Análise Matemática IV

LISTA 6

EDO's lineares com coeficientes variáveis, Equações às diferenças

(1) Mostre que as seguintes sucessões de funções são linearmente independentes:

(a) $f_n(t) = e^{\lambda_n t}$, com $n \in \mathbb{N}$, $t \in I$ para um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, e $\lambda_n \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$.

(b) $f_n(t) = \begin{cases} \cos\left(\frac{n}{2}t\right), & n \text{ par} \\ \sin\left(\frac{n+1}{2}t\right), & n \text{ ímpar.} \end{cases}$

(2) Considere a EDO $t^2y'' - 5ty' + 5y = 0$ e as funções

$$y_1(t) = t, \quad y_2(t) = t^5, \quad y_3(t) = |t|^5.$$

(a) Verifique que as funções são soluções da EDO.

(b) Decida se as funções são linearmente independentes em $[-1, 1]$.

(c) Seja $t_0 = 1$. Calcule a matriz fundamental da EDO para $t \geq 1$.

(3) Dado $C \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, determine $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ tal que $e^B = C$,

(a) se C é invertível e diagonal,

(b) se C é invertível e diagonalizável.

(c) * se C é invertível. Sugestão: use a forma normal de Jordan e mostre que

$$\log(I + A) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i+1}}{i} A^i$$

se A é nilpotente de ordem k.

(4) Calcule as sucessões definidas pelas seguintes equações:

(a) $x_{n+2} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_{n+1}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

(b) $x_{n+2} = x_{n+1} + (-1)^n x_n$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

(c) $x_{n+1} = nx_n + 2^n$, $x_0 = 0$.

Determine o crescimento exponencial das sucessões anteriores, i.e. calcule $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |x_n|$.

(5) Seja A_n uma sucessão periódica de matrizes em $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, i.e. existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+N} = A_n$. Determine a solução da equação:

$$x_{n+1} = A_n x_n.$$