

Programação Matemática II

Capítulo 1: Programação por metas

Introdução

Formulação em Programação por Metas

Metas Não Hierarquizadas

Metas Hierarquizadas

Introdução

Formulação em Programação por Metas

Metas Não Hierarquizadas

Metas Hierarquizadas

Exemplo (Adaptado de Mourão et al.):

Na Fábrica PMat são produzidos dois produtos, P1 e P2, em duas Secções S1 e S2. Cada secção tem uma capacidade semanal de produção igual a 60 h.m. e 40 h.h., respetivamente. A produção de uma unidade de P1 necessita de 3 h.m. em S1 e 1 h.h. em S2, e tem uma margem de lucro de 5 u.m.. Para a produção de uma unidade de P2 são necessárias 2 h.m. em S1 e 2 h.h. em S2, e tem a margem de lucro de 2 u.m.. Além disso, devem ser produzidas pelo menos 10 unidades de P2.

Os CEOs da PMat têm objetivos distintos. O CEO A pretende ter um lucro mínimo de 75 u.m., enquanto a CEO B pretende que as h.m. semanais gastas na Secção S1 sejam no máximo 50 h.m., para diminuir os custos de manutenção das máquinas.

Formule o problemas do CEO A e da CEO B em programação linear considerando que o objetivo do CEO A é maximizar o lucro e da CEO B é minimizar as h.m. gastas na Secção S1 e resolva-os graficamente.

Motivação

x_i - quantidade de produto P_i a produzir semanalmente, $i \in \{1, 2\}$

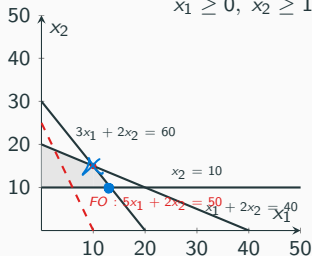
CEO A

Maximizar $5x_1 + 2x_2$

Sujeito a: $3x_1 + 2x_2 \leq 60$

$x_1 + 2x_2 \leq 40$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 10$



$x^* = (10, 15)$ e $z^* = 260 \sim 86.6$ u.m. (gasta 60 h.m. em S1).

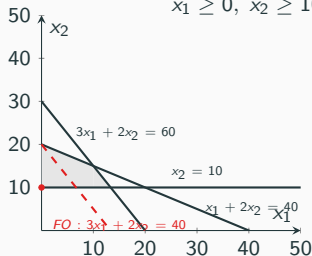
CEO B

Minimizar $3x_1 + 2x_2$

Sujeito a: $3x_1 + 2x_2 \leq 60$

$x_1 + 2x_2 \leq 40$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 10$



$x^* = (0, 10)$ e $z^* = 20$ unidades (origina um lucro de 20 u.m.).

■ Otimizado os objetivos separadamente não conseguimos atingir as metas estabelecidas.

- Qual é a melhor solução?
 - ▶ Cada CEO tem uma preferência diferente.
 - ▶ Os valores das funções objetivo são expressos em unidades diferentes.
 - ▶ As soluções são não comparáveis.

- Estamos perante um problema com dois ou mais objetivos conflituosos.

■ Exemplos de problemas com dois ou mais objetivos conflituosos

- ▶ **Planeamento de produção:** minimizar os custos vs. maximizar a utilização de recursos.
- ▶ **Seleção de projetos:** maximizar o retorno vs. minimizar o risco.
- ▶ **Localização de equipamentos:** maximizar a qualidade de serviço vs. minimizar os custos.
- ▶ **Distribuição:** minimizar os custos de transporte vs. maximizar a quantidade de artigos distribuídos.
- ▶ **Fornecimento de energia:** minimizar os custos vs. maximizar a utilização de energias renováveis.
- ▶ **Planeamento urbano:** minimizar os custos e impactos ambientais vs. maximizar a satisfação das populações.

Existem várias metodologias para lidar com problemas com múltiplos objetivos:

- ▶ Programação Multi-Objetivo
 - Existem vários objetivos. $\implies$ Sem **metas** a atingir.
- ▶ Programação por Metas ★
 - Existem metas a atingir.

Na programação por metas, o decisor identifica quais as metas a atingir e:

- ▶ Penalidades associadas ao não cumprimento das metas; ou
 - Metas Não Hierarquizadas
- ▶ A ordem de prioridade das metas a atingir.
 - Metas Hierarquizadas

Exemplo (Adaptado de Mourão et al.):

Na Fábrica PMat são produzidos dois produtos, P1 e P2, em duas Secções S1 e S2. Cada secção tem uma capacidade semanal de produção igual a 60 h.m. e 40 h.h., respetivamente. A produção de uma unidade de P1 necessita de 3 h.m. em S1 e 1 h.h. em S2, e tem uma margem de lucro de 5 u.m.. Para a produção de uma unidade de P2 são necessárias 2 h.m. em S1 e 2 h.h. em S2, e tem a margem de lucro de 2 u.m.. Além disso, devem ser produzidas pelo menos 10 unidades de P2.

Os CEOs da PMat têm ^{metas} ~~objetivos~~ distintos. O CEO A pretende ter um lucro mínimo de 75 u.m., enquanto a CEO B pretende que as h.m. semanais gastas na Secção S1 sejam no máximo 50 h.m., para diminuir os custos de manutenção das máquinas.

As metas

~~Os objetivos~~ Os objetivos que os CEO pretendem alcançar são os seguintes:

~~Objective~~ Meta

~~Objective~~ CEO A: $5x_1 + 2x_2 \geq 75$ (lucro de pelo menos 75 u.m.)

~~Objective~~ Meta

~~Objective~~ CEO B: $3x_1 + 2x_2 \leq 50$ (gastar no máximo 50 h.m. em S1)

Pode não ser

■ ~~Não é~~ possível satisfazer as duas metas. $\implies$ Solução de compromisso.

■ A programação por metas encontra uma solução de compromisso transformando cada meta numa restrição que pode ser violada se necessário.

Como transformar as metas em restrições que podem ser violadas?

Ideia Geral:

Adicionar variáveis de desvio não-negativas às metas que representam os desvios acima e abaixo do lado direito da meta. Assim, o lado esquerdo da meta pode estar acima ou abaixo do seu lado direito.

As metas dos CEO podem ser escritas da seguinte forma equivalente:

Meta CEO A: $5x_1 + 2x_2 + s_1^- - s_1^+ = 75$ (lucro ≥ 75 u.m.)

Meta CEO B: $3x_1 + 2x_2 + s_2^- - s_2^+ = 50$ (h.m. em S1 ≤ 50)

As variáveis s_1^- , s_1^+ , s_2^- e s_2^+ não-negativas são as **variáveis de desvio**.

Nota: No máximo, uma das variáveis de desvio de cada meta tem valor positivo.

■ Analisando o caso da meta do CEO A:

$$\text{Caso } s_1^- \geq 0 \text{ e } s_1^+ = 0: 5x_1 + 2x_2 + s_1^- = 75 \implies 5x_1 + 2x_2 \leq 75.$$

$$\text{Caso } s_1^- = 0 \text{ e } s_1^+ \geq 0: 5x_1 + 2x_2 - s_1^+ = 75 \implies 5x_1 + 2x_2 \geq 75.$$

Se $s_1^- = 0$, a meta do CEO A é atingido. $\implies$ Queremos que s_1^- tenha o menor valor possível.

■ Analisando o caso da meta do CEO B:

$$\text{Caso } s_2^- \geq 0 \text{ e } s_2^+ = 0: 3x_1 + 2x_2 + s_2^- = 50 \implies 3x_1 + 2x_2 \leq 50.$$

$$\text{Caso } s_2^- = 0 \text{ e } s_2^+ \geq 0: 3x_1 + 2x_2 - s_2^+ = 50 \implies 3x_1 + 2x_2 \geq 50.$$

Se $s_2^+ = 0$, a meta do CEO B é atingido. $\implies$ Queremos que s_2^+ tenha o menor valor possível.

Para obtermos uma solução de compromisso queremos:

- ▶ Minimizar s_1^-
- ▶ Minimizar s_2^+

Sujeitas às restantes restrições do problema.

■ Como resolver este problema?

- ▶ Metas Não Hierarquizadas
 - Apenas existem pesos associados às metas.
- ▶ Metas Hierarquizadas
 - Há uma relação de prioridade entre as metas.

Introdução

Formulação em Programação por Metas

Metas Não Hierarquizadas

Metas Hierarquizadas

Formulação em Programação por Metas

Parte 1:

- ▶ Definir todas as variáveis de decisão do problema (exceto as variáveis de desvio).
- ▶ Identificar e formular as metas a atingir.

Parte 2:

- ▶ Restrições funcionais do problema.
- ▶ Restrições de sinal - domínio das variáveis.
- ▶ Restrições associadas às metas - com as variáveis de desvio.

Parte 3:

- ▶ Função objetivo $\implies$ Minimizar as variáveis de desvio associadas às metas.
 - Indicar os pesos de cada meta, ou
 - Indicar a ordem de prioridades entre as várias metas.

Exemplo

Exemplo (Adaptado de Mourão et al.):

Na Fábrica PMat são produzidos dois produtos, P1 e P2, em duas Secções S1 e S2. Cada secção tem uma capacidade semanal igual a 60 h.m. e 40 h.h., respetivamente. A produção de uma unidade de P1 necessita de 3 h.m. em S1 e 1 h.h. em S2, e tem uma margem de lucro de 5 u.m.. Para a produção de uma unidade de P2 são necessárias 2 h.m. em S1 e 2 h.h. em S2, e tem a margem de lucro de 2 u.m.. Além disso, devem ser produzidas pelo menos 10 unidades de P2.

Os CEOs da PMat têm ^{metas}~~objetivos~~ distintos. O CEO A pretende ter um lucro mínimo de 75 u.m., enquanto a CEO B pretende que as h.m. semanais gastas na Secção S1 sejam no máximo 50 h.m., para poupar as máquinas.

Formule o problema da PMat em programação por metas.

Exemplo

■ Variáveis de decisão:

x_i - quantidade do produto P_i a produzir semanalmente, $i \in \{1, 2\}$

■ Metas a atingir:

$5x_1 + 2x_2 \geq 75$ (lucro mínimo de 75 u.m.)

$3x_1 + 2x_2 \leq 50$ (no máximo 50 h.m. gastas em S1)

■ Formulação em programação por metas:

$$\begin{aligned} \min Z &= s_1^- + s_2^+ \\ \text{s.a : } 3x_1 + 2x_2 &\leq 60 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 40 \\ x_2 &\geq 10 \\ 5x_1 + 2x_2 + s_1^- - s_1^+ &= 75 \\ 3x_1 + 2x_2 + s_2^- - s_2^+ &= 50 \\ x_1, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+ &\geq 0 \end{aligned}$$

Nota: Em metas não hierarquizadas, a função objetivo deve incluir os pesos. Num problema de hierarquizadas, devem ser apresentados os vários objetivos e a sua ordem de prioridades.

Introdução

Formulação em Programação por Metas

Metas Não Hierarquizadas

Metas Hierarquizadas

Metas Não Hierarquizadas

Considere um problema com r metas, onde a i -ésima meta é:

$$\text{Minimizar } G_i, \quad i \in \{1, \dots, r\}$$

→ Função das variáveis de decisão da meta i .

A **função objetivo ponderada** que combina todas as metas é:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i=1}^r w_i G_i = w_1 G_1 + w_2 G_2 + \dots + w_r G_r$$

Os pesos positivos $w_1, w_2, \dots, w_r$ refletem as preferências do decisor.

- ▶ Quanto maior for o valor de w_i , mais importância tem o objetivo.
- ▶ **Exemplo:** Se $w_i = 1$, todas as metas têm igual importância.

Nota: A determinação dos pesos é extremamente subjetiva.

Como resolver um problema com metas não hierarquizadas?

Após formularmos a função objetivo ponderada, estamos perante um problema de programação linear com um **único objetivo**.

Que métodos de resolução que conhecem para problemas de programação linear com um único objetivo?

- ▶ Método do Simplex
 - Software que resolve o método do Simplex - *solvers*

Exemplo

Exemplo (Adaptado de Mourão et al.):

Na Fábrica PMat são produzidos dois produtos, P1 e P2, em duas Secções S1 e S2. Cada secção tem uma capacidade semanal igual a 60 h.m. e 40 h.h., respetivamente. A produção de uma unidade de P1 necessita de 3 h.m. em S1 e 1 h.h. em S2, e tem uma margem de lucro de 5 u.m.. Para a produção de uma unidade de P2 são necessárias 2 h.m. em S1 e 2 h.h. em S2, e tem a margem de lucro de 2 u.m.. Além disso, devem ser produzidas pelo menos 10 unidades de P2.

Os CEOs da PMat têm ^{mctus}~~objetivos~~ distintos. O CEO A pretende ter um lucro mínimo de 75 u.m., enquanto a CEO B pretende que as h.m. semanais gastas na Secção S1 sejam no máximo 50 h.m., para poupar as máquinas.

Formule o problema da Fábrica PMat em programação por metas e resolva-o com o peso 2 para a meta do CEO A e o peso 1 para a meta da CEO B.

Exemplo

■ Variáveis de decisão:

x_i - quantidade do produto P_i a produzir semanalmente, $i \in \{1, 2\}$

■ Metas a atingir:

$5x_1 + 2x_2 \geq 75$ (lucro mínimo de 75 u.m.) $\implies$ **Peso 2**

$3x_1 + 2x_2 \leq 50$ (no máximo 50 h.m. gastas em S1) $\implies$ **Peso 1**

■ Formulação em programação em metas não hierarquizadas:

$$\min Z = 2s_1^- + 1s_2^+$$

$$s.a : 3x_1 + 2x_2 \leq 60$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_2 \geq 10$$

$$5x_1 + 2x_2 + s_1^- - s_1^+ = 75$$

$$3x_1 + 2x_2 + s_2^- - s_2^+ = 50$$

$$x_1, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+ \geq 0$$

Exemplo

■ **Passo 1:** Escrever o problema na forma aumentada (todas as restrições = e todas as variáveis ≥ 0):

$$\begin{aligned}\min Z &= 2s_1^- + 1s_2^+ \\ \text{s.a : } 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 60 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 40 \\ x_2 - x_5 &= 10 \\ 5x_1 + 2x_2 + s_1^- - s_1^+ &= 75 \\ 3x_1 + 2x_2 + s_2^- - s_2^+ &= 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+ &\geq 0\end{aligned}$$

■ **Passo 2:** Determinar uma solução básica admissível (SBA) inicial:

Considere-se $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+) = (0, 10, 40, 20, 0, 55, 0, 30, 0)$.

Exemplo

■ **Passo 3:** Escrever o quadro do simplex associado à SBA inicial e encontrar a SO:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1^-	s_1^+	s_2^-	s_2^+	TI
Z	10	0	0	0	4	0	-2	0	-1	110
x_3	3	0	1	0	2	0	0	0	0	40
x_4	1	0	0	1	2	0	0	0	0	20
x_2	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	10
s_1^-	5	0	0	0	2	1	-1	0	0	55
s_2^-	3	0	0	0	2	0	0	1	-1	30

$$CE = \max\{10, 4\} \xrightarrow{10} x_1 \text{ passa a VB}$$

$$CS = \min\left\{\frac{40}{3}, \frac{20}{1}, \frac{55}{5}, \frac{30}{3}\right\} = 10 \rightarrow s_2^- \text{ passa a VNB}$$

Exemplo

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1^-	s_1^+	s_2^-	s_2^+	TI
Z	0	0	0	0	-8/3	0	-2	-10/3	7/3	10
x_3	0	0	1	0	0	0	0	-1	1	10
x_4	0	0	0	1	4/3	0	0	-1/3	1/3	10
x_2	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	10
s_1^-	0	0	0	0	-4/3	1	-1	-5/3	5/3	5
x_1	1	0	0	0	2/3	0	0	1/3	-1/3	10

$$CE = \max\{\frac{7}{3}\} \xrightarrow{x_3} s_2^+ \text{ passa a VB}$$

$$CS = \min\{\frac{10}{1}, \frac{10}{\frac{1}{3}}, \frac{5}{\frac{5}{3}}\} = 3 \rightarrow s_1^- \text{ passa a VNB}$$

Exemplo

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1^-	s_1^+	s_2^-	s_2^+	TI
Z	0	0	0	0	-12/15	-7/5	-3/5	-1	0	3
x_3	0	0	1	0	4/5	-3/5	3/5	0	0	7
x_4	0	0	0	1	24/15	-1/5	1/5	0	0	9
x_2	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	10
s_2^+	0	0	0	0	-4/5	3/5	-3/5	-1	1	3
x_1	1	0	0	0	6/15	1/5	-1/5	0	0	11

Como a linha da FO não tem valores positivos estamos perante a SO.

Logo, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+)^* = (11, 10, 7, 9, 0, 0, 0, 0, 3)$

■ Análise da solução:

- ▶ A solução obtida consiste em produzir 11 unidades de P1 e 10 unidades de P2.
- ▶ Como $Z^* > 0$, podemos concluir que houve pelo menos uma meta não atingida.
 - O lucro obtido é de 75 u.m., pelo que a meta do CEO A foi atingida na igualdade ($s_1^- = s_1^+ = 0$).
 - Foram gastas 53 h.m. na Secção S1, pelo que a meta da CEO B não foi atingida tendo sido gastas mais 3 h.m. do que o limite estabelecido ($s_2^+ = 3$).

Nota: É expectável que a meta atingida tenha sido a do CEO A, uma vez que era essa a meta que tinha mais peso.

Introdução

Formulação em Programação por Metas

Metas Não Hierarquizadas

Metas Hierarquizadas

Metas Hierarquizadas

O decisor ordena as metas do problema de acordo com as suas prioridades. Dado um problema com r metas, estas podem ser escritas da seguinte forma:

Prioridade Máxima

Minimizar ~~$P_1, \dots, P_1$~~ G_1

$\vdots$

Prioridade Mínima

Minimizar ~~$P_1, \dots, P_r$~~ G_r

■ Onde ~~G_i~~ G_i , com $i \in \{1, \dots, r\}$, representa uma função das variáveis de desvio associadas à meta i .

Como resolver um problema com metas hierarquizadas?

Ideia Geral:

Otimizando os objetivos (**únicos**) por ordem de prioridade e adicionar restrições ao problema de forma a que as soluções obtidas para os objetivos com maiores prioridades não piorem.

- Este método é chamado de método lexicográfico.

Método de resolução

1: Identificar as metas do problema e ordená-las por ordem de prioridade:

$$P_1 = p_1 > P_2 = p_2 > \dots > P_r = p_r.$$
$$G_1 > G_2 > \dots > G_r$$

2: Fazer $i = 1$.

3: **for all** $i \in \{1, \dots, r\}$ **do**

4: Resolver o problema que minimiza a meta G_1 e obter p_i^* , o valor ótimo da função das variáveis de desvio da meta p_i . O seu valor ótimo g_i^*

5: Adicionar a restrição $\cancel{p_i} \leq p_i^*$ ao conjunto de restrições do problema.

6: Fazer $i = i + 1$. $G_i \leq g_i^*$

7: **end for**

Exemplo

Exemplo (Adaptado de Mourão et al.):

Na Fábrica PMat são produzidos dois produtos, P1 e P2, em duas Secções S1 e S2. Cada secção tem uma capacidade semanal igual a 60 h.m. e 40 h.h., respetivamente. A produção de uma unidade de P1 necessita de 3 h.m. em S1 e 1 h.h. em S2, e tem uma margem de lucro de 5 u.m.. Para a produção de uma unidade de P2 são necessárias 2 h.m. em S1 e 2 h.h. em S2, e tem a margem de lucro de 2 u.m.. Além disso, devem ser produzidas pelo menos 10 unidades de P2.

Os CEOs da PMat têm ^{muitos} ~~objetivos~~ ^{objetivos} distintos. O CEO A pretende ter um lucro mínimo de 75 u.m., enquanto a CEO B pretende que as h.m. semanais gastas na Secção S1 sejam no máximo 50 h.m., para poupar as máquinas.

Formule o problema da Fábrica PMat em programação por metas e resolva-o considerando que a meta da CEO B tem mais prioridade que a do CEO A.

Exemplo

■ Variáveis de decisão:

x_i - quantidade do produto P_i a produzir semanalmente, $i \in \{1, 2\}$

■ Metas a atingir:

$5x_1 + 2x_2 \geq 75$ (lucro mínimo de 75 u.m.) $\implies$ Prioridade 2

$3x_1 + 2x_2 \leq 50$ (no máximo 50 h.m. gastas em S1) $\implies$ Prioridade 1

■ Formulação em programação em metas hierarquizadas:

$$\min Z = P_1(s_2^+) + P_2(s_1^-)$$

$$\text{s.a : } 3x_1 + 2x_2 \leq 60$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_2 \geq 10$$

$$5x_1 + 2x_2 + s_1^- - s_1^+ = 75$$

$$3x_1 + 2x_2 + s_2^- - s_2^+ = 50$$

$$x_1, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+ \geq 0$$

Exemplo - Resolução gráfica

Problema que minimiza
meta P_1 :

$$\min Z = s_2^+$$

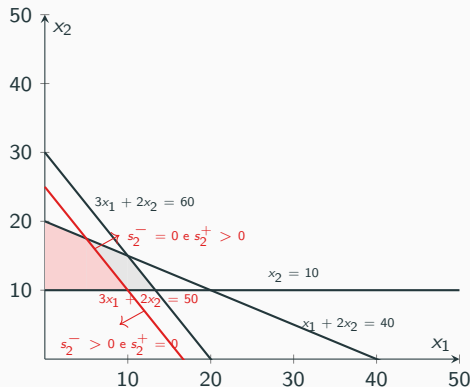
$$s.a : 3x_1 + 2x_2 \leq 60$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_2 \geq 10$$

$$3x_1 + 2x_2 + s_2^- - s_2^+ = 50$$

$$x_1, s_2^-, s_2^+ \geq 0$$



Existem várias soluções que atingem a meta de prioridade $P_1 \Rightarrow$ todas as soluções que estão na região vermelha têm valor $s_2^+ = 0$.

■ Adicionar a restrição $3x_1 + 2x_2 \leq 50$.

► A RA do próximo problema é a assinalada a vermelho.

Exemplo - Resolução gráfica

Problema que minimiza
meta P_2 :

$$\min Z = s_1^-$$

$$\text{s.a.} : 3x_1 + 2x_2 \leq 60$$

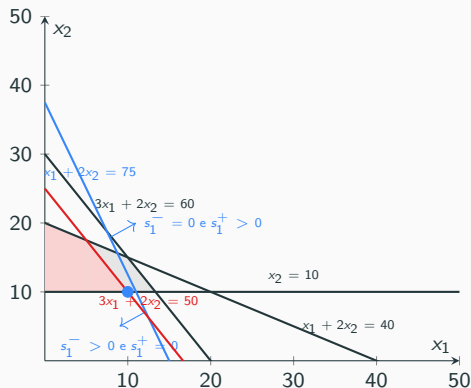
$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_2 \geq 10$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 50$$

$$5x_1 + 2x_2 + s_1^- - s_1^+ = 75$$

$$x_1, s_1^-, s_1^+ \geq 0$$



A melhor solução é: $(x_1, x_2, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+) = (10, 10, 5, 0, 0, 0)$.

Exemplo - Resolução gráfica

A solução consiste em produzir 10 unidades de P_1 e 10 unidades de P_2 semanalmente.

- ▶ A meta de Prioridade 1 é atingida, pois $s_2^+ = 0$.
 - O número de h.m. gastas em S1 é de 50, o que é inferior ou igual ao valor máximo da meta das 50 h.m..
- ▶ A meta de Prioridade 2 não é atingida, pois $s_1^- = 5$.
 - O lucro é de 70 u.m., o que fica aquém do valor mínimo exigido que é de 75 u.m..

Nota: É expectável que as metas de prioridade mais alta sejam as que são atingidas.

Exemplo - Resolução método do Simplex

■ **Passo 1:** Escrever o primeiro problema na forma aumentada (todas as restrições = e todas as variáveis ≥ 0):

$$\begin{aligned}\min Z &= s_2^+ \\ \text{s.a : } 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 60 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 40 \\ x_2 - x_5 &= 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + s_2^- - s_2^+ &= 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, s_2^-, s_2^+ &\geq 0\end{aligned}$$

■ **Passo 2:** Determinar uma solução básica admissível (SBA) inicial:

Considere-se $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, s_2^-, s_2^+) = (0, 10, 40, 20, 0, 30, 0)$.

Exemplo - Resolução método do Simplex

■ **Passo 3:** Escrever o quadro do simplex associado à SBA inicial e encontrar a SO:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_2^-	s_2^+	TI
Z	0	0	0	0	0	0	-1	0
x_3	3	0	1	0	2	0	0	40
x_4	1	0	0	1	2	0	0	20
x_2	0	1	0	0	-1	0	0	10
s_2^-	3	0	0	0	2	1	-1	30

Como a linha da FO não tem valores positivos estamos perante a SO.

Exemplo - Resolução método do Simplex

■ **Passo 4:** Adicionar a restrição $FO \leq Z^*$:

$$s_2^+ \leq 0 \iff 3x_1 + 2x_5 + s_2^- - 30 \leq 0 \iff 3x_1 + 2x_5 + s_2^- \leq 30 \implies 3x_1 + 2x_5 + x_6 = 30$$

e escrever o segundo problema na forma aumentada em função da base ótima do primeiro problema:

$$\min Z = s_1^-$$

$$s.a : 3x_1 + x_3 + 2x_5 = 40$$

$$x_1 + x_4 + 2x_5 = 20$$

$$x_2 - x_5 = 10$$

$$3x_1 + 2x_5 + x_6 = 30$$

$$5x_1 + 2x_2 + s_1^- - s_1^+ = 75$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, s_1^-, s_1^+ \geq 0$$

■ **Passo 5:** Escrever a FO e a novas restrição em função das VNB. VB: x_3, x_4, x_2, x_6 e s_1^- .

Restrição 5: $5x_1 + 2x_2 + s_1^- - s_1^+ = 75 \iff 5x_1 + 2(10 + x_5) + s_1^- - s_1^+ = 75 \iff$
 $5x_1 + 2x_5 + s_1^- - s_1^+ = 55$

FO: $Z_2 = s_1^- \iff Z_2 = 55 + s_1^+ - 5x_1 - 2x_2 \iff Z_2 + 5x_1 + 2x_5 - s_1^+ = 55$

Exemplo - Resolução método do Simplex

■ **Passo 6:** Escrever o quadro do Simplex associado à SBA corrente e encontrar a SO:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1^-	s_1^+	TI
Z	5	2	0	0	0	0	0	-1	55
x_3	3	0	1	0	2	0	0	0	40
x_4	1	0	0	1	2	0	0	0	20
x_2	0	1	0	0	-1	0	0	0	10
x_6	3	0	0	0	2	1	0	0	30
s_1^-	5	2	0	0	0	0	1	-1	55

$$CE = \max\{5, 2\} = 5 \rightarrow x_1 \text{ passa a VB}$$

$$CS = \min\left\{\frac{40}{3}, \frac{20}{1}, \frac{30}{3}, \frac{55}{5}\right\} = 10 \rightarrow x_6 \text{ passa a VNB}$$

Exemplo - Resolução método do Simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1^-	s_1^+	TI
Z	0	2	0	0	$-4/3$	$-5/3$	0	-1	5
x_3	0	0	1	0	0	-1	0	0	10
x_4	0	0	0	1	$4/3$	$-1/3$	0	0	10
x_2	0	1	0	0	-1	0	0	0	10
x_1	1	0	0	0	$2/3$	$1/3$	0	0	10
s_1^-	0	0	0	0	$-4/3$	$-5/3$	1	-1	5

Todos os coeficientes da linha da FO são $\leq 0 \implies$ estamos perante a SO.

- ▶ **Novo paradigma:** Determinamos uma solução de compromisso, em vez da solução ótima.
- ▶ Cada meta é transformada numa restrição que pode ser não satisfeita utilizando variáveis de desvio.
 - ★ As duas variáveis de desvio não podem ter valor positivo simultaneamente.
- ▶ Métodos de resolução:
 - Metas não hierarquizadas: os decisores atribuem pesos às metas.
 - Metas hierarquizadas: os decisores estabelecem uma ordem de prioridade entre as metas.



Mourão, M. C., Santiago Pinto, L., Simões, O., Valente, J., & Vaz Pato, M. (2019). *Investigação Operacional Exercícios e Aplicações*. Escolar Editora.



Taha, H. A. (2017). *Operations Research An Introduction*. Pearson Education Limited.