



Nome completo: _____ N.º de aluno/a: _____

Cotações									
1(a)	1(b)	1(c)	1(d)	2(a)	2(b)	2(c)	2(d)	3(a)	3(b)
4(a)	4(b)	4(c)	5(a)	5(b)	6(a)	6(b)	7(a)	7(b)	Nota

Leia cuidadosamente as instruções seguintes:

1. Os telemóveis devem ser desligados e guardados. A utilização de telemóveis, *smartwatches*, computadores portáteis e demais equipamentos de comunicação é estritamente proibida durante a realização da prova. **A sua utilização determinará a anulação da prova, sem prejuízo da aplicação de outras eventuais sanções.**
2. Durante a prova os alunos não podem comunicar entre si por quaisquer meios. Qualquer tentativa de comunicação implicará a anulação das provas dos intervenientes.
3. É permitida a consulta de um formulário, preparado pelo próprio aluno, que não exceda 1 folha (2 páginas) A4.
4. **Não é permitido o uso de calculadora.**
5. As respostas deverão ser escritas a caneta preta ou azul e com letra legível. **Respostas a lápis ou a outra cor não serão consideradas.**
6. Só é permitido sair da sala 30 minutos após o início da prova, não sendo possível voltar a entrar. A saída da sala implicará a entrega da prova, ou a desistência.
7. Não serão esclarecidas dúvidas durante a prova. Quaisquer dúvidas deverão ser apresentadas por escrito para que possam ser, eventualmente, consideradas na correção.

O exame tem uma duração de duas (2) horas.

Matemática II (1.º semestre, 2025/2026) – Exame da Época de Recurso

1. Considere a seguinte matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- ($\frac{1}{2}$ val.) (a) Mostre que 2 é valor próprio de A .
 (1 val.) (b) Determine os vectores próprios associados a $\lambda = 2$.
 ($\frac{1}{2}$ val.) (c) Determine os restantes valores próprios de A .
 (1 val.) (d) É A diagonalizável? Justifique a sua resposta.

2. Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{4 - (x - 4)^2 - y^2} \ln(y - x + 4)}{\sqrt{y^3}}.$$

- (1 val.) (a) Determine analiticamente D_f , o domínio da função f e represente-o graficamente.
 ($\frac{1}{2}$ val.) (b) Determine analiticamente a fronteira e o fecho de D_f .
 (1 val.) (c) Determine analiticamente o maior conjunto aberto contido em D_f .
 (1 val.) (d) O conjunto D_f é compacto? Justifique a sua resposta.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(1+y)\sqrt{x^2+y^2}}{x^3+y}, & \text{se } xy > 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (1 val.) (a) Mostre que f não é contínua em $(0, 0)$.
 ($\frac{1}{2}$ val.) (b) Calcule, ou prove que não existe, $\partial_{(1,1)} f(0, 0)$, isto é, a derivada de f segundo o vector $(1, 1)$, em $(0, 0)$.

4. Considere a função $f(x, y) = 3x - 4y - 1$.

- (1 val.) (a) Mostre que f não tem pontos críticos em $\mathbb{R}^2$.
 ($\frac{1}{2}$ val.) (b) Justifique a existência de mínimo global e máximo global de f no conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
 ($\frac{1}{2}$ val.) (c) Determine o maximizador e o minimizador globais de f restrita ao conjunto S .

5. Considere o conjunto $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y \leq x + 1, y \leq 1 - x\} \subset \mathbb{R}^2$.

- ($\frac{1}{2}$ val.) (a) Represente R graficamente.
 ($\frac{1}{2}$ val.) (b) Calcule $\iint_R (x^2 - 2y) dx dy$.

6. Determine as soluções *gerais* das seguintes equações diferenciais:

- (1 val.) (a) $y' = 2xy + y$.
 ($\frac{1}{2}$ val.) (b) $y'' - 2y' + y = 8e^{3x}$.

7. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 .

- ($\frac{1}{2}$ val.) (a) Considerando a composição $f(uv^2, v^2 + 1)$, calcule $\frac{\partial f}{\partial u}$ em função das derivadas parciais de f (**não** considere a expressão de f na alínea (b)).
 (1 val.) (b) Seja $f(x, y) = x^3 + xy^2$. É a função $\frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (positivamente) homogénea? Em caso afirmativo, indique o grau de homogeneidade.