16) + \sum_{x=4}^{4} 20 \times \frac{1}{5} = (9 \times 0 - 16) \times \frac{1}{5} + (9 \times 1 - 16) \times \frac{1}{5} + (9 \times 2 - 16) \times \frac{1}{5} +$$

$$+ (9 \times 3 - 16) \times \frac{1}{5} + \sum_{x=4}^{4} 4 = -\frac{16}{5} - \frac{7}{5} + \frac{2}{5} + \frac{11}{5} + 1 \times 4 = 2$$

Logo, o aprovisionamento diário deverá ser de $K = 2$ unidades de produto.

Exercício do Livro Murteira et al (2015)

27. Sabe-se que o primeiro e o segundo momentos em relação à origem da variável aleatória discreta X, são iguais a 6 e a 62, respectivamente. Sendo $Y = (X/2) + 3$, determine a média, a variância e o desvio padrão de Y.

Exercício 27: Média, Variância e Desvio Padrão

$E(X) = 6 \qquad E(X^2) = 62$

$$Y = \frac{X}{2} + 3$$

$$\underset{\mu_Y}{E(Y)} = E\left(\frac{X}{2} + 3\right) = \frac{1}{2} E(X) + 3 = \frac{1}{2} \cdot 6 + 3 = 6$$

$$\underset{\sigma_Y^2}{Var(Y)} = Var\left(\frac{X}{2} + 3\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 Var(X) = \frac{1}{4}\left\{E(X^2) - [E(X)]^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(62 - 6^2\right) = \frac{1}{4} \cdot 26 = 6.5$$

$$\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{6.5} \approx 2.5495$$

Obrigada!

Questões?