Análise Matemática IV

LISTA 9

Problemas de valor inicial e fronteira, EDPs

(1) Encontre as soluções de $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$.

(2) Seja $\sigma > 0$ uma constante. Encontre a solução $u(x,t)$ para os seguintes problemas:

(a)

$$\begin{cases} u_{xx} = \sigma u_t, & \text{em }]0,1[\times\mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,1], \end{cases}$$

com $f(x) = \frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|$.

(b)

$$\begin{cases} u_{xx} = \sigma u_t, & \text{em }]0,1[\times\mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 1, & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,1], \end{cases}$$

com $f(x) = x^2$.

(c)

$$\begin{cases} u_{xx} = \sigma u_t, & \text{em }]0,1[\times\mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 1, & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,1], \end{cases}$$

com $f(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{1}{2} \\ 1, & x > \frac{1}{2}. \end{cases}$

(d)

$$\begin{cases} u_{xx} = \sigma u_t, & \text{em }]0,1[\times\mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = \alpha, & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(1,t) = \beta, & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,1], \end{cases}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, f é contínua e diferenciável por troços, $f(0) = \alpha$ e $f(1) = \beta$.

Sugestão: Considere a função $w(x,t) = u(x,t) - \alpha - (\beta - \alpha)x$, e escreva o problema para w.

(e)

$$\begin{cases} \sigma u_{xx} = u_{tt}, & \text{em }]0,1[\times\mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,1] \end{cases}$$

com $f(x) = \frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|$.