NOTAS DE ANÁLISE COMPLEXA

JOÃO LOPES DIAS

Conteúdo

Date: 16 de abril de 2023.

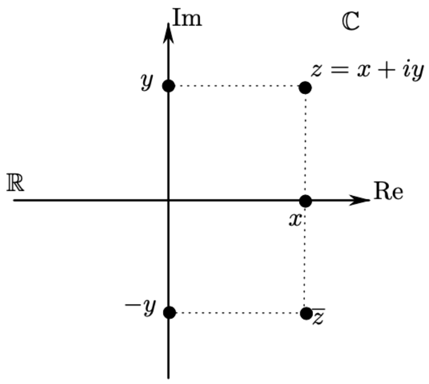

FIGURA 1. O plano complexo

1. O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos

$$(x+iy).(x'+iy') = (xx'-yy') + i(xy'+x'y), \qquad x,y \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

O **complexo conjugado** $\overline{z}$ de um número complexo $z = x+iy$ é definido como

$$\overline{z} = \overline{x+iy} = x - iy. \tag{1.2}$$

Assim, a parte real de z é

$$\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2} = x \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i} = y$$

a parte imaginária. Na Figura 1 encontra-se esquematizado o plano complexo.

Exercício 1. *Calcule $z\overline{z}$.*

Observação 1. Note que

- $i^2 = (0+i)(0+i) = -1 + i0 = -1$
- se $z = z'$, então $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z'$ e $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z'$
- $\overline{z} = z$ sse $z \in \mathbb{R}$
- $\overline{\overline{z}} = z$

Exercício 2. *Prove as seguintes propriedades da conjugação:*

(1) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
(2) $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

1.1. **Estruturas métrica e topológica de $\mathbb{C}$.** O **valor absoluto** (ou módulo ou norma) de $z = x + iy \in \mathbb{C}$ indica a distância à origem

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.3}$$

como em $\mathbb{R}^2$. A **distância** entre dois pontos é então

$$d(z, z') = |z - z'|. \tag{1.4}$$

Estas norma e distância em $\mathbb{C}$ coincidem com as de $\mathbb{R}^2$.

Observação 2. Note que $|z|^2 \neq z^2$. De facto, $|z|^2$ é um número real para qualquer $z = x + iy \in \mathbb{C}$, enquanto $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ só é real se z é real ou puro imaginário.

Exercício 3. *Mostre que*

(1) $|zz'| = |z|\,|z'|$
(2) $|\overline{z}| = |z|$
(3) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ *e* $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$
(4) $|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{z'})$
(5) $|z - z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{z'})$
(6) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ *(desigualdade triangular)*
(7) $|z - z'| \geq \big|\, |z| - |z'| \,\big|$
(8) *$|\sum_{i=1}^n z_i z_i'| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i'|^2}$ *(desigualdade de Cauchy-Schwarz)*

Consideramos a estrutura topológica de $\mathbb{C}$ (conjuntos abertos, fechados, interior, fronteira, exterior, fecho, conexo, compacto, etc.) a mesma de $\mathbb{R}^2$. Isto é, tendo em conta o isomorfismo[1] entre estes dois conjuntos que associa $z = x+iy$ ao par (x, y), temos uma correspondência biunívoca entre abertos de $\mathbb{C}$ e de $\mathbb{R}^2$. Em particular, um **aberto** em $\mathbb{C}$ é um conjunto que contém uma bola (disco)

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| < r\} \tag{1.5}$$

para cada um dos seus pontos z_0.

Um conjunto não vazio $A \subset \mathbb{C}$ é **desconexo** se existirem $A_1 \neq \emptyset$ e $A_2 \neq \emptyset$ abertos tais que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e $A \subset A_1 \cup A_2$. Ou seja, tem mais do que uma

[1] Um isomorfismo entre dois espaços A e B é uma bijecção $f \colon A \to B$ que preserva alguma propriedade dos espaços. Por exemplo, entre espaços vectoriais queremos que a linearidade sejam preservada (f e f^{-1} são lineares); entre corpos que se se preservem as operações de soma e produto (f e f^{-1} são homomorfismos); entre espaços topológicos que se preservem as estruturas topológicas (f e f^{-1} são contínuos), etc. Os espaços A e B dizem-se assim isomorfos, e escreve-se $A \simeq B$.

componente disjunta. Diz-se **conexo** se não é desconexo, isto é, tem apenas uma componente disjunta.

Chama-se **região** em $\mathbb{C}$ a um aberto não vazio e conexo.

Proposição 1.1. *Seja $B \subset A \subset \mathbb{C}$ e $A \neq \emptyset$. Se A é conexo e $A \cap \partial B = \emptyset$, então $B = \emptyset$ ou $B = A$.*

Demonstração. Supondo que $B \neq \emptyset$ e $B \neq A$, temos que $A \cap B^c \neq \emptyset$. Se $A \cap \partial B = \emptyset$, então $A_1 = B$ e $A_2 = A \cap B^c$ são disjuntos, não vazios, abertos e a sua união cobre A. Ou seja, A é desconexo. □

1.2. **Propriedades algébricas.** A adição de complexos é claramente comutativa, associativa, $0 = 0 + i0$ é o elemento neutro, e para cada $z \in \mathbb{C}$ existe o seu simétrico $-z$ tal que $z + (-z) = 0$.

Exercício 4. *Mostre que:*

(1) *a multiplicação de complexos é associativa, comutativa e distributiva em relação à adição;*
(2) *o único elemento neutro da multiplicação é o 1;*
(3) *o único elemento absorvente da multiplicação é o 0;*
(4) *existe um único inverso z^{-1} para cada $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ dado por*

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Após resolver o exercício acima o teorema seguinte fica demonstrado.

Teorema 1.2. *$\mathbb{C}$ é um corpo.*

Observação 3.

- O quociente entre dois números complexos z e $z' \neq 0$ é $z/z' = z(z')^{-1}$.
- Como $\mathbb{C}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, não pode ser ordenado. Logo só teremos $z \leq z'$ se z e z' forem reais.
- O conjunto $\mathbb{C}$ pode ser interpretado como um espaço vectorial de dimensão 1 (com base e.g. $\{1\}$) sobre os complexos (i.e. os escalares estão no corpo $\mathbb{C}$).

1.3. **Interpretação geométrica de $\mathbb{C}$.**

1.3.1. *Representação polar.*

- O módulo (ou norma ou valor absoluto) de $z = x + iy$ é

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.6}$$

- O **argumento** de $z = x + iy$ é dado pela função $\arg\colon \mathbb{C} \to]-\pi, \pi]$ com

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0 \text{ e } y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \text{ e } y > 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x}, & x < 0 \text{ e } y \geq 0 \\ -\pi + \arctan \frac{y}{x}, & x < 0 \text{ e } y < 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \text{ e } y < 0 \\ \arctan \frac{y}{x}, & x > 0 \text{ e } y < 0 \\ 0, & x = y = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

A função $\arctan\colon \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ é a inversa da função tangente restringida a $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Podemos assim escrever qualquer número complexo na representação polar na forma

$$z = |z| \mathrm{e}^{i \arg z}. \tag{1.8}$$

onde $\mathrm{e}^{i \arg z} = \cos(\arg z) + i \sin(\arg z)$.

Exercício 5. *Mostre que* $\arg(zz') = \arg z + \arg z' + 2\pi n$ *com* $n \in \mathbb{Z}$ *tal que* $\arg(zz') \in]-\pi, \pi]$.

Fixemos um complexo $z' = x' + iy'$ qualquer. A multiplicação $z \mapsto z'z$ pode então ser interpretada como a composição entre uma rotação $\arg z \mapsto \arg z + \arg z'$, e uma homotetia[2] $z \mapsto |z'|\, z$. Isto é,

$$zz' = |z|\, |z'| \mathrm{e}^{i(\arg z + \arg z')}. \tag{1.9}$$

Vista em $\mathbb{R}^2$ a operação de multiplicação é dada pela transformação linear com a matriz na base canónica:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

Esta pode ser decomposta em duas outras transformações lineares: uma rotação por $\arg(z')$ dada pela matriz

$$R_{\arg z'} = \begin{bmatrix} \cos(\arg z') & -\sin(\arg z') \\ \sin(\arg z') & \cos(\arg z') \end{bmatrix}, \tag{1.11}$$

e a homotetia com matriz:

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.12}$$

Exercício 6. *Mostre que*

$$\begin{bmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{bmatrix} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} R_{\arg z'}$$

1.3.2. **Representação esférica.* Para muitas aplicações é conveniente extender $\mathbb{C}$ introduzindo um ponto no infinito. Assim, definimos o plano complexo aumentado:

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}. \tag{1.13}$$

Assumimos que $z + \infty = \infty$ para $z \in \mathbb{C}$, e $z\infty = \infty$ se $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Contudo, não definimos $\infty + \infty$ nem 0∞.

Falta extender a noção de vizinhança do ponto ∞. Para isso definimos a bola (disco) em redor de ∞ com raio r da seguinte forma:

$$D_r(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| > r\} \cup \{\infty\}. \tag{1.14}$$

Um conjunto em $\overline{\mathbb{C}}$ é aberto se contém um disco centrado em cada um dos seus pontos. Uma consequência imediata desta definição é que abertos em $\mathbb{C}$ são abertos em $\overline{\mathbb{C}}$.

Vamos agora ver que $\overline{\mathbb{C}}$ pode ser interpretado como a superfície esférica

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}. \tag{1.15}$$

[2] Transformação que preserva a direcção.

Primeiro definimos a transformação $p\colon S^2 \to \overline{\mathbb{C}}$, conhecida como projecção estereográfica,

$$p(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} \frac{x_1+ix_2}{1-x_3}, & (x_1,x_2,x_3) \in S^2 - \{(0,0,1)\} \\ \infty, & (x_1,x_2,x_3) = (0,0,1). \end{cases} \tag{1.16}$$

Exercício 7. **Mostre que a projecção estereográfica é bijectiva.*

Assim os espaços acima são de certa forma semelhantes. Devido a este facto, designa-se usualmente $\overline{\mathbb{C}}$ por esfera de Riemann. Não há contudo uma expressão simples para a soma e o produto na representação esférica.

1.4. **O espaço complexo multidimensional** $\mathbb{C}^d$**.** Paralemente à generalização de $\mathbb{R}$ para mais dimensões, também podemos definir o espaço $\mathbb{C}^d = \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$. Assim, um vector complexo $z \in \mathbb{C}^d$ pode ser escrito como

$$z = (x_1 + iy_1, \dots, x_d + iy_d) = (x_1, \dots, x_d) + i(y_1, \dots, y_d).$$

2. Funções complexas elementares

2.1. **Função exponencial.** A função exponencial real $\exp\colon \mathbb{R} \to]0,+\infty[$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$, é definida por qualquer das seguintes formas equivalentes:

- $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$,
- a única solução da EDO $f' = f$ com $f(0) = 1$,
- a inversa da função $x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt$, $x > 0$.

Queremos generalizar esta função para o plano complexo. Assim, a exponencial complexa é definida como

$$\begin{aligned} &\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ &\exp(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z} \mathrm{e}^{i \operatorname{Im} z}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Observação 4.

- Se $z \in \mathbb{R}$, então $\operatorname{Im} z = 0$ e recuperamos a função exponencial real.
- Para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ temos que $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x$ e $\arg \mathrm{e}^z = y$.

Exercício 8. *Mostre que, para* $z, z' \in \mathbb{C}$*,*

(1) $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{z'}$
(2) $\mathrm{e}^z \neq 0$
(3) $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'}$ *sse* $z = z' + 2\pi i n$ *com* $n \in \mathbb{Z}$
(4) $\exp$ *é uma função periódica*[3]*. Determine o período minimal* [4]*.*
(5) $\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$

Exercício 9.

(1) *Calcule* $\mathrm{e}^{i\pi/2}$, $\mathrm{e}^{i\pi}$, $\mathrm{e}^{i3\pi/2}$, $\mathrm{e}^{i2\pi}$,$|\mathrm{e}^{iy}|$.
(2) *Quais as soluções de* $\mathrm{e}^z = 1$*?*

Na Figura 2 esquematiza-se a transformação de rectas verticais e horizontais em $\mathbb{C}$ pela função exponencial.

[3] f é uma função periódica com período $w \in \mathbb{C} - \{0\}$ (ou w-periódica) se $f(z+w) = f(z)$, para qualquer z no domínio de f.

[4] I.e. o período $T \in \mathbb{C}$ tal que qualquer outro período $P \in \mathbb{C}$ é da forma $P = nT$ com $n \in \mathbb{Z}$.

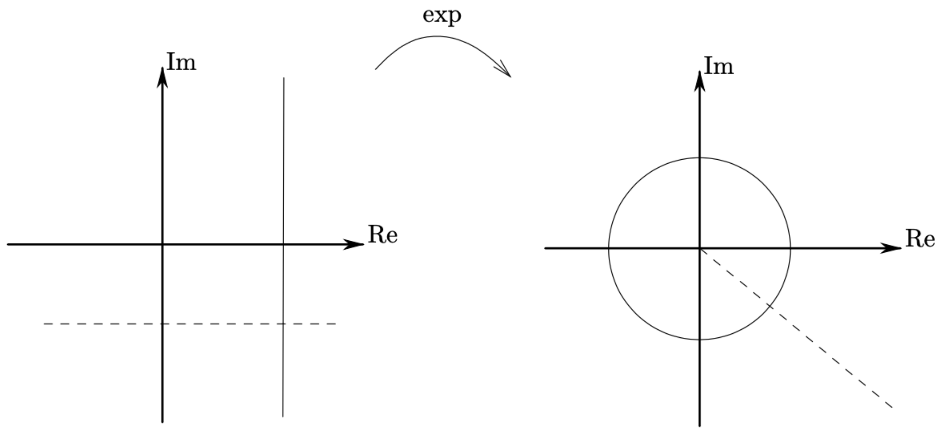

FIGURA 2. A acção da exponencial sobre rectas verticais e horizontais

2.2. **Função logaritmo.** A função logaritmo real $\log\colon]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ é definida como a inversa da exponencial: $\log \mathrm{e}^x = x = \mathrm{e}^{\log x}$. Para generalizarmos esta função a $\mathbb{C}$ teremos que ter em atenção que a exponencial é periódica, logo não tem uma única inversa. Restringimos assim a exponencial à faixa

$$A = \{z\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z \in]-\pi,\pi]\}$$

onde é injectiva. Além disso, como a exponencial nunca toma o valor zero, o domínio da função logaritmo não poderá conter zero. Porém, valores reais negativos estarão incluídos no domínio do logaritmo complexo, contrastando com o caso real. Assim, definimos

$$\begin{aligned}\log\colon \mathbb{C}-\{0\} &\to \mathbb{C}\\ \log(z) &= \log|z| + i\arg z,\end{aligned} \tag{2.2}$$

com $\arg(z)\in]-\pi,\pi]$. Deste modo, se $z = x+iy\in\mathbb{C}-\{0\}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\log z} &= \mathrm{e}^{\log|z|}\mathrm{e}^{i\arg z} = |z|\mathrm{e}^{i\arg z} = z\\ \log \mathrm{e}^z &= \log|\mathrm{e}^z| + i\arg \mathrm{e}^z = \log \mathrm{e}^x + iy = z.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Finalmente, o contra-domínio é $\log(\mathbb{C}-\{0\}) = A$.

Observação 5. Poder-se-ia definir outras funções logaritmo, bastando para isso considerar a função arg com valores em $[2\pi n, 2\pi(n+1)[$, $n\in\mathbb{Z}$, ou outros intervalos de comprimento 2π.

Exercício 10. *Prove que se* $z, z'\in\mathbb{C}-\{0\}$, *então* $\log(zz') = \log z + \log z' + 2\pi i n$ *com* $n\in\mathbb{Z}$ *tal que* $\operatorname{Im}\log(zz')\in]-\pi,\pi]$.

2.3. **Funções trigonométricas.** As funções trignométricas reais de variável real, o seno $\sin\colon\mathbb{R}\to[-1,1]$ e o cosseno $\cos\colon\mathbb{R}\to[-1,1]$ podem ser definidas das seguintes formas:

(1) sendo θ o ângulo (no sentido anti-horário) entre o semi-eixo positivo das abcissas e o segmento de recta com extremos na origem e no

ponto (x,y) de $\mathbb{R}^2$,

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

(2)

$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!}, \tag{2.4}$$

(3)

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}, \qquad \cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}, \tag{2.5}$$

(4) a única solução da EDO $f'' + f = 0$
- com $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$ é a função seno,
- com $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$ é a função cosseno.

Queremos extender estas funções a $\mathbb{C}$. Para isso usamos a definição 3. Ou seja,

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2.6}$$

Exercício 11. *Mostre que*

(1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
(2) $\sin(z+z') = \sin z\, \cos z' + \cos z\, \sin z'$
(3) $\cos(z+z') = \cos z\, \cos z' - \sin z\, \sin z'$

Exercício 12. *Determine se* sin *e* cos *são periódicas e os seus períodos minimais.*

2.4. **Potências complexas.** Dado $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ e $w \in \mathbb{C}$, queremos definir a potência complexa de um número complexo como

$$z^w = \mathrm{e}^{w \log z} \tag{2.7}$$

de forma a generalizarmos a potência de reais. Logo, temos a seguinte propriedade: $(z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w$. Porém, repare que, como $\mathrm{e}^{2\pi i n} = 1$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$,

$$z^w = (\mathrm{e}^{\log z + 2\pi i n})^w = \mathrm{e}^{w \log z} \mathrm{e}^{2\pi i n w}. \tag{2.8}$$

Logo a potência de números complexos não pode ser definida univocamente para qualquer w.

Exercício 13. *Escreva os valores possíveis para i^i.*

Proposição 2.1.
- *Se $w = p/q \in \mathbb{Q}$ onde p e q são inteiros primos entre si, então $\#\{\mathrm{e}^{2\pi i n w} \colon n \in \mathbb{Z}\} = q$,*
- *Se $w \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}$, então $\#\{\mathrm{e}^{2\pi i n w} \colon n \in \mathbb{Z}\} = \infty$.*

Demonstração. Para simplificar escrevemos $A_w = \{\mathrm{e}^{2\pi i n w} \colon n \in \mathbb{Z}\}$. Comecemos com o caso $w = p/q \in \mathbb{Q}$. Cada $n \in \mathbb{Z}$ pode ser escrito na forma $n = qm + r$ onde $m \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$. Então

$$\mathrm{e}^{2\pi i n p/q} = \mathrm{e}^{2\pi i m} \mathrm{e}^{2\pi i r p/q} = \mathrm{e}^{2\pi i r p/q}.$$

Como r pode assumir q valores, temos que $\#A_w = q$.

Para provar a segunda afirmação, procuramos uma contradição ao assumirmos que $\#A_w$ é finito para $w \notin \mathbb{Q}$. Assim, existem dois inteiros $n \neq m$ tais que

$$\mathrm{e}^{2\pi i n w} = \mathrm{e}^{2\pi i m w}.$$

Ora, isto implica que $2\pi i n w = 2\pi i m w + 2\pi i k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Daqui resulta que $w = k/(n-m) \in \mathbb{Q}$, o que contradiz a hipótese. $\square$

Observação 6. As funções polinomiais complexas na forma

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n \tag{2.9}$$

estão bem definidas visto que cada termo tem uma potência com expoente inteiro (racional com $q = 1$).

Exercício 14. *Determine todas as soluções de $z^p = 1$ com $p \in \mathbb{Z}$.*

2.5. **Polinómios e funções racionais.** De acordo com o teorema fundamental da álgebra um polinómio de grau $N \in \mathbb{N}$ do tipo

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n z^n,$$

com $c_n \in \mathbb{C}$ e $c_N \neq 0$, pode ser decomposto num produto

$$P(z) = c_N \prod_{n=1}^{N} (z - z_i),$$

onde $P(z_i) = 0$ define os zeros de P. Os zeros não são necessariamente distintos. A ordem de cada zero é assim o número de repetições do mesmo.

Uma **função racional** R é então definida como o quociente entre dois polinómios P e Q:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Assumimos que P não é divisível por Q, i.e. não têm zeros comuns. Assim definimos os **pólos** de ordem r de R como os zeros de ordem r de Q.

2.6. **Limites e continuidade.** Como a estrutura topológica de $\mathbb{C}$ coincide com a de $\mathbb{R}^2$ (ver Secção 1.1), as noções de limite e de continuidade de funções também coincidem. Ou seja, $f\colon A \to \mathbb{C}$ é contínua em z_0 se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que com $z \in A$ e $|z - z_0| < \delta$ temos que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. O que significa que $f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)$. Segue então que a soma, produto, quociente (excepto onde o denominador é $= 0$) e composição de funções contínuas são funções contínuas. Em particular, os polinómios e as funções racionais são contínuos nos seus domínios ($\mathbb{C}$ no caso dos polinómios e os pontos onde o denominador não se anula no caso das funções racionais).

Observação 7. A função $\arg\colon \mathbb{C} \to]-\pi, \pi]$ é descontínua nos pontos $\mathbb{R}_0^-$.

2.7. ***Esfera de Riemann.** Retomamos o estudo da esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ iniciado na Secção 1.3.2.

Exercício 15. **Prove que a projecção estereográfica p é contínua.*

Como funções contínuas transformam conjuntos compactos em compactos, e S^2 é compacto em $\mathbb{R}^3$, deduzimos que $\overline{\mathbb{C}}$ é também compacto. Este facto é-nos de grande utilidade porque sabemos que sucessões em conjuntos compactos têem sempre uma subsucessão convergente (podendo ser para $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$).

Exercício 16.

(1) **Seja $J\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$,*

$$J(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \in \mathbb{C} - \{0\} \\ \infty, & z = 0 \\ 0, & z = \infty. \end{cases} \tag{2.10}$$

(a) *Decida se J é contínua em $\overline{\mathbb{C}}$.*
(b) *Diga se J é um homeomorfismo*[5].

(2) **Considere a função $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$,*

$$f(z) = \begin{cases} P(z), & z \in \mathbb{C} \\ \infty, & z = \infty, \end{cases} \tag{2.11}$$

onde P é um polinómio.
(a) *Mostre que f é contínua em ∞.*
(b) *Mostre que f é um homeomorfismo sse o grau de P é 1.*

(3) **Considere a distância ρ em $\overline{\mathbb{C}}$:*

$$\begin{aligned} \rho(z,z') &= \|p^{-1}(z) - p^{-1}(z')\| \\ &= \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2} \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde $(x_1,x_2,x_3), (x_1',x_2',x_3') \in S^2$, e $z = p(x_1,x_2,x_3)$ e $z' = p(x_1',x_2',x_3')$ estão em $\overline{\mathbb{C}}$. Mostre que:
(a) *$z_n \to z$ em $\mathbb{C}$ sse $\rho(z_n, z) \to 0$*
(b) *$z_n \to \infty$ sse $\rho(z_n, \infty) \to 0$*
(c) *Se $ad - bc \neq 0$, então*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

é contínua em ∞.

3. Diferenciabilidade de funções complexas

3.1. **Definição de derivada.** Uma função $f\colon A \to \mathbb{C}$ é **diferenciável** em z_0 num aberto $A \subset \mathbb{C}$, se existe em $\mathbb{C}$ a derivada dada por

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{3.1}$$

[5]Um homeomorfismo f é uma função injectiva contínua com inversa também contínua.

A função f diz-se **analítica** (ou holomorfa) em A se existe derivada em todos os pontos de A. Ser analítica em z_0 significa que é analítica numa vizinhança de z_0. Uma função diz-se **inteira** se é analítica em $\mathbb{C}$.

Outras notações habitualmente utilizadas para a derivada são:

$$f'(z_0) = Df(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = d_{z_0}f.$$

Exemplo 1. (1) $f(z) = z$ é inteira pois para qualquer $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1.$$

(2) $f(z) = \overline{z}$ não é diferenciável em qualquer ponto pois escrevendo $z = x + iy$ e $z_0 = x_0 + iy_0$ temos limites direccionais diferentes:

$$\lim_{x\to x_0, y=y_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{y\to y_0, x=x_0} \frac{-i(y - y_0)}{i(y - y_0)} = -1.$$

Proposição 3.1. *Seja $A \subset \mathbb{C}$, aberto. Se f e g são funções analíticas em A, então:*

1. *$af + bg$ é analítica em A com derivada $af' + bg'$, onde $a, b \in \mathbb{C}$.*
2. *fg é analítica em A com derivada $f'g + fg'$.*

Demonstração. Basta usar a definição de derivada. □

Proposição 3.2. *Qualquer polinómio complexo é uma função inteira. Uma função racional é analítica em todos os pontos onde o denominador não se anula (em número finito).*

Demonstração. Usando o resultado anterior, generalizando-o para o quociente entre funções analíticas definidas onde o denominador é diferente de zero, provamos a proposição. □

Teorema 3.3 (Regra da cadeia)**.** *Sejam $A, B \subset \mathbb{C}$ abertos, $f\colon A \to \mathbb{C}$ e $g\colon B \to \mathbb{C}$ analíticas nos respectivos domínios e tais que $f(A) \subset B$. Então $g \circ f$ é analítica em A com derivada*

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)).f'(z), \qquad z \in A. \tag{3.2}$$

Demonstração. Queremos provar que existe

$$\lim_{z\to z_0} \frac{g \circ f(z) - g \circ f(z_0)}{z - z_0}$$

sabendo que existem as derivadas

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad e \quad g'(f(z_0)) = \lim_{w\to f(z_0)} \frac{g(w) - g(f(z_0))}{w - f(z_0)}.$$

Observe que

$$\frac{g \circ f(z) - g \circ f(z_0)}{z - z_0} = \left[h(f(z)) + g'(f(z_0))\right] \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

onde

$$h(w) = \begin{cases} \frac{g(w)-g(f(z_0))}{w-f(z_0)} - g'(f(z_0)), & w \neq f(z_0) \\ 0, & w = f(z_0). \end{cases}$$

Como h e f são contínuas, $\lim_{z\to z_0} h\circ f(z) = 0$. Logo,

$$\lim_{z\to z_0}\frac{g\circ f(z) - g\circ f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\left[h\circ f(z) + g'(f(z_0))\right]\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = g'(f(z_0)).f'(z_0).$$

□

Exercício 17. *Prove que se f é diferenciável em z_0, então é contínua.*

3.2. **Equações de Cauchy-Riemann.**

Observação 8. Recorde que uma função $g\colon D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ é diferenciável em $x_0\in D$ se existir uma transformação linear $Dg(x_0)$ que verifica

$$g(x) = g(x_0) + Dg(x_0)\,(x-x_0) + o(\|x-x_0\|). \tag{3.3}$$

A derivada de $g(x) = (g_1(x),\dots,g_m(x))$ com $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, é então essa transformação linear dada pela matriz $m\times n$:

$$Dg(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x)\end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Observação 9. Denotamos o isomorfismo linear entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ por $h\colon z\mapsto(\operatorname{Re} z,\operatorname{Im} z)$. Segue que $\|h(z)\| = |z|$ e $|h^{-1}(x,y)| = \|(x,y)\|$. Por outro lado, uma função f em $\mathbb{C}$ tem sempre uma função g correspondente em $\mathbb{R}^2$ dada por $g = h\circ f\circ h^{-1}\colon\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2$. Também temos que a multiplicação de complexos pode ser vista em $\mathbb{R}^2$ por:

$$h(z.z') = \begin{bmatrix} x & -y\\ y & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'\\ y'\end{bmatrix}.$$

Teorema 3.4. *Seja A um aberto de $\mathbb{C}$ e $f\colon A\to\mathbb{C}$. $f = u+iv$ é diferenciável em $z_0\in A$ sse $g = h\circ f\circ h^{-1} = (u,v)$ é diferenciável em $(x_0,y_0) = h(z_0)$ e verificam-se nesse ponto as* **equações de Cauchy-Riemann***:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.5}$$

Além disso,

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{3.6}$$

Demonstração. Comecemos por escrever $h(z) = (x,y)$ e

$$\begin{aligned}|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)| &= |h^{-1}\left(g\circ h(z) - g\circ h(z_0) - h(f'(z_0).(z-z_0))\right)| \\ &= \left\| g(x,y) - g(x_0,y_0) - \begin{bmatrix} a & -b\\ b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-x_0\\ y-y_0\end{bmatrix}\right\|,\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde definimos $f'(z_0) = a+ib$. Se f é diferenciável em z_0, o limite da expressão acima quando $z\to z_0$, ou equivalentemente quando $(x,y)\to(x_0,y_0)$, é zero. Ora, isto significa que g é também diferenciável com derivada

$$Dg(x_0,y_0) = \begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b\\ b & a\end{bmatrix}.$$

As equações de Cauchy-Riemann seguem por comparação das entradas das matrizes anteriores. Para obter a fórmula (3.6) basta notar que $f'(z_0) = a + ib = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$. □

Exercício 18. *Seja $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

(1) *Mostre que não existe limite quando $z \to 0$ de $f(z)/z$.*
(2) *Se $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$, prove que $u(x,0) = x$, $v(0,y) = y$, $u(0,y) = v(x,0) = 0$.*
(3) *Conclua que as equações de Cauchy-Riemann verificam-se em $(x,y) = (0,0)$, mas $f'(0)$ não existe. Este facto contradiz o teorema?*
(4) *Repita a alínea anterior com $f(z) = \sqrt{|xy|}$.*

Teorema 3.5. *Seja A um aberto de $\mathbb{C}$ e $f\colon A \to \mathbb{C}$. Se $g = (u,v)\colon h(A) \to \mathbb{R}^2$ tem derivada contínua e verificam-se as equações de Cauchy-Riemann (3.5) em $h(A)$, então f é analítica em A.*

Demonstração. Como u e v são diferenciáveis, usando o teorema do valor médio para $(x,y), (x_0,y_0) \in h(A)$, existe η entre (x,y) e (x_0,y_0) tal que

$$\begin{aligned} u(x,y) - u(x_0,y_0) &= \nabla u(\eta) \cdot (x - x_0, y - y_0) \\ v(x,y) - v(x_0,y_0) &= \nabla v(\eta) \cdot (x - x_0, y - y_0). \end{aligned} \tag{3.8}$$

(Recorde que $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$ é o gradiente.) Note que se $(x,y) \to (x_0,y_0)$ então $\eta \to (x_0,y_0)$. Simultaneamente, $\nabla u(\eta) \to \nabla u(x_0,y_0)$ e $\nabla v(\eta) \to \nabla v(x_0,y_0)$ por serem contínuas. Mais, as equações de Cauchy-Riemann implicam que $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial v}{\partial x})$ e $\nabla v = (\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x})$. Finalmente, para $z = h^{-1}(x,y)$ e $z_0 = h^{-1}(x_0,y_0)$,

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\eta)\alpha - \frac{\partial v}{\partial x}(\eta)\beta + i\frac{\partial v}{\partial x}(\eta')\alpha + i\frac{\partial u}{\partial x}(\eta')\beta}{\alpha + i\beta} \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\eta)\alpha^2 + \frac{\partial u}{\partial x}(\eta')\beta^2 + i\frac{\partial v}{\partial x}(\eta)\alpha^2 + i\frac{\partial v}{\partial x}(\eta')\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde $(\alpha, \beta) = (x - x_0, y - y_0)$. Logo, existe para todo $z_0 \in A$,

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0). \tag{3.10}$$

□

Exercício 19. *Para que $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ seja analítica, determine a forma da sua parte imaginária quando temos*

(1) $\operatorname{Re} f(x,y) = x^2 - xy - y^2$.
(2) $\operatorname{Re} f(x,y) = x^2 + y^2$.

Exercício 20.

(1) *Determine o domínio de analiticidade da função racional*

$$f(z) = \frac{z^3 + 2z + 1}{z^3 + 1}.$$

(2) *Mostre que as seguintes funções não são analíticas:*

(a) $f(z) = \operatorname{Re} z$
(b) $f(z) = |z|$

(3) *Seja* $A \subset \mathbb{C}$ *aberto e* $\widetilde{A} = \{z \in \mathbb{C} \colon \overline{z} \in A\}$. *Mostre que se* f *é analítica em* A *e* $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$, *então* g *é analítica em* $\widetilde{A}$.

(4) *Suponha que* $f \colon A \to \mathbb{C}$ *é analítica numa região* A, *e* $|f|$ *é constante em* A. *Mostre que* f *é constante em* A.

Exercício 21. *Deduza as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares:*

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial r}.$$

Exercício 22. *Defina os símbolos* ∂ *e* $\overline{\partial}$ *por:*

$$\partial f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \overline{\partial} f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right). \tag{3.11}$$

(1) *Mostre que as equações de Cauchy-Riemann se reduzem a* $\overline{\partial} f = 0$.
(2) *Mostre que se* f *é analítica, então* $f' = \partial f$.
(3) *Calcule* $\partial(z)$, $\overline{\partial} z$, $\partial(\overline{z})$ *e* $\overline{\partial}(\overline{z})$.
(4) *Mostre que* ∂ *e* $\overline{\partial}$ *obedecem às regras de derivação de somas, produto e multiplicação por escalar.*

Teorema 3.6 (Derivada da função inversa)**.** *Seja* $f \colon A \to \mathbb{C}$ *analítica e injectiva num aberto* A. *Se* f' *é contínua e* $f'(z) \neq 0$ *para* $z \in A$, *então* f^{-1} *é analítica em* $f(A)$ *e*

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}, \quad z \in A. \tag{3.12}$$

Demonstração. Seja $g = h \circ f \circ h^{-1} = (u, v)$ de classe C^1. Pelo teorema da função inversa no caso real e usando as equações de Cauchy-Riemann, temos que (para simplificação de notação omitimos o ponto onde a derivada é estudada):

$$Dg^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix}$$

verifica as equações de Cauchy-Riemann. Logo $f^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} \circ h$ é analítica. A fórmula (3.12) pode ser obtida pela regra da cadeia (3.2). □

3.3. **Derivadas de funções complexas elementares.**

Proposição 3.7. *A função* $\exp \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *é inteira e* $\exp' = \exp$.

Demonstração. Como $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)$, temos que $\overline{\partial}(\mathrm{e}^z) = 0$ e $\partial(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^z$. □

Note que a função log não é contínua no seu domínio, porque arg não é contínua. Porém, se restrigirmos o argumento $\arg \colon \mathbb{C} \to]-\pi, \pi]$ ao conjunto $\mathbb{C} - \mathbb{R}_0^-$, obtemos uma função contínua.

Proposição 3.8. *A função* $\log \colon \mathbb{C} - \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{C}$ *é analítica e* $(\log z)' = 1/z$.

Demonstração. Em coordenadas polares $z = re^{i\theta}$, $\log z = \log r + i\theta$ para qualquer $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times]\pi, \pi[$. Escrevendo $u(r, \theta) = \log r$ e $v(r, \theta) = \theta$ e tendo em conta que estas são funções com derivada contínua no seu domínio, as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 = \frac{\partial v}{\partial r}$$

garantem a analiticidade de log no seu domínio. Derivando a expressão $z = e^{\log z}$, obtemos $1 = e^{\log z}(\log z)'$. Logo, $(\log z)' = 1/z$. □

Proposição 3.9. *As funções* $\sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *e* $\cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *são inteiras,* $\sin' = \cos$ *e* $\cos' = -\sin$.

Demonstração. Basta usar a definição de seno e cosseno complexos, tendo em conta o facto que a exponencial é inteira. □

Proposição 3.10. *Qualquer polinómio na forma* $P(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n z^n$ *é uma função inteira com* $P'(z) = \sum_{n=0}^{N} n c_n z^{n-1}$.

Exercício 23. *Demonstre a Proposição 3.10.*

Proposição 3.11. *Qualquer função racional* $R = P/Q$ *é analítica em* $\mathbb{C}$ *menos nos seus pólos, com* $R' = (P'Q - Q'P)/Q^2$.

Exercício 24. *Demonstre a Proposição 3.11.*

Exercício 25. *Mostre que se* $f\colon A \to \mathbb{C}$ *é analítica em* A *e* $f(z) \neq 0$ *para* $z \in A$*, então* $\overline{f}$ *não é analítica. Aproveite para estudar a diferenciabilidade de* $\overline{\exp}$.

Exercício 26. *Mostre que* $\overline{\log}$ *não é analítica.*

3.4. **Aplicação a funções reais harmónicas.** Seja um aberto $A \subset \mathbb{R}^2$. Uma função $u \in C^2(A)$ [6] diz-se **harmónica** se for solução da equação de Laplace:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{3.13}$$

Ao operador diferencial $\Delta = \nabla^2$ dá-se o nome de Laplaciano.

Proposição 3.12. *Se* $f = u + iv$ *é analítica num aberto* $A \subset \mathbb{C}$*, com* $u, v \in C^2(A)$*, então* u *e* v *são harmónicas em* A.

Demonstração. As equações de Cauchy-Riemann implicam que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Logo, como as derivadas cruzadas de v são iguais,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

O mesmo para v. □

Nas condições acima dizemos que u e v são harmónicas conjugadas.

[6] $C^k(A)$ é o espaço das funções $u\colon A \to \mathbb{R}$ de classe C^k, i.e. com derivada contínua de ordem k.

Proposição 3.13. *Se $f = u + iv$ é analítica num aberto $A \subset \mathbb{C}$, com $u, v \in C^2(A)$, então $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.*

Demonstração. Basta observar que pelas equações de Cauchy-Riemann:

$$\nabla u \cdot \nabla v = u_x v_x + u_y v_y = -u_x u_y + u_y u_x = 0,$$

onde usamos a notação $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ e $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$. □

Exercício 27. *Esboce as curvas de nível de u e v para cada uma das funções $f = u + iv$, e verifique que $\nabla u \perp \nabla v$:*

(1) $f(z) = z^2$
(2) $f(z) = \mathrm{e}^z$
(3) $f(z) = \log z$
(4) $f(z) = 1/z$

3.5. **Transformações conformes.** Uma função $f\colon A \to \mathbb{C}$ é **conforme** em $A \subset \mathbb{C}$ se é analítica em A e $f'(z) \neq 0$ para qualquer $z \in A$.

Observação 10.

- Em cada ponto, uma função conforme "roda" e "alonga" da mesma forma vectores tangentes às curvas. De facto, a aplicação linear tangente num ponto $z \in A$, $f'(z)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, é dada por
$$w \mapsto f'(z).w = r\mathrm{e}^{i\theta} w$$
com $r = |f'(z)|$ e $\theta = \arg f'(z)$. Desde que a derivada não se anule, temos uma rotação por θ e uma contracção/expansão por $r > 0$.
- Uma função conforme preserva ângulos (medidos entre vectores tangentes às curvas).

Exercício 28. *Seja $A = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$. Mostre que $f\colon A \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$, é conforme e injectiva. Determine $f(A)$.*

Proposição 3.14. *O conjunto das funções conformes e bijectivas é um grupo*[7] *(para a operação de composição de funções).*

Demonstração. É claro que a identidade é a função identidade $z \mapsto z$. Basta verificar que a inversa e composição de funções conformes e bijectivas também é conforme e bijectiva. Esse facto segue da derivada das funções inversa e composta. □

3.5.1. *Transformações de Möbius.* Nesta secção apresentamos um exemplo de funções conformes, as funções racionais na forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{onde} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C},$$

chamadas de **transformações de Möbius**.

Exercício 29. *Mostre que se $ad - bc = 0$ então a respectiva transformação de Möbius é constante.*

[7] A um conjunto G e uma operação $a.b$ entre elementos a e b de G chamamos grupo se: (1) a operação é associativa (2) $a.b \in G$ para quaisquer $a, b \in G$ (3) existe a identidade $e \in G$ tal que $a.e = e.a = a$ (4) para cada $a \in G$ existe o inverso $a^{-1} \in G$ tal que $a.a^{-1} = a^{-1}.a = e$.

Proposição 3.15. *Qualquer transformação de Möbius é conforme e bijectiva no seu domínio.*

Demonstração. Seja $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $c \neq 0$ (o caso $c = 0$ é trivial). No seu domínio $\mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}$ a função é analítica. Além disso, $f^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz+a}$ é também analítica em $\mathbb{C} - \{-\frac{a}{c}\}$. É simples de verificar que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$, e $f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$. □

Exercício 30. *Mostre que uma transformação de Möbius f pode ser decomposta na forma $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ onde*

$$f_1(z) = z + \frac{d}{c}, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}, \quad f_3(z) = (bc - ad)\frac{z}{c^2}, \quad f_4(z) = z + \frac{a}{c}. \tag{3.14}$$

Proposição 3.16. *Uma transformação de Möbius transforma rectas e circunferências em rectas ou circunferências.*

Demonstração. Usando a decomposição (3.14), note que f_1, f_3, f_4 são lineares logo transformam rectas em rectas e circunferências em circunferências. O caso $f_2(z) = u + iv = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ é mais complicado. Se $z = x + iy$ pertence a uma recta ou circunferência, então verifica uma equação do tipo

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy = D \Leftrightarrow A + B\frac{x}{x^2 + y^2} + C\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{D}{x^2 + y^2},$$

com coeficientes $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Assim, $A + Bu - Cv = D(u^2 + v^2)$, i.e. (u, v) pertence a uma recta ou a uma circunferência. □

4. Caminhos em $\mathbb{C}$

Seja $A \subset \mathbb{C}$ e os números reais $a < b$. Um **caminho** em A é uma função contínua $\gamma\colon [a, b] \to A$. A imagem desse caminho é a **curva** $\Gamma = \gamma([a, b]) \subset A$. Um caminho regular é definido como um caminho γ de classe C^1. Nestas condições, $\gamma'(t)$ é um vector tangente à curva Γ no ponto $\gamma(t)$.

Exemplo 2. O caminho $\gamma(t) = \mathrm{e}^{2\pi it}$, $t \in [0, 1]$, define a circunferência $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$. Além disso, $\gamma'(t) = 2\pi i\mathrm{e}^{2\pi it}$ é um vector tangente a Γ no ponto $\gamma(t)$.

Um caminho é fechado se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Um caminho fechado $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ diz-se simples se γ for injectiva em $[a, b[$. A um caminho fechado e simples chama-se caminho de Jordan e a curva respectiva é uma curva de Jordan. Um caminho constante corresponde a um ponto (ver Figura 3).

O **comprimento de uma curva** parametrizada por um caminho regular $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ é dado por

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

4.1. **Operações entre caminhos.**

Seja $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ um caminho regular. O caminho simétrico é $-\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ definido como

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t). \tag{4.1}$$

O caminho simétrico percorre o mesmo percurso de γ, mas no sentido contrário.

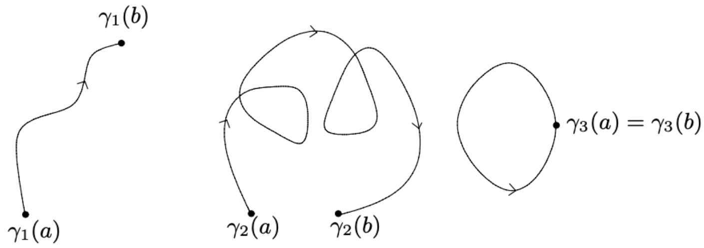

FIGURA 3. Exemplos de caminhos: γ_1 e γ_3 são simples, γ_3 é fechado.

Uma reparametrização de um caminho regular $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ é um novo caminho regular $\widetilde{\gamma}\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ definido por

$$\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(\varphi(t)), \tag{4.2}$$

onde $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ é um difeomorfismo[8] tal que $\varphi(\alpha) = a$ e $\varphi(\beta) = b$. Isto significa apenas que estamos a fazer um rescalamento (não necessariamente linear) do tempo, mantendo o sentido.

Considere dois caminhos regulares $\gamma_1\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_2\colon [b,c] \to \mathbb{C}$ tais que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ (i.e. o ponto final de γ_1 é o ponto inicial de γ_2). Podemos assim construir um único caminho (caminho soma) que poderá não ser diferenciável em $t = b$. A soma de γ_1 e γ_2 é o caminho $(\gamma_1 + \gamma_2)\colon [a,c] \to \mathbb{C}$ tal que

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b,c]. \end{cases} \tag{4.3}$$

O caminho soma será regular por troços, onde os troços correspondem aos caminhos regulares originais.

4.2. **Homotopias.** Seja $A \subset \mathbb{C}$ aberto. Uma **homotopia** entre caminhos $\gamma_0\colon [0,1] \to A$ e $\gamma_1\colon [0,1] \to A$

(1) com mesmos pontos final e inicial ($\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ e $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$) é uma função contínua $H\colon [0,1] \times [0,1] \to A$ tal que, para $t, s \in [0,1]$:
   (a) $H(0,t) = \gamma_0(t)$
   (b) $H(1,t) = \gamma_1(t)$
   (c) $H(s,0) = \gamma_0(0)$
   (d) $H(s,1) = \gamma_0(1)$
(2) fechados ($\gamma_0(0) = \gamma_0(1)$ e $\gamma_1(0) = \gamma_1(1)$) é uma função contínua $H\colon [0,1] \times [0,1] \to A$ tal que, para $t, s \in [0,1]$:
   (a) $H(0,t) = \gamma_0(t)$
   (b) $H(1,t) = \gamma_1(t)$
   (c) $H(s,0) = H(s,1)$

Um caminho fechado γ diz-se homotópico a um ponto z_0 se existir uma homotopia entre γ e o caminho constante $t \mapsto z_0$.

Exemplo 3.

[8] Um difeomorfismo é uma função C^1 bijectiva com inversa também C^1.

(1) Conside os caminhos com pontos inicial e final comuns:

$$\gamma_0(t) = t(1+i), \quad \gamma_1(t) = t + t^2 i.$$

Uma possível homotopia é a função $H(s,t) = t + t^{1+s}i$. Outro exemplo é $H(s,t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$.

(2) Considere os caminhos fechados:

$$\gamma_0(t) = \mathrm{e}^{2\pi it}, \quad \gamma_1(t) = 2\mathrm{e}^{2\pi it}.$$

Um exemplo de homotopia é $H(s,t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$.

Podemos usar a definição de homotopia para obter um conceito topológico. Um conjunto conexo $A \subset \mathbb{C}$ é **simplesmente conexo** se qualquer caminho fechado em A é homotópico a um ponto (caminho constante). Isto significa que o conjunto A não contém "buracos".

5. Integração em $\mathbb{C}$

O integral de uma função complexa h definida num intervalo real, i.e. $h\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ onde $[a,b] \subset \mathbb{R}$, é tomado como

$$\int_a^b h(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re} h(t)dt + i\int_a^b \operatorname{Im} h(t)dt. \tag{5.1}$$

De seguida tratamos o caso de uma função complexa definida num subconjunto aberto de $\mathbb{C}$.

5.1. Integral de caminho.

Sejam um aberto $A \subset \mathbb{C}$, uma função $f\colon A \to \mathbb{C}$ contínua e um caminho regular $\gamma\colon [a,b] \to A$. Definimos o integral de f ao longo de γ (integral de caminho ou integral de linha) como

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \tag{5.2}$$

Exercício 31. *Calcule os integrais:*

(1) $\int_\gamma \operatorname{Re} z\, dz$ *para o caminho* $\gamma(t) = t + it$ *com* $t \in [0,1]$. *(Note que a função* f *assume valores reais, porém o valor do integral não é real.)*

(2) $\int_\gamma z^3\, dz$ *para* γ *o caminho (com sentido anti-horário) sobre a elipse* $x^2 + 4y^2 = 1$ *entre* 1 *e* $i/2$.

(3) $\int_\gamma \exp z\, dz$ *sendo* γ *o caminho que descreve:*
   (a) *o segmento de recta de* 1 *a* i.
   (b) *o arco de circunferência centrada na origem (com sentido anti-horário) e raio 1 entre* 1 *e* i.

5.2. Propriedades do integral.

Proposição 5.1. *Sejam* f *e* g *funções contínuas num aberto* $A \subset \mathbb{C}$, γ, γ_1 *e* γ_2 *caminhos regulares em* A *tais que o ponto final de* γ_1 *coincide com o ponto inicial de* γ_2, *e* $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. *Então:*

- $\int_\gamma (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_\gamma f + c_2 \int_\gamma g$
- $\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f$
- $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$
- $\int_{\widetilde{\gamma}} f = \int_\gamma f$ *onde* $\widetilde{\gamma}$ *é uma reparametrização de* γ.

Exercício 32. *Demonstre a Proposição* 5.1.

Observação 11. Fazendo uso da Proposição 5.1, podemos definir o integral de caminhos regulares por troços, uma vez que estes caminhos são somas de caminhos regulares. O integral sobre um caminho regular por troços será então a soma dos integrais dos correspondentes caminhos regulares.

Exercício 33. *Calcule os seguintes integrais para o caminho γ (com sentido anti-horário) que circunda o quadrado com vértices nos pontos* 0, 1, i *e* $1+i$*:*

(1) $\int_\gamma \operatorname{Re} z \, dz$
(2) $\int_\gamma (z^2+1) \, dz$
(3) $\int_\gamma \overline{z} \, dz$

A proposição seguinte permite-nos estimar integrais de difícil computação.

Proposição 5.2. *Sejam $A \subset \mathbb{C}$ aberto, $f\colon A \to \mathbb{C}$ contínua e $\gamma\colon [a,b] \to A$ um caminho regular. Então*

$$\left| \int_\gamma f \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \, |\gamma'(t)| dt \leq \sup_{z\in\Gamma} |f(z)| \, \ell(\gamma), \tag{5.3}$$

onde $\ell(\gamma)$ é o comprimento da curva $\Gamma = \gamma([a,b])$.

Exercício 34. *Demonstre a Proposição* 5.2.

5.3. **Teorema fundamental do cálculo.** Uma primitiva de uma função complexa é definida de forma idêntica ao caso real. Ou seja, uma primitiva F de uma função complexa f é analítica e satisfaz $F' = f$. As primitivas de f diferem apenas de constantes, pois se F_1 e F_2 são ambas primitivas de f, então $G = F_1 - F_2$ tem derivada nula logo é uma constante.

Teorema 5.3 (Teorema fundamental do cálculo)**.** *Sejam $A \subset \mathbb{C}$ aberto, um caminho regular $\gamma\colon [a,b] \to A$ e uma função contínua $f\colon A \to \mathbb{C}$ com primitiva F em A. Então,*

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \tag{5.4}$$

Observação 12.

- Se o caminho for fechado, i.e. $\gamma(b) = \gamma(a)$, $\int_\gamma f = 0$.
- Se o caminho for regular por troços, aplicando-se o teorema a cada troço e somando os respectivos integrais, podemos generalizar o resultado acima.
- Note que o integral ao longo de γ apenas depende dos seus pontos inicial e final. Logo, será o mesmo para outros caminhos com os mesmos extremos.

Demonstração. Escrevendo $F(\gamma(t)) = u(t) + iv(t)$, temos que $f(\gamma(t))\gamma'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = (F\circ\gamma)'(t) = u'(t) + iv'(t)$. Assim, pela definição de integral de caminho:

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b [u'(t) + iv'(t)] dt$$

Pelo teorema fundamental do cálculo integral em $\mathbb{R}$,

$$\int_a^b [u'(t) + iv'(t)]dt = u(b) - u(a) + i[v(b) - v(a)] = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

□

Exercício 35. *Encontre dois caminhos regulares γ_1 e γ_2 com pontos inicial e final iguais, tais que*

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz \neq \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz.$$

Explique porque isto é possível e não viola o teorema fundamental do cálculo.

Teorema 5.4. *Seja $f \colon A \to \mathbb{C}$ contínua numa região $A \subset \mathbb{C}$. Então, f tem uma primitiva em A sse $\int_\gamma f = 0$ para qualquer caminho fechado regular por troços $\gamma \colon [a, b] \to A$.*

Observação 13. $\int_\gamma f = 0$ para qualquer caminho fechado γ sse o integral entre dois pontos de A é independente do caminho. De facto, se $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ onde γ_1 e γ_2 têm por extremos esses dois pontos, então $\int_{\gamma_1} f = \int_{-\gamma_2} f$, ou seja o valor do integral apenas depende dos extremos. A implicação inversa é óbvia.

Demonstração.

- ($\Rightarrow$) Se f tem uma primitiva F, então pelo teorema fundamental do cálculo $\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$.
- ($\Leftarrow$) Assuma agora que para qualquer caminho fechado γ o integral de f anula-se. Fixe um ponto w em A e considere um caminho com extremos w e $z_0 \in A$ a que chamamos ρ_{z_0}. Considere então a função $F(z_0) = \int_{\rho_{z_0}} f$, bem definida pois o valor do integral apenas depende dos pontos extremos do caminho e não do caminho em si (recorde que w é fixo pelo que não consideramos a função dependente deste ponto). Queremos verificar que F é a primitiva de f, bastando para isso provar que é diferenciável e que $F' = f$.

  Como A é uma região, em redor de z_0 podemos inscrever um disco $D_r(z_0)$ com raio r (suficientemente pequeno). Para $z \in D_r(z_0)$ definimos o caminho $\eta_z(t) = z_0 + t(z - z_0)$, $t \in [0, 1]$, que une z_0 a z por um segmento de recta denominado Γ_z. Logo, $\int_{\eta_z} dz = z - z_0$ e $\ell(\eta_z) = |z - z_0|$.

  Finalmente, como $F(z) - F(z_0) = \int_{\eta_z} f$, usando a Proposição 5.2:

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| = \frac{\left| \int_{\eta_z} [f(\xi) - f(z_0)] d\xi \right|}{|z - z_0|} \leq \sup_{\xi \in \Gamma_z} |f(\xi) - f(z_0)|,$$

  e pela continuidade de f, $\lim_{z \to z_0} \sup_{\xi \in \Gamma_z} |f(\xi) - f(z_0)| = 0$ e

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = 0.$$

  Concluímos que F é diferenciável em qualquer ponto $z_0 \in A$ e $F' = f$.

□

Exercício 36. *Calcule:*

(1) $\int_{|z|=1}(\overline{z})^{-1}dz$ *e mostre que* $z\mapsto(\overline{z})^{-1}$ *não é primitivável.*
(2) $\int_\gamma (z-w)^n dz$ *onde* $n\in\mathbb{Z}$ *e* γ *determina a circunferência de raio* r *centrada em* $w\in\mathbb{C}$.

Exercício 37. *Mostre que para qualquer caminho fechado regular por troços* $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{C}$ *com* $w\notin\gamma([a,b])$ *temos que*

$$\operatorname{rot}(\gamma,w)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-w}\in\mathbb{Z}. \tag{5.5}$$

Note que o número acima $\operatorname{rot}(\gamma,w)$ *(chamado número de rotação de* γ *em torno de* w*) indica o número de "voltas" dadas pelo caminho em redor do ponto* w.

Sugestão*: Considere a função*

$$h(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_a^t\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-w}ds,\quad t\in[a,b].$$

Queremos então provar que $h(b)\in\mathbb{Z}$. *Para isso verifique que* $[\gamma(t)-w]\mathrm{e}^{-2\pi i h(t)}$ *é constante.*

Exercício 38. *Descreva condições sobre* γ *para que* $\int_\gamma\log z\,dz=0$.

5.4. **Teorema de Cauchy.** Nesta altura é importante realçar o facto da primitivação de funções complexas ser um problema mais subtil que a primitivação de funções reais. Tal reflecte a restrição imposta pelas equações de Cauchy-Riemann. Para as funções reais terem primitiva é suficiente que sejam contínuas. Pretendemos agora obter também uma condição suficiente de simples verificação para funções complexas. Na próxima secção iremos provar que de facto é uma condição necessária e suficiente.

Nesta secção iremos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 5.5 (Cauchy)**.** *Seja* $f\colon A\to\mathbb{C}$ *analítica numa região* $A\subset\mathbb{C}$ *simplesmente conexa e um caminho fechado* γ *em* A *regular por troços. Então,*

$$\int_\gamma f=0. \tag{5.6}$$

Observação 14. Usando o Teorema 5.4, se f é analítica numa região A simplesmente conexa, então é primitivável em A.

Começamos com versões do Teorema de Cauchy em regiões especiais.

Teorema 5.6 (num rectângulo)**.** *Seja* $A\subset\mathbb{C}$ *aberto,* $f\colon A\to\mathbb{C}$ *analítica e* $\rho\colon[a,b]\to A$ *um caminho rectangular com lados paralelos aos eixos. Então,* $\int_\rho f=0$.

Demonstração.

- Dividimos o rectângulo circundado por ρ em 4 novos rectângulos iguais como indica a Fig. 4. Definimos então os caminhos rectangulares $\rho^{(i)}$, $1\le i\le 4$, com sentido anti-horário. Desta forma $\int_\rho f=\sum_{i=1}^4\int_{\rho^{(i)}}f$. Logo,

$$\left|\int_\rho f\right|\le 4\left|\int_{\rho_1}f\right|$$

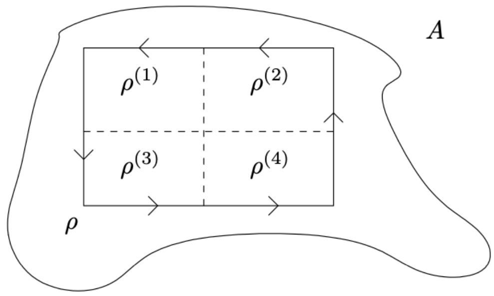

FIGURA 4

onde ρ_1 é o caminho entre os $\rho^{(i)}$ que maximiza $\left|\int_{\rho^{(i)}} f\right|$.

Por outro lado, se o perímetro e o diâmetro de ρ (i.e. do rectângulo circunscrito por ρ) são dados por, respectivamente, P e Δ, então, para ρ_1, temos que $P_1 = P/2$ e $\Delta_1 = \Delta/2$.

- Podemos repetir este procedimento n vezes até obtermos
$$\left|\int_\rho f\right| \leq 4^n \left|\int_{\rho_n} f\right|, \quad P_n = \frac{P}{2^n}, \quad \Delta_n = \frac{\Delta}{2^n}.$$
- Escolhemos o ponto z_0 que se encontra no interior de todos os rectângulos definidos por ρ_n (como $\lim P_n = \lim \Delta_n = 0$ é simples verificar que z_0 é único). A função f é, por hipótese, analítica em z_0. Isto implica que para qualquer $\varepsilon > 0$ encontramos $\delta > 0$ tal que para $z \in D_\delta(z_0)$ verifica-se
$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon|z - z_0|.$$
- Finalmente, notando que $\int_{\rho_n} dz = \int_{\rho_n}(z - z_0)dz = 0$ pois 1 e z são primitiváveis,
$$\begin{aligned}\left|\int_\rho f\right| \leq 4^n \left|\int_{\rho_n} f\right| &= 4^n \left|\int_{\rho_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]dz\right| \\ &\leq 4^n\varepsilon \int_{\rho_n} |z - z_0|\,|dz| \leq 4^n\varepsilon\Delta_n P_n = \varepsilon\Delta P.\end{aligned}$$
Como a desigualdade anterior é válida para qualquer $\varepsilon > 0$, temos que $\int_\rho f = 0$.

$\square$

Teorema 5.7 (num disco)**.** *Seja $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $f\colon D_r(z_0) \to \mathbb{C}$ analítica, e um caminho fechado $\gamma\colon [a, b] \to D_r(z_0)$ regular por troços. Então,*
$$\int_\gamma f = 0. \tag{5.7}$$

Demonstração. Vamos mostrar que se f é analítica num disco, então tem primitiva. Usando o Teorema 5.4 podemos então deduzir (5.7).

Seja
$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f, \quad z \in D_r(z_0),$$

onde $[z_0, z]$ denota a soma do caminho horizontal desde z_0 até $z_0 + \mathrm{Re}(z - z_0)$ com o caminho vertical desde $z_0 + \mathrm{Re}(z - z_0)$ até z. Sendo assim, para $w \in D_r(z_0)$,

$$F(w) - F(z) = \pm \int_\rho f + \int_{[z,w]} f, \tag{5.8}$$

com ρ o caminho rectangular com vértices em z e $z_0 + \mathrm{Re}(w - z_0)$. Como, pelo Teorema 5.6, temos que $\int_\rho f = 0$,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| &= \frac{1}{|w - z|} \left| \int_{[z,w]} f - f(z)(w - z) \right| \\
&= \frac{1}{|w - z|} \left| \int_{[z,w]} [f(\xi) - f(z)] d\xi \right| \\
&\le \frac{\sup_{\xi \in [z,w]} |f(\xi) - f(z)|}{|w - z|} \ell([z, w]) \\
&\le 2 \sup_{\xi \in [z,w]} |f(\xi) - f(z)|.
\end{aligned}$$

Como f é contínua, $\lim_{w \to z} \sup_{\xi \in [z,w]} |f(\xi) - f(z)| = 0$ e

$$\lim_{w \to z} \left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| = 0,$$

i.e. $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in D_r(z_0)$. □

Exercício 39. *Prove* (5.8).

Demonstração do Teorema de Cauchy.

- Considere a homotopia $H \colon [0, 1] \times [0, 1] \to A$ entre $\gamma \colon [0, 1] \to A$ e um ponto, e os números $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ e $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ que definem partições de $[0, 1]$. O quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ pode ser decomposto em n^2 subquadrados na forma $[s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$, com $i, j = 0, \dots, n - 1$. Note que para cada par (i, j) temos um ponto $H(s_i, t_i)$ em A.
- Se n for tomado suficientemente grande cada conjunto $H([s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}])$ está contido num mesmo disco em A (ver Fig. 5). Isto é de facto possível pois H é contínua num conjunto compacto, logo uniformemente contínua. Além disso, podemos aproximar os caminhos contínuos $s \mapsto H(s, t_j)$, $s \in [s_i, s_{i+1}]$, e $t \mapsto H(s_i, t)$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$, por caminhos em A regulares por troços. Sejam $\eta_{i,j}$ esses caminhos regulares por troços e fixamos $\eta_{0,j} = \gamma$ em $[t_j, t_{j+1}]$. Então,

$$\int_\gamma f = \sum_{i,j=0}^{n-1} \int_{\eta_{i,j}} f. \tag{5.9}$$

- Como $\eta_{i,j}$ é um caminho dentro de um disco onde f é analítica, para provar (5.6) usamos o Teorema 5.7 que garante que $\int_{\eta_{i,j}} f = 0$.

□

Exercício 40. *Prove* (5.9).

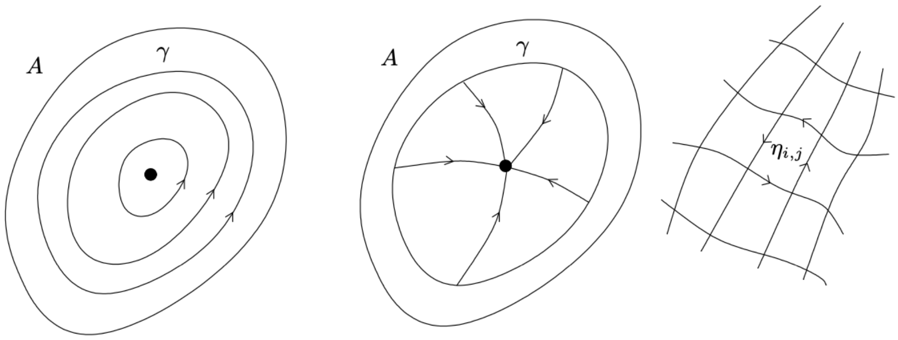

FIGURA 5. As curvas $H(s_i, \cdot)$, $H(\cdot, t_j)$ e $\eta_{i,j}$.

Exercício 41. *Prove o teorema de Cauchy no caso de uma função analítica com derivada contínua, usando o teorema de Green.*

5.5. **Fórmula integral de Cauchy.**

Teorema 5.8 (Fórmula integral de Cauchy)**.** *Seja $A \subset \mathbb{C}$ uma região simplesmente conexa e $f\colon A \to \mathbb{C}$ analítica. Então:*

(1) *Todas as derivadas de f existem em A.*
(2) *Para qualquer caminho fechado $\gamma\colon [a, b] \to A$ regular por troços, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $z \in A \setminus \gamma([a, b])$, temos que*

$$f^{(k)}(z). \operatorname{rot}(\gamma, z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi. \tag{5.10}$$

Observação 15.

- Note que $0! = 1$ por convenção, e que $f^{(0)} = f$.
- Se γ é um caminho de Jordan (fechado e simples) e z encontra-se no interior da curva ($\operatorname{rot}(\gamma, z) = 1$), então a fórmula de Cauchy reduz-se a
$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi. \tag{5.11}$$
- Aprecie o resultado acima, nomeadamente o facto dos valores da função f e das suas derivadas poderem ser determinados através apenas dos valores de f sobre uma curva.

Demonstração. Seja
$$F(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z}$$
analítica em $A \setminus \{z\}$. Considere o caminho $\sigma = \gamma + \lambda + \gamma_\varepsilon - \lambda$, onde $\gamma_\varepsilon(t) = z + \varepsilon e^{it}$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno para que a circunferência esteja no interior de γ, e λ é um caminho linear que une as duas curvas anteriores. Temos assim que F é analítica no interior de σ e $\int_\sigma F = 0$ pelo teorema de Cauchy. Ou seja,
$$\int_\gamma F = \int_{\gamma_\varepsilon} F = i \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{it})\, dt$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, usando o teorema da convergência dominada e o facto de f ser analítica, obtemos

$$\int_\gamma F = 2\pi i f(z)$$

que corresponde à fórmula integral de Cauchy para $n = 0$. Os restantes casos, $n \geq 1$, seguem da aplicação da regra de Leibniz que permite a troca da derivada com o integral. $\square$

5.5.1. **Demonstração do Teorema* 5.8 *sem conhecer o teorema da convergência dominada e a regra de Leibniz.* Para provar o resultado necessitamos da seguinte variante dos Teoremas 5.6 e 5.7.

Teorema 5.9. *Os teoremas e* 5.5, 5.6 *e* 5.7 *são válidos mesmo se f for analítica no seu domínio com excepção de um ponto z_0 onde é apenas contínua.*

Exercício 42. **Demonstre o Teorema* 5.9*.*

Considere a função

$$F(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}, & \xi \neq z \\ f'(z), & \xi = z, \end{cases}$$

analítica para $\xi \neq z$ e contínua para todo $\xi \in A$. Podemos então usar o Teorema 5.9 para deduzir que

$$0 = \int_\gamma F = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) \int_\gamma \frac{1}{\xi - z} d\xi,$$

quando z não está na curva dada por γ. Pela definição de $\operatorname{rot}(\gamma, z)$ dada em (5.5), provámos (5.10) para $k = 0$. Mais, f é analítica por hipótese.

O seguinte lema será suficiente para provar a existência de todas as derivadas e as restantes igualdades (5.10) para $k \in \mathbb{N}$.

Lema 5.10. *Se φ é uma função contínua em $\Gamma = \gamma([a, b])$, então*

$$F_n(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^n} d\xi, \quad z \in A - \Gamma,$$

é analítica com derivada $F_n' = nF_{n+1}$.

Demonstração.

- Seja $z_0 \notin \Gamma$ e $\delta > 0$ tal que $D_\delta(z_0) \cap \Gamma = \emptyset$. Se $z \in D_{\delta/2}(z_0)$, temos que $|\xi - z| > \delta/2$ para todos os pontos ξ na curva Γ. Logo,

$$F_1(z) - F_1(z_0) = (z - z_0) \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z_0)} d\xi \tag{5.12}$$

  e

$$|F_1(z) - F_1(z_0)| < \frac{2|z - z_0|}{\delta^2} \sup_{\xi \in \Gamma} |\varphi(\xi)| \, \ell(\gamma).$$

  Tirando o limite quando $z \to z_0$ temos que F_1 é contínua em z_0.
- Podemos repetir o procedimento anterior para a função $\widetilde{\varphi}(\xi) = \varphi(\xi)/(\xi - z_0)$ em vez de φ, o que implica que a função

$$G_1(z) = \int_\gamma \frac{\widetilde{\varphi}(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z_0)} d\xi$$

é contínua em z_0. Ou seja, por (5.12),

$$\lim_{z\to z_0} \frac{F_1(z)-F_1(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} G_1(z) = F_2(z_0).$$

Assim, $F_1' = F_2$. O mesmo para G_1 usando a função $\widetilde{\varphi}$, i.e. $G_1' = G_2$.

- Iremos provar por indução as restantes igualdades para $n > 1$ e a existência de todas as derivadas. Assim, assumimos que F_{n-1} e

$$G_{n-1}(z) = \int_\gamma \frac{\widetilde{\varphi}(\xi)}{(\xi-z)^{n-1}}d\xi = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)^{n-1}(\xi-z_0)}d\xi$$

são contínuas em z_0, e que $F_{n-1}' = (n-1)F_n$ e $G_{n-1}' = (n-1)G_n$. Note que $G_{n-1}(z_0) = F_n(z_0)$ e

$$\frac{1}{(\xi-z)^n} = \frac{\xi-z+z-z_0}{(\xi-z)^n(\xi-z_0)} = \frac{1}{(\xi-z)^{n-1}(\xi-z_0)} + \frac{z-z_0}{(\xi-z)^n(\xi-z_0)}.$$

- Então,

$$\begin{aligned} F_n(z)-F_n(z_0) &= \int_\gamma \left[\frac{1}{(\xi-z)^{n-1}(\xi-z_0)} - \frac{1}{(\xi-z_0)^n} + \frac{z-z_0}{(\xi-z)^n(\xi-z_0)}\right]\varphi(\xi)d\xi \\ &= G_{n-1}(z) - G_{n-1}(z_0) + (z-z_0)\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)^n(\xi-z_0)}d\xi. \end{aligned}$$

Como G_{n-1} é contínua em z_0 e pelo mesmo argumento de (5.12), o limite da expressão acima quando $z\to z_0$ é zero. Simultaneamente,

$$\frac{F_n(z)-F_n(z_0)}{z-z_0} = \frac{G_{n-1}(z)-G_{n-1}(z_0)}{z-z_0} + \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)^n(\xi-z_0)}d\xi$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{z\to z_0} \frac{F_n(z)-F_n(z_0)}{z-z_0} &= (n-1)G_n(z_0) + \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi \\ &= (n-1)F_{n+1}(z_0) + F_{n+1}(z_0) \\ &= nF_{n+1}(z_0). \end{aligned}$$

I.e. $F_n' = nF_{n+1}$. O mesmo para $G_n' = nG_{n+1}$.

□

Exercício 43. *Termine a demonstração do Teorema* 5.8.

5.6. Aplicações do Teorema de Cauchy.

Exercício 44. *Mostre que se f é analítica em $\overline{D}_r(z_0)$, então $f(z_0)$ é igual à média de f na circunferência $\partial D_r(z_0)$. I.e.*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt. \tag{5.13}$$

Exercício 45. *Por comparação com a fórmula de Cauchy, calcule*

(1) $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z}dz$
(2) $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2}dz$
(3) $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n}dz$

Teorema 5.11 (Estimativas de Cauchy)**.** *Seja $f\colon A \to \mathbb{C}$ analítica numa região $A \subset \mathbb{C}$ e γ o caminho em redor de $D_r(z_0) \subset A$. Então, para $k \in \mathbb{N}$,*

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{z\in\gamma} |f(z)|. \tag{5.14}$$

Demonstração. Exercício. □

Teorema 5.12. *Uma função analítica e limitada em $\mathbb{C}$ só pode ser constante.*

Demonstração. Use o Teorema 5.11. □

Exercício 46. *Mostre que um polinómio $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de grau ≥ 1 tem pelo menos um zero (teorema fundamental da álgebra).* Sugestão*: Prove por absurdo que se não tem zeros, então $1/P(z)$ seria analítica e limitada em $\mathbb{C}$.*

Uma função $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é periódica se existe $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ tal que $f(z+w) = f(z)$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Por exemplo, para $f(x) = e^x$ temos $w = 2\pi i$, e para $f(z) = \sin z$ temos $w = 2\pi$. Uma função é duplamente periódica se existem $w_1, w_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tais que $w_1/w_2 \notin \mathbb{R}$ e $f(z+w_1) = f(z+w_2) = f(z)$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Note que a condição $w_1/w_2 \notin \mathbb{R}$ significa que w_1 e w_2 geram rectas linearmente independentes.

Teorema 5.13. *Uma função analítica em $\mathbb{C}$ e duplamente periódica é constante.*

Demonstração. Note que para qualquer $z \in \mathbb{C}$ existem $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tais que $z = c_1 w_1 + c_2 w_2$. Escrevendo $c_i = n_i + \lambda_i$ com $n_i \in \mathbb{Z}$ e $\lambda_i \in [0, 1[$, pela periodicidade dupla,

$$f(z) = f((n_1 + \lambda_1)w_1 + (n_2 + \lambda_2)w_2) = f(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2).$$

Ou seja, a função repete os valores que toma no paralelogramo

$$C = \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in \mathbb{C}\colon \lambda_i \in [0, 1[\}.$$

Como $|f|$ é contínua no compacto $\overline{C}$, existe um máximo nesse conjunto. Logo, $|f(z)| \leq \max_{\overline{C}} |f|$ e f é limitada em $\mathbb{C}$. Sendo também analítica, só pode ser constante. □

Para finalizar esta secção, fazemos um sumário dos principais resultados obtidos até agora.

Teorema 5.14. *Seja $f\colon A \to \mathbb{C}$ definida numa região $A \subset \mathbb{C}$ simplesmente conexa. Então, as proposições seguintes são equivalentes:*

(1) *f é analítica em A.*
(2) *f é primitivável em A.*
(3) *$\int_\gamma f = 0$ para qualquer caminho γ fechado regular por troços em A.*
(4) *f tem todas as derivadas em A.*

Demonstração. A equivalência entre 2 e 3 é dada pelo Teorema 5.4. O Teorema de Cauchy garante que 1 implica 2. Finalmente, pelo Teorema 5.8, a primitiva F (que é analítica com $F' = f$) é infinitamente diferenciável. Assim 4 é válida, em particular $f' = F''$ existe em A. □

6. Séries de potências de funções analíticas

6.1. **Convergência de sucessões e séries.** Uma sucessão z_n em $\mathbb{C}$ **converge** para $z \in \mathbb{C}$, i.e. $\lim_{n\to+\infty} z_n = z$ ou $z_n \to z$, se dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar uma ordem $N \in \mathbb{N}$ a partir da qual ($n > N$) temos $|z_n - z| < \varepsilon$.

A série $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$ (ou simplesmente $\sum c_k$), com $c_k \in \mathbb{C}$, converge se a sucessão das somas parciais

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$$

converge. Nesse caso,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k.$$

De particular utilidade é o conceito de convergência absoluta, pois reduzimos o problema ao estudo de séries positivas em $\mathbb{R}$ para as quais existem vários critérios de convergência. Uma série $\sum c_k$ diz-se **absolutamente convergente** se $\sum |c_k|$ converge. Pela definição é simples verificar que se a série converge absolutamente terá que convergir (o contrário não é verdade, e.g. $\sum (-1)^k/k$).

Considere agora uma sucessão de funções $f_n \colon A \to \mathbb{C}$ onde $A \subset \mathbb{C}$. Temos então duas formas de convergência:

(1) f_n **converge pontualmente** para f se $|f_n(z) - f(z)| \to 0$ para cada $z \in A$;
(2) f_n **converge uniformemente**[9] para $f \colon A \to \mathbb{C}$ se $\|f_n - f\|_A \to 0$.

A convergência uniforme de funções contínuas implica que o limite também é uma função contínua.

Proposição 6.1. *Se $f_n \colon A \to \mathbb{C}$ é uma sucessão de funções contínuas e $\|f_n - f\|_A \to 0$ para alguma $f \colon A \to \mathbb{C}$, então f é contínua.*

Demonstração. Fixe $z_0 \in A$. Comecemos por notar que para $z, z_0 \in A$,

$$|f(z) - f(z_0)| \le |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)|.$$

Como $\|f_n - f\|_A \to 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$, $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon/3$ e $|f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon/3$. Como f_n é contínua existe $\delta > 0$ tal que se $|z - z_0| < \delta$ temos $|f_n(z) - f_n(z_0)| < \varepsilon/3$.

Concluindo, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|z - z_0| < \delta$ então

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

I.e. f é contínua em qualquer $z_0 \in A$. □

Podemos então definir séries de funções $\sum f_k$. A convergência é dada por:

(1) $\sum f_k$ converge pontualmente em A se $\sum_{k=1}^{n} f_k(z)$ converge para qualquer $z \in A$;
(2) $\sum f_k$ converge absolutamente em A se $\sum_{k=1}^{n} |f_k(z)|$ converge para qualquer $z \in A$;
(3) $\sum f_k$ converge uniformemente em A se $\sum_{k=1}^{n} f_k$ converge uniformemente em A.

[9] A norma uniforme definida para funções f é $\|f\|_A = \sup_{z\in A} |f(z)|$.

Proposição 6.2 (Critério de Weierstrass)**.** *Se $\sum \|f_k\|_A$ converge, então $\sum f_k$ converge absoluta e uniformemente em A.*

Demonstração. Como $\sum |f_k(z)| \leq \sum \|f_k\|_A$ converge, a série converge absolutamente em A. Agora, para qualquer $z \in A$,

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_A$$

converge para zero quando $n \to +\infty$. □

Observação 16. De modo semelhante à Proposição 6.1 podemos demonstrar que se f_n são funções contínuas e $\sum f_k$ converge uniformemente em A, então $\sum f_k$ é contínua em A.

Exercício 47. *Determine a convergência de $\sum z^k/k$ em $D_r(0)$.*

Exercício 48. *Mostre que $\sum_{n\geq 0} z^n$ converge em $D_1(0)$ para a função $f(z) = 1/(1-z)$. Prove que a convergência é uniforme e absoluta em qualquer conjunto $\overline{D_r(0)}$ com $r < 1$.*

Proposição 6.3. *Seja $A \subset \mathbb{C}$ uma região, um caminho $\gamma\colon [a,b] \to A$ regular por troços e uma sucessão de funções $f_n\colon \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ contínuas tal que $\|f_n - f\|_\gamma \to 0$. Então,*

$$\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f.$$

Além disso, se $\sum f_k$ converge uniformemente em γ, então

$$\int_\gamma \sum f_k = \sum \int_\gamma f_k.$$

Demonstração. Como $f_n \to f$ uniformemente, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$ temos que $\|f_n - f\|_\gamma < \varepsilon$. Logo,

$$\left|\int_\gamma f_n - \int_\gamma f\right| = \left|\int_\gamma (f_n - f)\right| \leq \|f_n - f\|_\gamma\, \ell(\gamma) < \varepsilon\, \ell(\gamma).$$

I.e. $\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$.

A mesma ideia para a série. □

6.2. **Convergência de sucessões e séries de funções analíticas.** Se tivermos uma sucessão de funções analíticas, mostramos de seguida que o seu limite também é uma função analítica desde que a convergência seja uniforme. A série dessas funções também vai ser analítica.

Teorema 6.4. *Seja $A \subset \mathbb{C}$ aberto e uma sucessão de funções $f_n\colon A \to \mathbb{C}$ analíticas.*

1. *Se $\|f_n - f\|_D \to 0$ em qualquer disco fechado D em A, então f é analítica e $f_n' \to f'$ pontualmente em A e uniformemente em D.*
2. *Se $\sum f_k$ converge uniformemente em qualquer disco fechado em A, então $\sum f_k$ é analítica e $(\sum f_k)' = \sum f_k'$ pontualmente em A e uniformemente em qualquer disco fechado em A.*

Demonstração. Como $f_n \to f$ uniformemente e f_n é analítica em D, para qualquer caminho fechado γ em D regular por troços temos que $\int_\gamma f_n = 0$ pelo teorema de Cauchy e que $\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$ pela Proposição 6.3. Ou seja, $\int_\gamma f = 0$. Pelo Teorema 5.14, f é analítica em D.

Consideremos agora que D é um disco de raio r centrado em z e que γ determina uma circunferência concêntrica de raio $\rho > r$ de tal forma que γ ainda está em A. Assim, pela fórmula de Cauchy,

$$f'_n(z) - f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(\xi) - f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

Como $|\xi - z| \geq \rho - r$ para $\xi \in \gamma([a, b])$ e $z \in D$,

$$\|f'_n - f'\|_D \leq \frac{\|f_n - f\|_\gamma \, \ell(\gamma)}{2\pi(\rho - r)^2} = \frac{\|f_n - f\|_\gamma \, \rho}{(\rho - r)^2}.$$

Do facto $\|f_n - f\|_\gamma \to 0$ provamos que $f'_n \to f'$ uniformemente em D. A prova da convergência pontual em A fica como exercício para o leitor.

A mesma ideia para a série. □

Exemplo 4. Um exemplo simultaneamente simples e importante é dado pela série geométrica: $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$. Para calcular o seu valor vamos proceder por indução à demonstração da igualdade:

$$\sum_{n=0}^{k} z^n = \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z}.$$

Como se verifica para $k = 0$, assumindo a igualdade para um qualquer $k \in \mathbb{N}$, resta demonstrar que é válida para $k + 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{k+1} z^n &= \sum_{n=0}^{k} z^n + z^{k+1} \\ &= \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z} + z^{k+1} \\ &= \frac{1 - z^{k+2}}{1 - z}. \end{aligned}$$

Fazendo o limite $k \to +\infty$ quando $|z| < 1$ obtemos

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n = \frac{1}{1 - z}. \tag{6.1}$$

Exercício 49. *Considere a função zeta (ζ) de Riemann*[10]

$$\zeta(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-z}$$

(1) *Mostre que ζ é analítica em $A = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 1\}$.*

[10]Riemann (1826 - 1866) observou que a frequência dos números primos entre os naturais é muito parecida com o comportamento da função ζ. A famosa "Hipótese de Riemann" conjectura que todas as soluções de $\zeta(z) = 0$ encontram-se na recta vertical $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\}$. Isto foi verificado para as primeiras 10^{13} soluções. Porém, uma demonstração formal para todas as soluções não é conhecida. No caso de ter alguma boa ideia, gostará de saber que há um prémio de 1 milhão de dólares para quem resolver este problema. Veja em: http://www.claymath.org/millennium-problems

(2) *Escreva ζ' sob a forma de uma série.*

6.3. **Convergência da série de Taylor.** Vamos ver de seguida que a série de Taylor de uma função analítica converge.

Teorema 6.5 (Taylor)**.** *Seja $A \subset \mathbb{C}$ aberto, $f\colon A \to \mathbb{C}$ analítica e $z_0 \in A$, $r > 0$ tais que $D_r(z_0) \subset A$. Então,*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \quad \textit{(série de Taylor)} \tag{6.2}$$

para todo $z \in D_r(z_0)$.

Demonstração. Seja γ o caminho que descreve uma circunferência de raio $\sigma < r$ e centrada em z_0. Assim, para $z \in D_\sigma(z_0)$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Como podemos escrever

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{\xi - z_0}\right)} = \frac{1}{\xi - z_0}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-z_0}{\xi - z_0}\right)^n,$$

obtemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-z_0}{\xi - z_0}\right)^n \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi.$$

Ou seja, usando o Lema 6.3,

$$f(z) = \sum_{n\geq 0}(z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

O resultado segue do facto de esta igualdade ser válida para qualquer $\sigma < r$. □

Exercício 50. *Determine a série de Taylor da função ζ de Riemann em redor de $z_0 = 2$.*

Corolário 6.6. *Seja $A \subset \mathbb{C}$ uma região. Uma função $f\colon A \to \mathbb{C}$ é analítica sse para cada $z_0 \in A$ existe $r > 0$ tal que $D_r(z_0) \subset A$ e f é igual à sua série de Taylor em $D_r(z_0)$.*

Observação 17. Poderíamos ter definido inicialmente funções analíticas desta maneira. Note que esta é a definição em $\mathbb{R}$.

Demonstração.

- ($\Rightarrow$) Segue do teorema de Taylor.
- ($\Leftarrow$) A série de Taylor é analítica em $D_r(z_0)$ pois converge. Como isso é válido para qualquer $z_0 \in A$, temos que f é analítica em A.

□

6.4. **Continuação analítica.** O facto de uma função analítica ser igual à sua série de Taylor tem várias consequências importantes. Em particular, se a função se anula em pontos que "acumulam" no domínio, então terá que se anular em todo o domínio (desde que este seja conexo).

Teorema 6.7. *Seja $f\colon A \to \mathbb{C}$ analítica numa região $A \subset \mathbb{C}$. Se existe uma sucessão $z_n \in A$ convergente para $z_0 \in A$ tal que $z_n \neq z_m$, $n \neq m$, e $f(z_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, então $f(z) = 0$ para todos os pontos $z \in A$.*

Demonstração. Como f é analítica, podemos escrever para $z_0 \in A$ a série de Taylor definida num disco $D_r(z_0) \subset A$. Se $f^{(k)}(z_0) = 0$ para qualquer $k \geq 0$, então o teorema está demonstrado nesse disco. Assumimos então que existe p tal que $f^{(p)}(z_0) \neq 0$ e $f^{(k)}(z_0) = 0$ para $k < p$. Assim,

$$f(z) = (z - z_0)^p \varphi(z) \quad \text{onde} \quad \varphi(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k+p)}(z_0)}{(k+p)!}(z - z_0)^k.$$

A função φ é também analítica pois corresponde a uma série de Taylor convergente. Em particular, $\varphi(z_0) = f^{(p)}(z_0)/p! \neq 0$. Como φ é contínua, existe uma vizinhança $D_R(z_0)$ de z_0 com $0 < R < r$, tal que $\varphi(z) \neq 0$ se $z \in D_R(z_0)$.

Vamos então provar que $f(z) = 0$ em $D_R(z_0)$. Assumimos que existe $z^* \in D_R(z_0)$ tal que $f(z^*) \neq 0$. Porém, $f(z^*) = (z^* - z_0)^p \varphi(z^*) = 0$, logo $z^* = z_0$. Ou seja, não existe uma sucessão nas condições do enunciado. O teorema é válido para $D_R(z_0)$. Falta mostrar para os restantes pontos de A.

Considere o conjuntos de pontos de A onde todas as derivadas de f são nulas:

$$B = \{z \in A\colon f^{(n)}(z) = 0, n \geq 0\}.$$

Este é um conjunto não vazio pois $z_0 \in B$.

Tomando uma sucessão $w_n \in B$ convergente para z, pela continuidade de $f^{(n)}$ obtermos que $0 = f^{(n)}(w_n) \to f^{(n)}(z) = 0$. Ou seja, $z \in B$.

Seja $w \in B$. Pela analiticidade f é dada pela sua série de Taylor em w num disco $D_R(w) \subset A$. Assim, $f^{(n)} = 0$ nesse disco para qualquer $n \geq 0$. Ou seja, $D_R(w) \subset B$.

Os dois factos anteriores implicam que $A \cap \partial B = \emptyset$. Como A é conexo, pela Proposição 1.1 temos que $B = A$. □

Imediatamente obtemos o seguinte resultado.

Corolário 6.8 (Continuação analítica)**.** *Sejam $f\colon A \to \mathbb{C}$ e $g\colon A \to \mathbb{C}$ analíticas numa região $A \subset \mathbb{C}$. Se existe uma sucessão $z_n \in A$ convergente para $z_0 \in A$ tal que $z_n \neq z_m$, $n \neq m$, e $f(z_n) = g(z_n)$, $n \in \mathbb{N}$, então $f = g$ em A.*

Observação 18. A continuação analítica significa que existe uma única função analítica que toma determinados valores num conjunto de pontos que acumulam noutro ponto da região. Por exemplo, se para $z_n = 1/n$ temos que $f(z_n) = e^{1/n}$, então a única possibilidade da função f ser analítica é se for a exponencial $f(z) = e^z$.

Exercício 51. *Prove que se $f\colon A \to \mathbb{C}$ e $g\colon A \to \mathbb{C}$ são analíticas numa região A e f é igual a g ao longo de um caminho em A, então $f = g$ em todo o A.*

Exemplo 5. A função $f(z) = \sin z$, $x \in \mathbb{C}$, é a única função analítica que nos reais é igual ao seno, i.e. $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

6.5. **Princípio do módulo máximo.**

Teorema 6.9 (Princípio do módulo máximo)**.** *Seja uma região $A \subset \mathbb{C}$ limitada e $f\colon \overline{A} \to \mathbb{C}$ analítica em A e contínua em $\overline{A}$. Então, $|f|$ tem máximo num ponto da fronteira de A ou é constante.*

Demonstração. Como f é contínua em $\overline{A}$ (limitado e fechado = compacto), então existe máximo em $\overline{A}$. Seja $a \in \overline{A}$ um maximizante. Se a pertence à fronteira, o teorema está demonstrado. Resta considerar o caso $a \in A$.

Comecemos por uma versão local. Seja z_0 um maximizante local. I.e. $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para $z \in D_R(z_0)$ para $R > 0$ suficientemente pequeno. Queremos mostrar que f é constante[11] nesse disco. Supondo (por absurdo) que existe $z_1 = z_0 + re^{i\theta} \in D_R(z_0)$, $r < R$, tal que $|f(z_1)| < |f(z_0)|$. Como f é contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f(z_0 + re^{i(\theta+t)})| < \frac{|f(z_0)|+|f(z_1)|}{2}$ para cada $0 < t < \varepsilon$. Assim, usando (5.13) e o facto de $|f(z_0)|$ ser um máximo local,

$$\begin{aligned}|f(z_0)| =& \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{2\pi} f(z_0 + re^{i(\theta+t)})\,dt\right| \\ <& \frac{1}{2\pi}\left[\varepsilon\frac{|f(z_0)| + |f(z_1)|}{2} + (2\pi - \varepsilon)|f(z_0)|\right] \\ =& |f(z_0)| - \frac{\varepsilon}{4\pi}(|f(z_0)| - |f(z_1)|) < |f(z_0)|,\end{aligned}$$

chegamos a uma contradição.

Pela continuação analítica, a função é globalmente constante. □

6.6. **Série de Laurent.** Se sabemos que uma função é analítica num disco excepto num ponto, o teorema seguinte permite escrevê-la como uma série de potências (incluindo potências negativas), chamada de Laurent.

Teorema 6.10 (Laurent)**.** *Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e uma função $f\colon D_r(z_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ analítica. Então,*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \textit{(série de Laurent)} \tag{6.3}$$

para todo $z \in D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, com

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{6.4}$$

onde $\gamma = \partial D_r(z_0)$.

Demonstração. Escolhemos os caminhos γ_1 e γ_2 descrevendo as circunferências concêntricas em z_0 de raios $r_1 < r_2 < r$, e λ um arco unindo γ_1 a γ_2. O caminho

$$\sigma = -\gamma_1 + \gamma_2 + \lambda + (-\lambda)$$

[11] Anteriormente já provámos que uma função analítica é constante sse o seu módulo é constante.

é fechado e homotópico a um ponto em $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ onde f é analítica. Pela fórmula de Cauchy, para z tal que z está no interior da curva σ (logo $r_1 < |z - z_0| < r_2$),

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = f_1(z) + f_2(z)$$

onde

$$f_1(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi \quad \text{e} \quad f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi.$$

Os integrais acima não dependem dos caminhos γ_1 e γ_2 pelo teorema de Cauchy. Assim, variando esses caminhos de forma a evitar que z esteja sobre as suas curvas, temos que f_1 e f_2 são analíticas em $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$.

Observe que se $\xi \in \gamma_1([a,b])$, $|\xi - z_0|/|z - z_0| < 1$. Usando a série geométrica (6.1),

$$\frac{-1}{\xi - z} = \frac{1}{z - z_0 - (\xi - z_0)} = \frac{1}{z - z_0}\frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^n.$$

De forma semelhante para $\xi \in \gamma_2([a,b])$, temos $|z - z_0|/|\xi - z_0| < 1$ e

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n.$$

Então, para $z \in D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$,

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{z - z_0}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^n d\xi \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(\xi)(\xi - z_0)^n \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}}d\xi \\
&= \sum_{n\geq 1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1}d\xi\right]\frac{1}{(z - z_0)^n},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
f_2(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{z - z_0}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n d\xi \\
&= \sum_{n\geq 0}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi\right](z - z_0)^n.
\end{aligned}$$

□

Exercício 52. *Escreva a série de Laurent de*

(1) $f(z) = \sin\frac{1}{z^2}$ *para* $0 < |z| < 1$.

(2) $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ *para*

 (a) $0 < |z| < 1$.

 (b) $|z| > 1$.

 (c) $0 < |z - 1| < 1$.

 (d) $|z - 1| > 1$.

7. Teorema dos Resíduos

7.1. **Classificação de singularidades e resíduos.** Seja $A \subset \mathbb{C}$ aberto, $z_0 \in A$ e $f \colon A \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ analítica. Chama-se a z_0 **singularidade isolada** de A [12]. A expansão de f em série de Laurent em torno de z_0 é então dada por (6.3), i.e.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

- Se $k = \max\{n \in \mathbb{N} \colon c_{-n} \neq 0\}$ existe, então z_0 diz-se um **pólo de ordem** k [13].
- Se existem infinitos n's tais que $c_{-n} \neq 0$, então z_0 é uma **singularidade essencial** ($k = \infty$).

Observação 19. Pela definição anterior, devemos ter

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^n f(z) = \begin{cases} \infty, & n < k \\ c_{-k} \neq 0, & n = k \\ 0, & n > k. \end{cases}$$

O **resíduo de** f **em** z_0 é o coeficiente c_{-1} da série de Laurent de f em torno de z_0 e escreve-se

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = c_{-1}. \tag{7.1}$$

É então fácil verificar que:

- se z_0 é um pólo de ordem 1,
$$\operatorname{Res}(f, z_0) = c_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z).$$
- se z_0 é um pólo de ordem 2,
$$c_{-2} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0)^2 f(z)$$
e
$$\operatorname{Res}(f, z_0) = c_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) \left[f(z) - \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} \right].$$
- se z_0 é um pólo de ordem $k \in \mathbb{N}$,
$$c_{-k} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0)^k f(z),$$
$$c_{-i} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) \left[f(z) - \sum_{j=i+1}^{k} \frac{c_{-j}}{(z-z_0)^j} \right] \qquad i = 1, \dots, k,$$
e $\operatorname{Res}(f, z_0) = c_{-1}$.

Exercício 53. *Calcule* $\operatorname{Res}(f, z_0)$ *para*

1. $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$, $z_0 = 0$.
2. $f(z) = \frac{z^2}{\sin^2 z}$, $z_0 = 0$.
3. $f(z) = \tan z$, *todas as singularidades.*
4. $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1$.

---

[12] A função f diz-se então meromórfica em A.

[13] Um pólo de ordem 0 também é chamado de **singularidade removível** pois significa que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $c_{-n} = 0$.

(5) $f(z) = \frac{z^2-1}{(z^2+1)^2}$, $z_0 = i$.
(6) $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-1}$, $z_0 = 1$.
(7) $f(z) = \frac{e^z-1}{\sin^3 z}$, $z_0 = 0$.

7.2. Teorema dos resíduos.

Teorema 7.1 (dos resíduos)**.** *Seja $A \subset \mathbb{C}$ uma região simplesmente conexa, uma singularidade $z_0 \in A$, $f\colon A-\{z_0\} \to \mathbb{C}$ analítica, e um caminho fechado $\gamma\colon [a,b] \to A$ regular por troços tal que $z_0 \notin \gamma([a,b])$. Então,*

$$\int_\gamma f = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0).\operatorname{rot}(\gamma, z_0). \tag{7.2}$$

Observação 20. Podemos facilmente generalizar o teorema dos resíduos para regiões A contendo um número finito de singularidades isoladas. Bastando para isso considerar uniões de curvas fechadas em regiões contendo apenas uma singularidade.

Demonstração. A série de Laurent de f em redor de z_0 em $\{z \in \mathbb{C}\colon 0 < |z - z_0| < r\} \subset A$ é

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$$

onde os coeficientes c_n são dados por (6.4). Logo,

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \sum_{n\geq 1} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} dz + \int_\gamma \sum_{n\geq 0} c_n (z - z_0)^n dz.$$

Como a função dentro do último integral acima é analítica, pelo teorema de Cauchy o integral é zero. Assim, obtemos

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \sum_{n\geq 1} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} dz = c_{-1} 2\pi i \operatorname{rot}(\gamma, z_0),$$

onde utilizámos o teorema fundamental do cálculo para determinar o seguinte integral:

$$\int_\gamma \frac{1}{(z - z_0)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i \operatorname{rot}(\gamma, z_0), & n = 1 \\ \left[\frac{(z-z_0)^{1-n}}{1-n}\right]_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} = 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

□

Exercício 54. *Calcule*

(1) $\int_\gamma (z+1)^{-3} dz$ *com* $\gamma = \partial D_2(0)$ *e* γ *o quadrado com vértices em* $0, 1, 1+i, i$.
(2) $\int_\gamma \frac{z}{z^2+2z+5} dz$, *com* $\gamma = \partial D_1(0)$.
(3) $\int_\gamma \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$, *com* $\gamma = \partial D_2(0)$.
(4) $\int_\gamma \frac{e^{-z^2}}{z^2} dz$, *com* $\gamma(t) = a\cos t + ib \sin t$, $a, b > 0$ *e* $t \in [0, 2\pi]$.

7.3. **Aplicação do teorema dos resíduos a integrais em $\mathbb{R}$.** Vamos introduzir a aplicação do teorema de resíduos ao cálculo integral em $\mathbb{R}$ através de exemplos.

Exemplo 6. Queremos calcular o integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(y)}{(y^2+1)^2} dy. \tag{7.3}$$

Considere o caminho λ_r que percorre o segmento de recta entre ir e $-ir$, com $r > 1$, e o caminho σ_r correspondendo à curva $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z \leq 0, |z| = r\}$. Podemos então definir um caminho fechado simples $\gamma_r = \lambda_r + \sigma_r$ com sentido positivo. Para a função

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{(z^2-1)^2}$$

temos que

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \frac{1}{2\mathrm{e}} \quad \text{e} \quad \operatorname{Res}(f, 1) = 0.$$

Logo, pelo teorema dos resíduos,

$$\int_{\gamma_r} f = \int_{\lambda_r} f + \int_{\sigma_r} f = i\pi \mathrm{e}^{-1}.$$

Note que os integrais são iguais para qualquer escolha de $r > 1$ e que

$$\int_{\lambda_r} f = \int_{-r}^{r} f(iy) i\, dy = i \int_{-r}^{r} \frac{\cos(y) + i\sin(y)}{(y^2+1)^2} dy.$$

Além disso,

$$\left| \int_{\sigma_r} f \right| \leq \sup_{\operatorname{Re} z \leq 0, |z|=r} |f(z)|\, \ell(\sigma_r) \leq \frac{\pi r}{(r^2-1)^2}$$

e

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\sigma_r} f = 0.$$

Queremos calcular o integral (7.3) da função contínua em $\mathbb{R}$ dada por $y \mapsto \cos(y)/(y^2+1)^2$. Esta função é integrável em $\mathbb{R}$ pois o seu valor absoluto é limitado em $[0,1]$ por 1, em $[1,+\infty[$ por $1/y^2$ e $\int_1^{+\infty}(1/y^2)dy$ converge. Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(y)}{(y^2+1)^2} dy &= \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \frac{\cos(y)}{(y^2+1)^2} dy = \lim_{r\to+\infty} \operatorname{Im} \int_{\lambda_r} f \\ &= \lim_{r\to+\infty} \operatorname{Im} \left[i\pi\mathrm{e}^{-1} - \int_{\sigma_r} f \right] = \pi \mathrm{e}^{-1}.\end{aligned}$$

Observação 21. Note que uma função contínua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é integrável em $\mathbb{R}$ se existem os limites

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f \quad \text{e} \quad \lim_{b\to-\infty} \int_b^0 f.$$

Nesse caso,

$$\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a f + \lim_{b\to-\infty} \int_b^0 f$$

e em particular temos que o chamado **valor principal do integral**

$$\text{v.p}\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f$$

é igual ao integral $\int_{\mathbb{R}} f$. Por vezes é possível calcular o valor principal mesmo para funções que não são integráveis.

Lema 7.2. *Seja f analítica com um pólo de ordem 1 em z_0, e um caminho $\sigma_r(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [a,b]$. Então,*

$$\lim_{r\to 0}\int_{\sigma_r} f = (b-a)i\,\mathrm{Res}(f,z_0). \tag{7.4}$$

Demonstração. Podemos escrever a série de Laurent de f em torno de z_0 como

$$f(z) = \frac{\mathrm{Res}(f,z_0)}{z-z_0} + h(z),$$

onde h é analítica. O integral de h sobre σ_r pode ser estimado por

$$\left|\int_{\sigma_r} h\right| \le \sup_{z\in\sigma_r}|h(z)|\,\ell(\sigma_r) = (b-a)r\sup_{z\in\sigma_r}|h(z)| \to 0 \quad \text{quando} \quad r\to 0.$$

Finalmente,

$$\int_{\sigma_r}\frac{\mathrm{Res}(f,z_0)}{z-z_0}dz = (b-a)i\,\mathrm{Res}(f,z_0).$$

□

Exemplo 7. Determinar o valor de[14]

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}dx.$$

Considere a função $f(z) = e^{iz}/z$ definida em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Observe que

$$\mathrm{Im}\, f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

O ponto $z = 0$ é um pólo simples com $\mathrm{Res}(f,0) = 1$.

Sejam $0 < r < R$. Como não podemos integrar a função sobre um caminho que cruze o ponto $z = 0$, escolhemos então um caminho

$$\gamma = \lambda_{R,r} + \nu_r + \widetilde{\lambda}_{R,r} + \sigma_R$$

onde temos os segmentos de recta sobre os reais,

$$\lambda_{R,r}(t) = -R(1-t) - rt \quad \text{e} \quad \widetilde{\lambda}_{R,r}(t) = r(1-t) + Rt,$$

e as semicircunferências centradas em 0,

$$\nu_r(t) = re^{-i\pi(1-t)} \quad \text{e} \quad \sigma_R(t) = Re^{i\pi t},$$

com $t \in [0,1]$ (ver Figura 6). Claramente, $\int_\gamma f = 0$.

[14]Note que esta função não é integrável à Lebesgue em $\mathbb{R}^+$. De facto,

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \ge \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{2\pi n+\pi/4}^{2\pi n+3\pi/4}\left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \ge \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2\pi n+3\pi/4}$$

e esta série diverge.

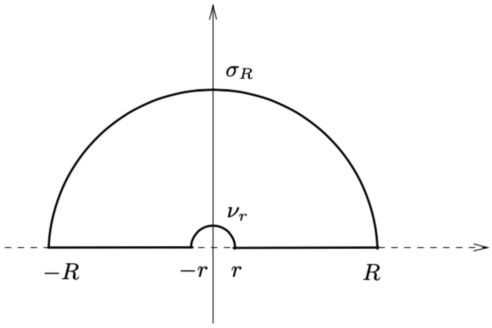

FIGURA 6. Os caminhos que compõe γ.

Para a curva exterior temos

$$\int_{\sigma_R} f = i\pi \int_0^1 \mathrm{e}^{-R\sin(\pi t)+iR\cos(\pi t)} dt,$$

o que implica

$$\begin{aligned}\left|\int_{\sigma_R} f\right| &\leq \pi \int_0^1 \mathrm{e}^{-R\sin(\pi t)} dt \\ &= \pi \left(\int_0^{1/\sqrt{R}} + \int_{1/\sqrt{R}}^{1-1/\sqrt{R}} + \int_{1-1/\sqrt{R}}^{1} \right) \mathrm{e}^{-R\sin(\pi t)} dt \\ &\leq \pi \left(\frac{1}{\sqrt{R}} + \mathrm{e}^{-R\sin(\pi/\sqrt{R})} + \frac{1}{\sqrt{R}} \right) \to 0 \quad \text{quando} \quad R \to +\infty.\end{aligned}$$

Então,

$$\lim_{R\to+\infty} \left(\int_{-R}^{-r} f + \int_r^R f \right) + \int_{\nu_r} f = 0.$$

Em particular, reparando que f é par, provámos a convergência de

$$\lim_{R\to+\infty} \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{\nu_r} f.$$

para qualquer $r > 0$. Usando o Lema 7.2 e tendo em conta o sentido do caminho, $\lim_{r\to 0} \int_{\nu_r} f = -i\pi$. Podemos então concluir que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx = \pi/2.$$

Exercício 55. *Calcule*

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx$
(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ix}}{1+ix} dx$
(3) *(*)* $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2} dx$

8. Análise de Fourier

Vamos ver agora como funções reais definidas num intervalo compacto podem ser escritas como séries de funções trigonométricas (somas de senos e cossenos). Este facto irá ser útil na determinação de soluções de equações diferenciais.

8.1. **Polinómios trigonométricos.** A função seno pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$f(x) = H \sin(2\pi\omega x + \phi), \quad x \in \mathbb{R},$$

onde $H > 0$ é a amplitude, $\omega \in \mathbb{R}$ a frequência e $\phi \in [0, 2\pi[$ a fase. Esta função é periódica, i.e. $f(x+T) = f(x)$, com período $T = \omega^{-1}$. A fase indica que o valor inicial da função (em $x = 0$) é $H \sin \phi$.

Como $\sin(a+b) = \cos a \, \sin b + \sin a \, \cos b$ [15], podemos escrever

$$f(x) = A\cos(2\pi\omega x) + B\sin(2\pi\omega x)$$

com $A = H\sin\phi$ e $B = H\cos\phi$. Além disso,

$$f(x) = ce^{2\pi\omega ix} + \overline{c}e^{-2\pi\omega ix}$$

onde $c = \frac{A}{2} - i\frac{B}{2}$.

Consideremos agora uma função que é a soma de dois senos com frequências distintas $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} g(x) &= H_1 \sin(2\pi\omega_1 x + \phi_1) + H_2 \sin(2\pi\omega_2 x + \phi_2) \\ &= c_1 e^{2\pi\omega_1 ix} + \overline{c}_1 e^{-2\pi\omega_1 ix} + c_2 e^{2\pi\omega_2 ix} + \overline{c}_2 e^{-2\pi\omega_2 ix}. \end{aligned}$$

Esta função pode já não ser periódica, dependendo da relação entre as frequências.

Proposição 8.1. *g é periódica sse $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{Q}$.*

Demonstração. A periodicidade significa que $g(x+T) = g(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, onde $T > 0$ é o período. Ou seja, $e^{2\pi i\omega_j T} = 1$ e $\omega_j T \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2$. Então existem inteiros n_1, n_2 tais que $T = n_1/\omega_1 = n_2/\omega_2$ e que ω_1/ω_2 é um número racional. ☐

Um polinómio trigonométrico é uma função na forma

$$h(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j e^{2\pi i\omega_j x}. \tag{8.1}$$

Exercício 56. *Encontre condições nas frequências $\omega_1, \dots, \omega_m$ para que um polinómio trigonométrico seja periódico.*

Exemplo 8. Um fenómeno que depende de forças periódicas com efeito aditivo é a variação da altura da maré $h(t)$ no instante t. Esta é influenciada pela rotação da Lua em redor da Terra (com período $1/\omega_1 = 27$ dias), pela rotação da Terra em torno do seu eixo (período $1/\omega_2 = 24$ horas) e pela translação da Terra à volta do Sol (período $1/\omega_3 = 1$ ano), entre outros factores periódicos. Este modelo simples foi considerado por Lord Kelvin no século XIX para determinar as oscilações das marés. Temos assim uma função na forma (8.1). Para prever as marés é necessário conhecer as amplitudes c_j correspondendo a cada uma das forças presentes. As que têm valores superiores em módulo, as mais influentes, darão uma maior contribuição para a periodicidade do fenómeno. O lema seguinte permite calcular esses valores através de dados recolhidos ao longo do tempo.

[15] Basta desenvolver a expressão $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$.

Lema 8.2. *Sejam* $\omega_1, \dots, \omega_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *distintos e*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j e^{2\pi i \omega_j x}.$$

Então, para qualquer $a \in \mathbb{R}$ *e* $j = 1, \dots, m$,

$$c_j = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-2\pi i \omega_j x}\, dx.$$

Demonstração. Calculando o integral

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) e^{-2\pi i \omega_j x}\, dx &= \sum_{j'=1}^{m} c_{j'} \int_a^b e^{2\pi i(\omega_{j'} - \omega_j)x}\, dx \\ &= (b-a)c_j + \sum_{j' \neq j} \frac{c_{j'}}{2\pi i(\omega_{j'} - \omega_j)} \left[e^{2\pi i(\omega_{j'} - \omega_j)x} \right]_a^b, \end{aligned}$$

chegamos à conclusão que

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-2\pi i \omega_j x}\, dx - c_j \right| \leq \frac{1}{b-a} \sum_{j' \neq j} \frac{|c_{j'}|}{\left|\omega_{j'} - \omega_j\right|} \to 0$$

quando $b \to +\infty$. □

Considere agora um número infinito de termos com frequências $\omega_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$ na forma

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i k x}$$

Esta função, se a série converge, é periódica com período 1. É chamada série trigonométrica. Observe que converge absoluta e uniformemente se $\sum_k |c_k|$ converge. Nesse caso será uma função analítica simples de derivar e integrar termo a termo.

Exercício 57. *Mostre que*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i k x} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \cos(2\pi n x) + B_n \sin(2\pi n x)$$

com $c_n = \frac{A_n}{2} - i\frac{B_n}{2}$ *e* $c_{-n} = \bar{c}_n$, $n \geq 1$, *e* $c_0 = A_0/2$.

Exercício 58. *Mostre que*

$$\int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x}\, dx = c_k.$$

A questão central da próxima secção é saber que funções se podem escrever na forma de uma série trigonométrica.

8.2. **Séries de Fourier.** Seja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Dizemos que

- f é contínua por troços se tem um número finito de descontinuidades $a_1, \dots, a_n \in [0,1]$, e $f(a_i^+)$ e $f(a_i^-)$ são finitos para qualquer $i = 1, \dots, n$.
- f é diferenciável por troços se f e f' (onde estiver definida) forem contínuas por troços.

- $f \in L^1([0,1])$ se é integrável (à Lebesgue relativamente à medida de Lebesgue em $[0,1]$). i.e. $\int_0^1 |f(x)|\,dx < +\infty$.
- $f \in L^2([0,1])$ se $\int_0^1 |f(x)|^2\,dx < +\infty$.

Observação 22. É simples verificar que se uma função é diferenciável então é contínua, logo também contínua por troços. Se é contínua por troços em $[0,1]$, também é L^1 e L^2 em $[0,1]$. Note que se a função tivesse domínio não compacto, poderia ser L^1 mas não L^2. Por exemplo, $f(x) = x^{-1/2}$ em $]0,1]$ é integrável, mas $f(x)^2 = x^{-1}$ já não o é.

Seja $f \in L^1([0,1])$. O **coeficiente de Fourier** de f de ordem $k \in \mathbb{Z}$ é o número complexo dado por

$$f_k = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}\,dx.$$

A **série de Fourier** de f é

$$S_f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k e^{2\pi ikx}, \qquad x \in [0,1].$$

Exemplo 9.

(1) $f(x) = 1$. Para $k = 0$, $f_0 = \int_0^1 f(x)\,dx = 1$. Se $k \neq 0$, então

$$f_k = \int_0^1 e^{-2\pi ikx}\,dx = 0.$$

Logo, $S_f(x) = 1$. Note que $S_f = f$.

(2) Dado $n \in \mathbb{Z}$, seja $f(x) = e^{2\pi inx}$. Assim,

$$f_k = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Temos então $S_f = f$.

(3) $f(x) = x$. Usando integração por partes obtemos

$$f_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0 \\ -\frac{1}{2\pi ik}, & k \neq 0. \end{cases}$$

Assim,

$$S_f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} -\frac{1}{2\pi ik}e^{2\pi ikx}.$$

Observe que S_f não converge absolutamente porque $\sum_k \left|\frac{1}{2\pi ik}e^{2\pi ikx}\right| = \frac{1}{2\pi}\sum_k \frac{1}{|k|}$ diverge. No entanto pode convergir pontualmente. Por exemplo, $S_f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \sum_k j\frac{(-1)^k}{2\pi ik}$ converge.

Note ainda que $S_f(0) = S_f(1)$, logo não podemos ter $S_f = f$ pois $f(0) \neq f(1)$.

8.3. **Outros intervalos.** Podemos agora generalizar as séries de Fourier para funções em outros intervalos compactos. Basta notar que podemos transformar uma função $g\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, com $\alpha < \beta$, noutra definida em $[0,1]$:

$$f(x) = g(\alpha + x(\beta-\alpha)), \qquad x \in [0,1].$$

Isto é equivalente a

$$g(x) = f\left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right), \qquad x \in [\alpha,\beta].$$

Temos assim a série de Fourier de g dada por um rescalonamento da de f:

$$S_g(x) = S_f\left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k e^{2\pi i k \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}},$$

onde

$$g_k = f_k = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta g(x) e^{-2\pi i k \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}\, dx$$

após mudança de variáveis.

Exercício 59. *Mostre que a série de Fourier de $g\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ pode-se escrever na forma:*

$$S_g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{\beta-\alpha}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{\beta-\alpha}\right)$$

com

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta g(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{\beta-\alpha}\right) dx, \\ b_n &= \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta g(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{\beta-\alpha}\right) dx. \end{aligned}$$

Exercício 60. *Escreva a série de Fourier de g definida em $[-L,L]$. Mostre que se g é par então $b_n = 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, e se é ímpar temos $a_n = 0$.*

8.4. **Teorema de Fourier.** O nosso objectivo agora é determinar condições para que as séries de Fourier sejam iguais às funções.

Proposição 8.3. *Seja $f \in L^2([0,1])$.*

(1) *(Desigualdade de Bessel)*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f_k|^2 \le \int_0^1 |f(x)|^2\, dx.$$

(2) *(Lema de Riemann-Lebesgue)*

$$\lim_{|k|\to+\infty} f_k = 0.$$

Demonstração.

(1) Seja para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(x) = \sum_{|k|\le n} f_k e^{2\pi i k x}.$$

Temos então,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 |f - S_n|^2\, dx = \int_0^1 (f - S_n)(\overline{f - S_n})\, dx \\ &= \int_0^1 f\overline{f}\, dx - \int_0^1 (S_n\overline{f} + \overline{S_n}f)\, dx + \int_0^1 S_n\overline{S_n}\, dx. \end{aligned}$$

Agora, note que

$$\int_0^1 \overline{S_n}f\, dx = \sum_{|k|\leq n} \overline{f_k} \int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}\, dx = \sum_{|k|\leq n} |f_k|^2$$

e

$$\int_0^1 S_n\overline{S_n}\, dx = \sum_{|k|\leq n} \sum_{|k'|\leq n} f_k\overline{f_{k'}} \int_0^1 e^{2\pi i(k-k')x}\, dx = \sum_{|k|\leq n} |f_k|^2.$$

Finalmente, juntando as relações anteriores com a desigualdade acima,

$$0 \leq \int_0^1 |f|^2\, dx - \sum_{|k|\leq n} |f_k|^2$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \to +\infty$ obtemos a desigualdade de Bessel.

(2) A desigualdade de Bessel implica imediatamente que $|f_k|^2 \to 0$ uma vez que a série é convergente.

□

Teorema 8.4 (Fourier)**.** *Se $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ é diferenciável por troços, então*

$$S_f(x) = \begin{cases} \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x \in]0,1[\\ \frac{f(0^+)+f(1^-)}{2}, & x \in \{0,1\} \end{cases}$$

O teorema de Fourier acima é demonstrado na secção 8.5.

Corolário 8.5 (Fourier)**.** *Se $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua, diferenciável por troços e $f(0) = f(1)$, então*

(1) $S_f = f$.
(2) S_f *converge absoluta e uniformemente.*

Demonstração.

(1) Como a função é contínua, o Teorema de Fourier garante que é igual à série de Fourier.
(2) Vamos primeiro calcular os coeficientes de Fourier de f':

$$f'_k = \int_0^1 f'(x)e^{-2\pi ikx}\, dx = 2\pi ikf_k.$$

Temos assim,

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|f_k e^{2\pi ikx}\right| &= \sum_k |f_k| = |f_0| + \sum_{k\neq 0} \left|\frac{f'_k}{2\pi k}\right| \\ &\leq |f_0| + \sum_{k\neq 0} |f'_k|^2 + \sum_{k\neq 0} \frac{1}{|k|^2}, \end{aligned}$$

onde usámos a desigualdade $|f'_k/k| \leq \max\{|f'_k|^2, 1/|k|^2\}$.

Como f' é contínua por troços, é também L^2. Assim, pela desigualdade de Bessel a soma acima é convergente. Logo, S_f converge absoluta e uniformemente. $\square$

8.5. **Demonstração do Teorema de Fourier.** Queremos determinar o limite de S_n quando $n \to +\infty$. Podemos desenvolver a soma na seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{|k|\leq n} c_k e^{2\pi i k x} \\ &= \sum_{|k|\leq n} \left(\int_0^1 f(u) e^{-2\pi i k u}\, du \right) e^{2\pi i k x} \\ &= \int_0^1 f(u) \sum_{|k|\leq n} e^{2\pi i k (x-u)}\, du \\ &= \int_0^1 f(u) D_n(x-u)\, du, \end{aligned}$$

onde a função periódica D_n com período 1 é dada por

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{|k|\leq n} e^{2\pi i k x} = \sum_{k=0}^{2n} e^{2\pi i (k-n) x} \\ &= e^{-2\pi i n x} \frac{1 - e^{2\pi i (2n+1) x}}{1 - e^{2\pi i x}} \\ &= \frac{e^{2\pi i (n+1) x} - e^{-2\pi i n x}}{e^{2\pi i x} - 1}. \end{aligned}$$

Temos também

$$\int_0^1 D_n(x)\, dx = 1 \quad \text{e} \quad \int_0^{1/2} D_n(x)\, dx = \frac{1}{2}.$$

Consideramos a extensão periódica de f dada por $\tilde{f}$ ao intervalo $[-1, 2]$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x+1), & x \in [-1, 0[\\ f(x), & x \in [0, 1] \\ f(x-1), & x \in]1, 2]. \end{cases}$$

Pela mudança de variável $v = x - u$ e usando a periodicidade de D_n obtemos

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \int_{-1}^0 \tilde{f}(u) D_n(x-v)\, dv \\ &= \int_x^{x+1} \tilde{f}(x-v) D_n(v)\, dv \\ &= \int_0^1 \tilde{f}(x-v) D_n(v)\, dv. \end{aligned}$$

Falta mostrar para cada $x \in [0,1]$ que a seguinte expressão converge para zero quando $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
S_n(x) - \frac{\tilde{f}(x^+) + \tilde{f}(x^-)}{2} &= \int_0^{1/2} [\tilde{f}(x-v) - \tilde{f}(x^-)] D_n(v)\, dv \\
&\quad + \int_{1/2}^{1} [\tilde{f}(x-v) - \tilde{f}(x^+)] D_n(v)\, dv \\
&= \int_0^1 g(v)[e^{2\pi i(n+1)v} - e^{-2\pi i n v}]\, dv,
\end{aligned}$$

onde definimos a função

$$g(v) = \begin{cases} \frac{\tilde{f}(x-v)-\tilde{f}(x^-)}{v} \frac{v}{e^{2\pi i v}-1}, & 0 \le v \le \frac{1}{2} \\ \frac{\tilde{f}(x+1-v)-\tilde{f}(x^+)}{1-v} \frac{1-v}{e^{2\pi i v}-1}, & \frac{1}{2} < v \le 1. \end{cases}$$

Ambos os ramos correspondem a funções contínuas por troços excepto possivelmente nos pontos 0 e 1. Verificando nesses extremos do intervalo $[0,1]$,

$$\lim_{v \to 0^+} g(v) = \frac{\tilde{f}'(x^-)}{2\pi i} \quad \text{e} \quad \lim_{v \to 1^-} g(v) = \frac{\tilde{f}'(x^+)}{2\pi i}.$$

Como $\tilde{f}'$ é contínua por troços, g é contínua por troços, L^2 e L^1, com coeficientes de Fourier g_k, $k \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$S_n(x) - \frac{\tilde{f}(x^+) + \tilde{f}(x^-)}{2} = g_{-(n+1)} - g_n.$$

Pelo lema de Riemann-Lebesgue, $g_n, g_{-n} \to 0$ com $n \to +\infty$.

8.6. **Transformada de Fourier.** Quando temos uma função definida em $\mathbb{R}$, também podemos fazer uma análise de Fourier usando integrais e frequências não inteiras. O papel dos coeficientes de Fourier é tomado pela transformada de Fourier. A série de Fourier corresponde aqui à transformada de Fourier inversa.

Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$. A transformada de Fourier de f é a função $\hat{f} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i \omega x}\, dx.$$

Frequentemente iremos usar também a notação

$$\mathcal{F} f := \hat{f}$$

tal que $\mathcal{F}$ é visto como um operador entre espaços de funções.

Note que $\hat{f}$ existe sempre pois f é integrável, i.e. $\int |f(x)e^{-2\pi i \omega x}| dx \le \int |f| < \infty$.

Exemplo 10. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Temos assim,

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i \omega x}\, dx = \begin{cases} \frac{\sin \omega}{\omega}, & \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 2, & \omega = 0. \end{cases}$$

Observação 23. $\hat{f}$ pode não ser L^1 como no caso do exemplo 10 (recorde o exemplo 7).

Exemplo 11. Considere $f(x) = e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2}{(2\pi\omega)^2 + 1}.$$

Note que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

8.7. **Propriedades da transformada de Fourier.**

Proposição 8.6. $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R})$ *e é limitada.*

Demonstração. Basta usar o facto de f ser integrável para mostrar que $\hat{f}$ é limitada. Para obtermos a continuidade escrevemos

$$\lim_{h\to 0} \hat{f}(\omega + h) - \hat{f}(\omega) = \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i\omega x}(e^{-2\pi i h x} - 1)\, dx.$$

O valor absoluto da função integranda é majorado por $|f(x)|$. Pelo teorema da convergência dominada, o limite comuta com o integral. Logo, a função $\hat{f}$ é contínua. □

Teorema 8.7 (Lema de Riemann-Lebesgue)**.** $\lim_{|\omega|\to+\infty} \hat{f}(\omega) = 0$.

Demonstração. [...] □

Proposição 8.8. *Se* $g(x) := xf(x)$ *é* $L^1(\mathbb{R})$*, então* $\hat{f}$ *é diferenciável e*

$$(\mathcal{F}f)'(\omega) = (\hat{f})'(\omega) = -2\pi i \hat{g}(\omega).$$

Demonstração. □

Exercício 61. *Dada* $f \in L^1(\mathbb{R})$*, calcule a transformada de Fourier de:*

- $f_a(x) = f(x - a)$.
- $g(x) = e^{aix} f(x)$.

Exercício 62. *Mostre que* $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ *é uma transformação linear.*

8.8. **Transformada de Fourier inversa.** Uma função definida em $\mathbb{R}$ é contínua por troços se tem um número finito de saltos finitos para qualquer intervalo finito.

Teorema 8.9. *Seja* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *contínua por troços e* $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$. *Então,*

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} \widehat{f}(\omega) e^{2\pi i\omega x}\, d\omega, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observação 24. Se $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, temos $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i\omega x}\, d\omega$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\int_{-A}^{A} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega x}\, d\omega &= \int_{-A}^{A} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-2\pi i \omega u}\, du\, e^{2\pi i \omega x}\, d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(u) \int_{-A}^{A} e^{2\pi i \omega (x-u)}\, d\omega\, du \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{\sin[2\pi A(x-u)]}{x-u}\, du \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x-v) \frac{\sin(2\pi A v)}{v}\, dv.
\end{aligned}$$

Usando o teorema dos resíduos, sabemos que para qualquer $a > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(av)}{v}\, dv = \frac{\pi}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{-A}^{A} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega x}\, d\omega - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} \left[f(x-v) - f(x^+)\right] \frac{\sin(2\pi A v)}{v}\, dv \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[f(x-v) - f(x^-)\right] \frac{\sin(2\pi A v)}{v}\, dv.
\end{aligned}$$

Resta analisar os termos do lado direito para mostrar que convergem para zero quando $A \to +\infty$.

Começamos com o segundo termo (para o primeiro usa-se a mesma ideia):

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \left[f(x-v) - f(x^-)\right] \frac{\sin(2\pi A v)}{v}\, dv &= \int_0^{B} g(v) \sin(2\pi A v)\, dv \\
&+ \int_B^{+\infty} f(x-v) \frac{\sin(2\pi A v)}{v}\, dv \\
&- \int_B^{+\infty} f(x^-) \frac{\sin(2\pi A v)}{v}\, dv
\end{aligned}$$

onde $B > 0$ e

$$g(v) = \frac{f(x-v) - f(x^-)}{v}$$

é uma função limitada para $v \in]0, B[$. Note que

$$\int_0^{B} g(v) \sin(2\pi A v)\, dv = \frac{\hat{g}(A) - \hat{g}(-A)}{2i}.$$

Pelo lema de Riemann-Lebesgue, converge para zero quando $A \to +\infty$. O mesmo para os restantes integrais. □

Exercício 63. *Encontre as transformadas de Fourier:*

(1) $f(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$,

$$\hat{f}(\omega) = e^{-(2\pi\omega)^2/2}.$$

(2) $f(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2 + 2\pi i \alpha x}$,

$$\hat{f}(\omega) = e^{-(2\pi)^2(\omega - \alpha)^2/2}.$$

(3) $f(x) = e^{-|x|/2+2\pi i\alpha x}$,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2}{1+(2\pi)^2(\omega-\alpha)^2}.$$

8.9. **Aplicações.**

8.9.1. *Teorema de Amostragem de Shannon.* O ouvido humano só capta frequências menores que cerca de 20kHz. Se tivermos um sinal sonoro f tal que $\hat{f}$ está limitado num intervalo $[-c,c]$, então o teorema seguinte permite obter f conhecendo apenas alguns dos seus valores (amostragem). Na passagem para a gravação digital, este resultado foi a garantia de que a música não se perdia por apenas guardarmos amostragens do sinal.

Teorema 8.10. *Seja $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ tal que $\hat{f}(\omega) = 0$ se $|\omega| > c$. Então,*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{2c}\right)\frac{\sin[2\pi(cx-k/2)]}{2\pi(cx-k/2)}.$$

e a convergência é uniforme em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Considere a série de Fourier de $\hat{f}$ em $[-c,c]$ dada por

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi ik(\omega+c)/(2c)}$$

onde

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} \hat{f}(\omega)e^{-2\pi ik(\omega+c)/(2c)}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2c}e^{-2\pi ik/2}\int_{-c}^{c} \hat{f}(\omega)e^{-2\pi ik\omega/(2c)}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2c}e^{-2\pi ik/2} f\left(-\frac{n}{2c}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2c}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{2c}\right)e^{-2\pi ik\omega/(2c)}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{F}^{-1}\hat{f}(x) \\ &= \frac{1}{2c}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{2c}\right)\int_{-c}^{c} e^{-2\pi ik\omega/(2c)+2\pi i\omega x}\,d\omega \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{2c}\right)\frac{\sin[2\pi(cx-k/2)]}{2\pi(cx-k/2)} \end{aligned}$$

□

Agradecimentos

Agradeço às turmas do 3º ano MAEG de 2005-2006 e 2006-2007, em particular a Paulo Lopes, Cláudia Duarte e Pedro Gonçalves, pela ajuda na detecção de gralhas em versões anteriores deste texto.

Referências

[1] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis.* McGraw-Hill, 3rd ed, 1979.
[2] J. E. Marsden and M. J. Hoffman. *Basic Complex Analysis.* Freeman, 3rd ed, 1999.
[3] T. W. Körner. *Fourier Analysis.* Cambridge, 1st ed, 1988.

Departamento de Matemática, ISEG, Universidade de Lisboa, Rua do Quelhas 6, 1200-781 Lisboa, Portugal
Email address: jldias@iseg.ulisboa.pt