Análise Matemática IV

LISTA 8

Equações não lineares. Análise de Fourier

(1) **Modelo de predador-presa**. Sejam $x(t) \geq 0$ a população de presas no instante de tempo t e $y(t) \geq 0$ a população de predadores. Vamos estudar a dinâmica entre estas duas espécies considerando um modelo determinado pelas seguintes hipóteses:

- Na ausência de predadores, o número de presas cresce exponencialmente pois têm à sua disposição recursos ilimitados: $x(t) = e^{at}x_0$, onde x_0 é a população inicial e $a > 0$ é a taxa de crescimento da espécie. Ou seja, $x' = ax$.
- O número de contactos entre predadores e presas é proporcional ao tamanho das suas populações, e $b > 0$ é a taxa de captura de presas.
- Os predadores morrem a uma taxa $c > 0$, tal que $y(t) = e^{-ct}y_0$ é o decréscimo de população provocado pela sua morte natural.
- As capturas têm um efeito de crescimento da população de predadores proporcional ao número de presas e predadores com taxa $d > 0$.

O modelo é então dado pela EDO:

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy. \end{cases}$$

(a) Encontre os pontos de equilíbrio e determine as suas estabilidades, se possível.

(b) Mostre que qualquer solução pertence a uma curva definida pela equação:

$$f(y)\, g(x) = c, \tag{1}$$

para uma constante c, onde $f(y) = y^a e^{-by}$ e $g(x) = x^c e^{-dx}$.

(c) Estude as funções f e g, desenhe o gráfico de $F(x, y) = f(y)\, g(x)$. Mostre que a equação (1) define curvas fechadas.

(d) Esboce o retrato de fases.

(2) **Modelo epidemiológico SIR** Queremos agora estudar o que acontece quando um novo vírus é introduzido numa população sem qualquer imunização.

Seja $S(t) \geq 0$ o número de pessoas susceptíveis à doença (podem ser infectados) no instante de tempo t, $I(t) \geq 0$ o número de infectados capazes de infectar outros e $R(t) \geq 0$ o número de recuperados. Assumimos que $S(t) + I(t) + R(t)$ é constante.

Vamos considerar as hipóteses:

- Não há reinfecção, a imunidade é permanente.
- O período de incubação é pequeno.
- O número de infecções é proporcional ao número de infectados e de susceptíveis. A taxa de infecção é $r > 0$.
- A taxa de recuperação é $\gamma > 0$.

O modelo é então dado por

$$\begin{cases} S' = -rSI \\ I' = rSI - \gamma I \\ R' = \gamma I. \end{cases}$$

Note que as primeiras duas equações são independentes de R, pelo que a terceira pode ser estudada à parte. Tome então o modelo das duas primeiras equações apenas.

(a) Encontre os pontos de equilíbrio e determine as suas estabilidades, se possível.

(b) Mostre que qualquer solução pertence a uma curva definida pela equação:

$$I = -S + \frac{\gamma}{r} \log S + c,$$

para uma constante c.

(c) Esboce o retrato de fases.

(3) Escreva a série de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 0, & x \in [0, \frac{1}{2}[\cup \{1\}, \end{cases}$$

e aproveite para calcular a soma da série de Leibniz

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

usando $f(\frac{1}{4}) = 0$.

(4) Mostre que se $f \in L^1([\alpha, \beta])$, $\beta = -\alpha > 0$, e é

(a) par, então

$$S_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(2\pi n \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}\right)$$

com

$$a_0 = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\cos\left(2\pi n\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right)\,dx, \quad n\in\mathbb{N};$$

(b) ímpar, então

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(2\pi n\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$$

com

$$b_n = \frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\sin\left(2\pi n\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right)\,dx, \quad n\in\mathbb{N}.$$

(5) Calcule a série de Fourier das seguintes funções f periódicas e decida se $f = S_f$.

(a)

$$f(x) = \begin{cases} L-x, & x\in[0,L] \\ L+x, & x\in[-L,0] \end{cases}$$

com período $2L$.

(b) $f(x) = x^2$ para $x\in[-L,L]$ com período $2L$. Mostre também que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(6) Seja

$$g(x) = \begin{cases} x, & x\in[0,\pi[\\ 0, & x=\pi. \end{cases}$$

(a) Escreva g como uma série de senos.

(b) Escreva g como uma série de cossenos.