

Tópicos de resolução

1. Considere a seguinte matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- ($\frac{1}{2}$ val.) (a) Mostre que 2 é valor próprio de A .
(1 val.) (b) Determine os vetores próprios associados a $\lambda = 2$.
($\frac{1}{2}$ val.) (c) Determine os restantes valores próprios de A .
(1 val.) (d) É A diagonalizável? Justifique a sua resposta.

(a)

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A - 2I) = 0,$$

logo 2 é valor próprio de A .

(b) Os vetores próprios associados a $\lambda = 2$ são as soluções não nulas de $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff -x + y - z = 0 \iff y = x + z.$$

$$\text{Assim, } V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x+z \\ z \end{bmatrix} : (x, z) \in \mathbb{R}^2, (x, z) \neq (0, 0) \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(c)

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda) \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

Logo

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) = (2-\lambda) \cdot \lambda \cdot (\lambda-2) = -\lambda(2-\lambda)^2.$$

Os valores próprios são $\lambda = 2$ (multiplicidade algébrica 2) e $\lambda = 0$, com multiplicidade algébrica 1.

(d) Como $\lambda = 0$ tem multiplicidade algébrica 1, o seu espaço próprio tem dimensão 1. Além disso, da alínea (b) temos $\dim(V_2) = 2$. Assim, a soma das dimensões dos espaços próprios é

$$\dim(E_2) + \dim(E_0) = 2 + 1 = 3,$$

pelo que existem 3 vetores próprios linearmente independentes. Logo, A é diagonalizável.

2. Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{4-(x-4)^2-y^2} \ln(y-x+4)}{\sqrt{y^3}}.$$

- (1 val.) (a) Determine analiticamente D_f , o domínio da função f e represente-o graficamente.
($1\frac{1}{2}$ val.) (b) Determine analiticamente a fronteira e o fecho de D_f .
(1 val.) (c) Determine analiticamente o maior conjunto aberto contido em D_f .

(1 val.) (d) O conjunto D_f é compacto? Justifique a sua resposta.

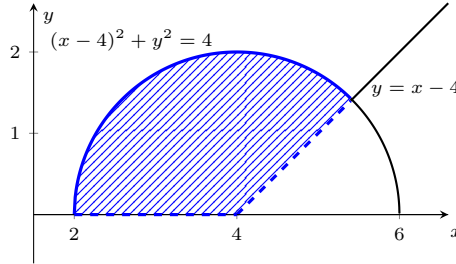
(a) Para $f(x, y)$ estar bem definida em $\mathbb{R}$ é necessário:

$$4 - (x - 4)^2 - y^2 \geq 0, \quad y - x + 4 > 0, \quad y^3 > 0.$$

A última condição equivale a $y > 0$ (e exclui $y = 0$). Assim,

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 4)^2 + y^2 \leq 4, y > 0, y > x - 4\}.$$

Graficamente:



(b) O fecho é

$$\overline{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 4)^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0, y \geq x - 4\}.$$

A fronteira é

$$\begin{aligned} \partial D_f &= \{(x, y) : (x - 4)^2 + y^2 = 4, y \geq 0, y \geq x - 4\} \\ &\cup \{(x, 0) : (x - 4)^2 \leq 4, 0 \geq x - 4\} \\ &\cup \{(x, y) : y = x - 4, (x - 4)^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}. \end{aligned}$$

(c) O maior conjunto aberto contido em D_f (o interior em $\mathbb{R}^2$) é

$$\text{int}(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 4)^2 + y^2 < 4, y > 0, y > x - 4\}.$$

(d) D_f não é compacto: é limitado (está contido num disco), mas não é fechado (por exemplo, admite sucessões com $y \downarrow 0$ ou $y \downarrow x - 4$ sem incluir os limites). Em $\mathbb{R}^2$, compacto é equivalente a fechado e limitado; logo D_f não é compacto.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(1+y)\sqrt{x^2+y^2}}{x^3+y}, & \text{se } xy > 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(1 val.) (a) Mostre que f não é contínua em $(0, 0)$.

(1½ val.) (b) Calcule, ou prove que não existe, $\partial_{(1,1)} f(0, 0)$, isto é, a derivada de f segundo o vector $(1, 1)$, em $(0, 0)$.

(a) Como $f(0, 0) = 0$, estudamos o limite de $f(x, y)$, por exemplo, quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo da recta $y = x$. Para $x \neq 0$ tem-se $xy = x^2 > 0$, pelo que

$$f(x, x) = \frac{(1+x)\sqrt{x^2+x^2}}{x^3+x} = \frac{(1+x)|x|\sqrt{2}}{x(1+x^2)}.$$

Se $x > 0$, então

$$f(x, x) = \frac{(1+x)\sqrt{2}}{1+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \sqrt{2},$$

enquanto que, se $x < 0$,

$$f(x, x) = -\frac{(1+x)\sqrt{2}}{1+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{2}.$$

Como os limites laterais ao longo da mesma recta $y = x$ são diferentes, o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ não existe. Logo, f não é contínua em $(0, 0)$.

- (b) Pela definição, $\partial_{(1,1)} f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t)}{t}$. Para $t \neq 0$, tem-se $t \cdot t = t^2 > 0$, logo

$$f(t, t) = \frac{(1+t)\sqrt{t^2+t^2}}{t^3+t} = \frac{(1+t)|t|\sqrt{2}}{t(t^2+1)}.$$

Se $t > 0$, então $f(t, t) = \frac{(1+t)\sqrt{2}}{t^2+1} \rightarrow \sqrt{2}$ e portanto $\frac{f(t, t)}{t} \rightarrow +\infty$. Se $t < 0$, então $f(t, t) = -\frac{(1+t)\sqrt{2}}{t^2+1} \rightarrow -\sqrt{2}$ e portanto $\frac{f(t, t)}{t} \rightarrow +\infty$. Assim, o limite diverge; logo $\partial_{(1,1)} f(0, 0)$ não existe.

4. Considere a função $f(x, y) = 3x - 4y - 1$.

- (1 val.) (a) Mostre que f não tem pontos críticos em $\mathbb{R}^2$.
 ($\frac{1}{2}$ val.) (b) Justifique a existência de mínimo global e máximo global de f no conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
 ($\frac{1}{2}$ val.) (c) Determine o maximizador e o minimizador globais de f restrita ao conjunto S .

- (a) Um ponto crítico satisfaz $\nabla f = \mathbf{0}$. Como

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0},$$

f não tem pontos críticos em $\mathbb{R}^2$.

- (b) O conjunto $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ é fechado e limitado em $\mathbb{R}^2$, logo é compacto. A função f é contínua, pelo que, pelo Teorema de Weierstrass, f atinge máximo e mínimo globais em S .
 (c) Para determinar os extremos globais de f em S , basta procurar extremos na fronteira $x^2 + y^2 = 1$ (pois f é linear e não tem pontos críticos no interior). Considere-se a restrição com multiplicadores de Lagrange:

$$\text{extremos de } f(x, y) = 3x - 4y - 1 \text{ sujeitos a } g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Resolvemos

$$\nabla f = \lambda \nabla g.$$

Como $\nabla f = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ e $\nabla g = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$, obtemos o sistema

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 3 = 2\lambda x, \\ -4 = 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Das duas primeiras equações, $x = \frac{3}{2\lambda}$ e $y = \frac{-4}{2\lambda} = \frac{-2}{\lambda}$. Substituindo na restrição:

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-2}{\lambda}\right)^2 = 1 \iff \frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 1 \iff \frac{25}{4\lambda^2} = 1 \iff \lambda = \pm \frac{5}{2}.$$

Se $\lambda = \frac{5}{2}$, então

$$(x, y) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right), \quad f\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = 4.$$

Se $\lambda = -\frac{5}{2}$, então

$$(x, y) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \quad f\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -6.$$

Logo, o maximizador global é $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ e o minimizador global é $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

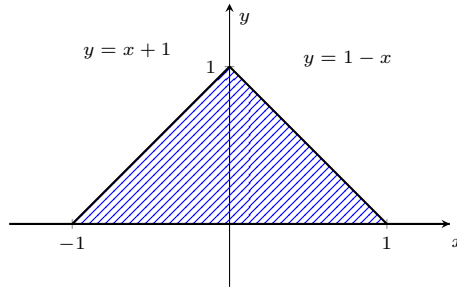
5. Considere o conjunto $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y \leq x + 1, y \leq 1 - x\} \subset \mathbb{R}^2$.

- ($\frac{1}{2}$ val.) (a) Represente R graficamente.
 ($1\frac{1}{2}$ val.) (b) Calcule $\iint_R (x^2 - 2y) dx dy$.

(a) As retas $y = x + 1$ e $y = 1 - x$ intersectam-se no ponto $(0, 1)$. Além disso, as interseções com o eixo x (isto é, com $y = 0$) são

$$y = x + 1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1, 0), \quad y = 1 - x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 0).$$

Assim, R é o triângulo com vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$, delimitado inferiormente por $y = 0$ e superiormente pelas retas $y = x + 1$ (para $x \in [-1, 0]$) e $y = 1 - x$ (para $x \in [0, 1]$).



(b) Particionando a região em função do valor de x , obtemos

$$\iint_R (x^2 - 2y) dx dy = \int_{-1}^0 \int_0^{x+1} (x^2 - 2y) dy dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 - 2y) dy dx.$$

Para o primeiro integral:

$$\int_0^{x+1} (x^2 - 2y) dy = [x^2 y - y^2]_0^{x+1} = x^2(x+1) - (x+1)^2 = x^3 - x - 1.$$

Logo,

$$\int_{-1}^0 (x^3 - x - 1) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - x \right]_{-1}^0 = -\frac{3}{4}.$$

Para o segundo integral:

$$\int_0^{1-x} (x^2 - 2y) dy = [x^2 y - y^2]_0^{1-x} = x^2(1-x) - (1-x)^2 = -x^3 + 3x - 1.$$

Assim,

$$\int_0^1 (-x^3 + 3x - 1) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - x \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Somando,

$$\iint_R (x^2 - 2y) dx dy = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

6. Determine as soluções *gerais* das seguintes equações diferenciais:

- (1 val.) (a) $y' = 2xy + y$.
 ($1\frac{1}{2}$ val.) (b) $y'' - 2y' + y = 8e^{3x}$.

(a) Temos

$$y' = (2x + 1)y \iff \frac{y'}{y} = 2x + 1.$$

Integrando,

$$\ln |y| = x^2 + x + C \iff y(x) = Ce^{x^2+x}.$$

(b) A equação homogénea associada é

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

cuja equação característica é $r^2 - 2r + 1 = 0$, isto é, $(r - 1)^2 = 0$. Logo,

$$y_h(x) = (C_1 + C_2x)e^x.$$

Para uma solução particular, tentamos $y_p(x) = Ae^{3x}$. Então

$$y_p' = 3Ae^{3x}, \quad y_p'' = 9Ae^{3x},$$

e substituindo na equação:

$$(9A - 2 \cdot 3A + A)e^{3x} = 4Ae^{3x} = 8e^{3x} \implies A = 2.$$

Assim, a solução geral é

$$y(x) = (C_1 + C_2x)e^x + 2e^{3x}.$$

7. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 .

- (11/2 val.) (a) Considerando a composição $f(uv^2, v^2 + 1)$, calcule $\frac{\partial f}{\partial u}$ em função das derivadas parciais de f (**não** considere a expressão de f na alínea (b)).
- (1 val.) (b) Seja $f(x, y) = x^3 + xy^2$. É a função $\frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (positivamente) homogénea? Em caso afirmativo, indique o grau de homogeneidade.

(a) Considere-se $g(u, v) = f(uv^2, v^2 + 1)$. Definamos $x = uv^2$ e $y = v^2 + 1$. Pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = f_x(uv^2, v^2 + 1) \cdot \frac{\partial(uv^2)}{\partial u} + f_y(uv^2, v^2 + 1) \cdot \frac{\partial(v^2 + 1)}{\partial u}.$$

Como $\frac{\partial(uv^2)}{\partial u} = v^2$ e $\frac{\partial(v^2 + 1)}{\partial u} = 0$, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial u} f(uv^2, v^2 + 1) = v^2 f_x(uv^2, v^2 + 1).$$

(b) Seja

$$F(x, y) = \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^3 + xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Para $t > 0$ temos

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + (tx)(ty)^2 = t^3(x^3 + xy^2) = t^3 f(x, y),$$

e

$$\sqrt{(tx)^2 + (ty)^2} = t\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Logo,

$$F(tx, ty) = \frac{f(tx, ty)}{\sqrt{(tx)^2 + (ty)^2}} \stackrel{\text{pos. hom.}}{=} \frac{t^3 f(x, y)}{t\sqrt{x^2 + y^2}} = t^2 F(x, y).$$

Conclui-se que F é positivamente homogénea de grau 2 (no seu domínio, isto é, em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$).