Estatística I

Licenciatura em Gestão

2.º Ano/1.º Semestre

2023/2024

Aulas Teóricas N.ºs 14 e 15 (Semana 8)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teóricas (Semanas 1 a 3)	Aulas Teóricas (Semanas 3 a 5)	Aulas Teóricas (Semanas 5 a 7)	Aulas Teóricas (Semanas 8 a 13)
• **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	• **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Distribuições Teóricas • **Capítulo 6**: Amostragem. Distribuições por Amostragem.

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

https://cas.iseg.ulisboa.pt

Aula 14	Regra do valor esperado iterado. Exemplo e demonstração. Independência em média. Variância condicionada. Propriedades. **Início do capítulo 4**: distribuição uniforme discreta, distribuição de Bernoulli e distribuição Binomial. Propriedades.
Aula 15	Continuação da aula anterior. Propriedades da binomial, cálculo de probabilidades e exemplo. Distribuição de Poisson. Cálculo de probabilidades e propriedades. Exemplo.

Pares Aleatórios Contínuos: Exercícios

1

Distribuição Conjunta, Marginais e Condicionais; Independência; Covariância e Correlação

5.13 Considere a variável aleatória bidimensional contínua (X, Y) com função densidade de probabilidade conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & , 0 < x < y < 1 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y.

(b) Calcule a $V(X|Y = y)$.

(c) Verifique que $E(X) = E[E(X|Y)]$.

Exercício 5.13 (a): Coeficiente de Correlação entre X e Y

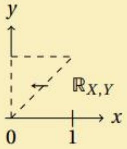
- **Par aleatório**

  (X, Y)

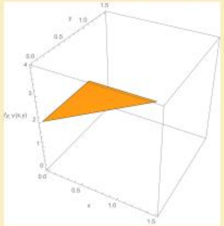
- **F.d.p. conjunta**

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- **Contradomínio de** (X,Y), $\mathbb{R}_{X,Y}$



- **Gráfico da f.d.p. conjunta de** (X,Y)



- **Correlação entre** X **e** Y

  Uma vez que se pretende calcular

$$\begin{aligned} corr(X,Y) &= \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\times V(Y)}} \\ &= \frac{E(XY) - E(X)\times E(Y)}{\sqrt{[E(X^2) - E^2(X)]\times[E(Y^2) - E^2(Y)]}} \end{aligned}$$

  é necessário calcular diversos momentos...

- **Valor esperado, 2o. momento e variância de** X

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \times f_X(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\right] dx \\ &= \int_0^1 x \times \left[\int_x^1 2\,dy\right] dx \\ &= \int_0^1 x \times \left[(2y)\Big|_x^1\right] dx \\ &= \int_0^1 x \times 2(1-x)\,dx \qquad [f_X(x) = 2(1-x), \quad 0 < x < 1] \\ &= \left(x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exercício 5.13 (a): Coeficiente de Correlação entre X e Y

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f_X(x)\,dx \\
&= \int_0^1 x^2 \times 2(1-x)\,dx \\
&= \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{6} \\
V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\
&= \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
&= \frac{1}{18}
\end{aligned}$$

- **Valor esperado, 2o. momento e variância de Y**

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \times f_Y(y)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} y \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\right] dy \\
&= \int_0^1 y \times \left[\int_0^y 2\,dx\right] dy \\
&= \int_0^1 y \times \left[(2x)|_0^y\right] dy \\
&= \int_0^1 y \times 2y\,dy & [f_Y(y) = 2y, \quad 0 < y < 1] \\
&= \left(\frac{2y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \times f_Y(y)\,dy \\
&= \int_0^1 y^2 \times 2y\,dy \\
&= \left(\frac{2x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\
&= \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\
&= \frac{1}{18}
\end{aligned}$$

Exercício 5.13 (a): Coeficiente de Correlação entre X e Y

- **Valor esperado de** XY

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy \times f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1\int_x^1 xy \times 2\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 x\left(\int_x^1 2y\,dy\right)dx \\
&= \int_0^1 x\left(y^2\Big|_x^1\right)dx \\
&= \int_0^1 x(1-x^2)\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \left(\frac{x^2}{1}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_x^1 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

- **Covariância entre** X **e** Y

$$
\begin{aligned}
cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)\times E(Y) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\times\frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{36}
\end{aligned}
$$

- **Correlação pedida**

$$
\begin{aligned}
corr(X,Y) &= \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\times V(Y)}} \\
&= \frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18}\times\frac{1}{18}}} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

- **[Obs.**
  - $corr(X,Y) = 0.5 \neq 0$ logo X e Y são v.a. DEPENDENTES.
  - $corr(X,Y) = 0.5 > 0$ donde X e Y tenderão a variar no mesmo sentido.
  - O valor de $|corr(X,Y)| = 0.5$ está relativamente afastado de 1 donde se possa adiantar que as v.a. X e Y não estão correlacionadas linearmente.]

Exercício 5.13 (b): Variância Condicional

- **F.d.p. de X condicional a $Y = y$**

$$
\begin{aligned}
f_{X|Y=y}(x) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \\
&= \begin{cases} \frac{2}{2y} = \frac{1}{y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}
\end{aligned}
$$

onde y é uma constante no intervalo $(0,1)$.

- **Variância de X condicional a $Y = y$**

$$
\begin{aligned}
V(X \mid Y = y) &= E(X^2 \mid Y = y) - E^2(X \mid Y = y) \\
&= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f_{X|Y=y}(x)\,dx\right] - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x \times f_{X|Y=y}(x)\,dx\right]^2 \\
&= \left[\int_0^y x^2 \times \frac{1}{y}\,dx\right] - \left[\int_0^y x \times \frac{1}{y}\,dx\right]^2 \\
&= \frac{1}{y} \times \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^y - \left[\frac{1}{y} \times \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^y\right]^2 \\
&= \frac{y^2}{3} - \left(\frac{y}{2}\right)^2 \\
&= \frac{y^2}{12}, \quad 0 < y < 1.
\end{aligned}
$$

Exercício 5.13 (c): E(X) = E(E(X|Y))

Verifique que $E(X) = E[E(X|Y)]$.

- **V.a. de interesse**

  $E(X \mid Y)$ é uma v.a. que toma valores

  $$E(X \mid Y = y) \stackrel{(b)}{=} \frac{y}{2}, \quad 0 < y < 1$$

  com densidade $f_Y(y)$. Assim,

$$\begin{aligned}
E[E(X|Y)] &= \int_0^1 \frac{y}{2} \times f_Y(y)\,dy \\
&\stackrel{(a)}{=} \int_0^1 \frac{y}{2} \times 2y\,dy \\
&= \left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{3} \\
&\stackrel{(a)}{=} E(X).
\end{aligned}$$

- **[Obs.**

  $E[E(X|Y)] = E(X)$ para qualquer par aleatório (X, Y)...]

Slides Professora Sofia Naique

Distribuição Uniforme Discreta

2

Variáveis Aleatórias Discretas

Variáveis Aleatórias Discretas

No contexto de v.a. discretas, há variáveis que são usadas em muitas situações e que por isso merecem ser estudadas em detalhe:

- Bernoulli
- Binomial (formulário) (Tabelas)
- Uniforme discreta
- Poisson (formulário) (Tabelas)
- Geométrica (formulário)

Distribuição Uniforme Discreta

Definição: A v. a. X segue uma **distribuição Uniforme discreta em N pontos**, $\boldsymbol{X \sim U\{1, 2, \dots, N\}}$, se a sua função de probabilidade é:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{N}, \qquad x = 1, 2, \dots, N.$$

O parâmetro caracterizador desta distribuição é N.

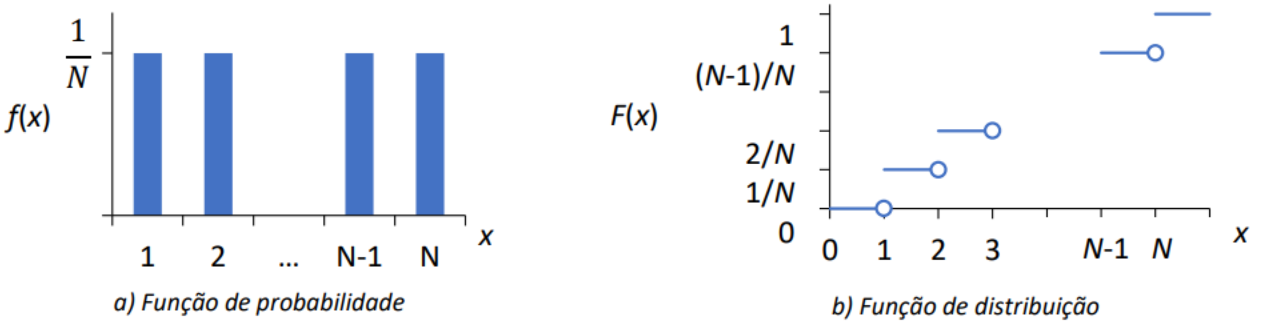


Figura 5.1: *Função de probabilidade e de distribuição da distribuição Uniforme discreta em N pontos.*

dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/25959/3/ProbabilidadesEstatistica2019.pdf

Distribuição Uniforme Discreta

Para qualquer valor de N, esta distribuição tem uma forma muita característica sendo, por exemplo, sempre simétrica em torno da sua média

Se $X \sim U\{1, 2, \dots, N\}$ então $\mu_X = E(X) = \dfrac{N+1}{2}$ e $\sigma_X^2 = Var(X) = \dfrac{N^2-1}{12}$.

dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/25959/3/ProbabilidadesEstatistica2019.pdf

Distribuição Uniforme: Exercícios

3

Variáveis Aleatórias Discretas

Considere-se a experiência aleatória que consiste no lançamento de um dado.
Seja X a v. a. que representa o valor da face voltada para cima.

a) Descreva a função de probabilidade da v. a. X.
b) Determine o valor esperado e a variância de X.
c) Qual a probabilidade de sair um número par no dado?
d) Determine a probabilidade de sair um número superior a 3 no lançamento.
e) Num lançamento, qual a probabilidade de sair um número inferior ou igual a 2?

dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/25959/3/ProbabilidadesEstatistica2019.pdf

Exercício 1: Distribuição Uniforme Discreta

a) Função de probabilidade:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{6}, \qquad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Portanto, $X \sim U\{1, 2, \dots, 6\}$.

b) $E(X) = \dfrac{6+1}{2} = 3{,}5.$

$Var(X) = \dfrac{6^2 - 1}{12} = 2{,}9167.$

c) $P(X = 2 \cup X = 4 \cup X = 6) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$

d) $P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$

e) $P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$

dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/25959/3/ProbabilidadesEstatistica2019.pdf

Distribuição Bernoulli e Binomial

Variáveis Aleatórias Discretas

4

Distribuição Bernoulli

Na prática, existem muitas experiências que admitem apenas dois resultados.

Exemplos:

- Uma peça é classificada como boa ou defeituosa;
- O resultado de um exame médico para detecção de uma doença é positivo ou negativo;
- Um paciente submetido a um tratamento, durante um período de tempo fixo, cura-se ou não da doença;
- Um entrevistado concorda ou não com a afirmação feita;
- No lançamento de um dado ocorre ou não a face “5”.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Bernoulli

As experiências com alternativas *dicotómicas* podem ser representadas, genericamente, por respostas do tipo sucesso-fracasso ou sucesso-insucesso.

- Essas experiências recebem o nome de ***Ensaios de Bernoulli*** ou Provas de Bernoulli e originam uma v.a. com *Distribuição Bernoulli.*

Variável aleatória de Bernoulli: É uma v.a. que assume apenas dois valores:

- ***1*** se ocorrer ***sucesso***,
- ***0*** se ocorrer ***insucesso/fracasso***.

Geralmente, a probabilidade de sucesso é representada por p, $0 < p < 1$.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Bernoulli

"X ~ ***Bernoulli*** (p)" representa uma v.a. com ***Distribuição Bernoulli*** com parâmetro p, isto é,

$$X = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ se ocorrer "sucesso"} \\ \mathbf{0}, \text{ se ocorrer "insucesso"} \end{cases}$$

e a sua função massa de probabilidade pode ser representada pela tabela

X	1	0
$P(X=x)$	p	$1 - p$

$$E(X) = p,$$

$$\text{Var}(X) = p(1 - p).$$

Distribuição Bernoulli: Exemplo

Exemplo: Um dado equilibrado é lançado 1 vez.
Qual é a probabilidade de se obter a *face 5*?

Denotamos,

S: "sucesso", ocorrer face 5;
I: "insucesso", não ocorrer face 5.

A variável X "indica" se ocorreu sucesso ou não numa prova Bernoulli!

É fácil ver que $\boldsymbol{p} = P(\text{sucesso}) = P(X=1) = 1/6$ e

$\boldsymbol{q = 1 - p} = P(\text{insucesso}) = P(X=0) = 5/6$

$\Omega = \{S, I\}$

X	1	0
$P(X=x)$	1/6	5/6

$X \sim \text{Bernoulli}(1/6)$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuições Bernoulli e Binomial

→ Repetições independentes de um ensaio de Bernoulli, com a mesma probabilidade de ocorrência de “sucesso”, dão origem ao ***Modelo de Probabilidade Binomial***.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial

A v.a. X correspondente ao **número de sucessos em n ensaios/provas de Bernoulli independentes e com mesma probabilidade p de sucesso** tem *Distribuição Binomial com parâmetros n e p.*

A função massa de probabilidade da v.a. X é dada por

Formulário

Notação: $X \sim Bin(n; p)$.

- **BINOMIAL** $X \sim B(n;\theta)$, $(0<\theta<1)$

$$f(x\,|\,\theta)=\binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x},\ x=0,1,2,\ldots,n$$

$$E(X)=n\theta\ ;\ \ \mathrm{Var}(X)=n\theta(1-\theta)\ ;\ \ M_X(s)=\left[(1-\theta)+\theta e^{s}\right]^{n}\ ;\ \ \gamma_1=(1-2\theta)/\sigma$$

Propriedades:

- $X \sim B(n;\theta) \Leftrightarrow (n-X)\sim B(n;1-\theta)$
- $X_1 \sim B(n_1;\theta,),\ X_2 \sim B(n_2;\theta),\ X_1$ e X_2 independentes $\Rightarrow X_1+X_2 \sim B(n_1+n_2,\theta)$

- **BERNOULLI** $X \sim B(1;\theta)$

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}$$

$$x=0,1,\ldots,n$$

$$E(X)=np \qquad Var(X)=np(1-p)$$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial

Resultado: Se $X \sim Bin(n; p)$, então

média: $\mu = \mathrm{E}(X) = n \times p$

variância: $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = n \times p \times (1-p)$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial: Resumindo...

A distribuição binomial verifica as seguintes condições:

1. A experiência tem um *nº fixo de provas*, *n*.
2. As provas são *independentes*. (O resultado de uma prova não afecta a probabilidade de ocorrência das restantes.)
3. Cada prova origina um de dois resultados possíveis: *sucesso* ou *insucesso*.
4. A probabilidade de sucesso, denotada por *p*, é *constante* em cada prova.

Ana M. Abreu - 2006/07

Distribuição Binomial: Exemplo 1

Exemplo: Um dado equilibrado é lançado 3 vezes.
Qual é a probabilidade de se obter a *face 5* duas vezes?

Denotamos,

S: “sucesso”, ocorrer face 5;
I: “insucesso”, não ocorrer face 5.

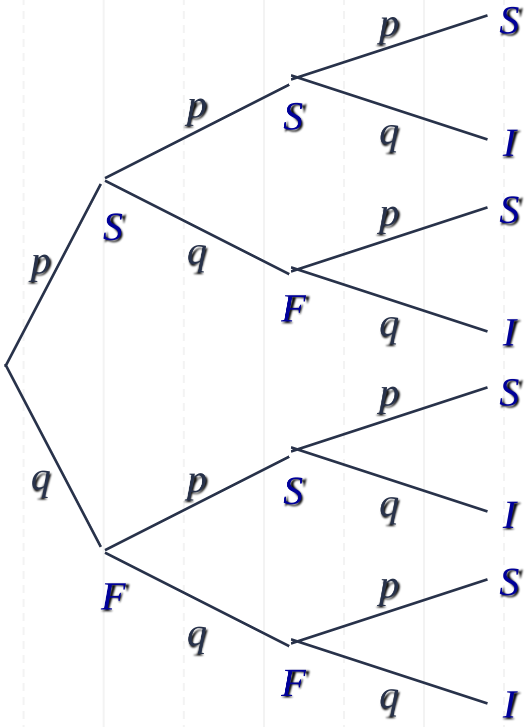
É fácil ver que $\boldsymbol{p} = P(\text{sucesso}) = 1/6$ e
$\boldsymbol{q} = \mathbf{1} - \boldsymbol{p} = P(\text{insucesso}) = 5/6$

$$\Omega = \{SSS, SSI, SIS, ISS, SII, ISI, IIS, III\}$$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial: Exemplo 1

Estamos interessados no número total de sucessos que, no caso, é o *número de vezes que a face 5 é observada* nos três lançamentos do dado.



Ω	Prob	X
(SSS)	p^3	3
(SSI)	p^2q	2
(SIS)	p^2q	2
(SII)	pq^2	1
(ISS)	p^2q	2
(ISI)	pq^2	1
(IIS)	pq^2	1
(III)	q^3	0

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial: Exemplo 1

A função de probabilidade de X é dada por:

Probabilidades binomiais para n = 3 e $P(S) = p$		
nº. de sucessos	**probabilidades**	**p = 1/6**
0	q^3	125/216=0,5787
1	$3pq^2$	75/216=0,3472
2	$3p^2q$	15/216=0,0694
3	p^3	1/216=0,0046

Podemos escrever essa função como

$$P(X = x) = \binom{3}{x} p^x \, q^{3-x} \quad , \quad x = 0, 1, 2, 3.$$

No exemplo, para n **= 3** e p **= 1/6**, $P(X = 2) = 0{,}0694.$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial: Exemplo 2

Considere-se uma prova de escolha múltipla com 12 questões, cada uma com 4 alternativas. Suponha-se que o aluno escolhe as respostas ao acaso. Qual é a probabilidade dele ***acertar pelo menos a 6 questões***?

X: nº de questões que o aluno acertará
X pode assumir valores no conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

P(Sucesso) = P(acertar a cada questão) = 1/4 = 0,25
n = 12

$X \sim Bin(12;\ 0{,}25)$

$$\boxed{P(X = x) = \binom{12}{x} 0{,}25^{x} (1 - 0{,}25)^{12-x}}$$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial: Exemplo 2

$X \sim Bin(12; 0{,}25)$

B. Função de distribuição

N	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
11	0	.5688	.3138	.1673	.0859	.0422	.0198	.0088	.0036	.0014	.0005
	1	.8981	.6974	.4922	.3221	.1971	.1130	.0606	.0302	.0139	.0059
	2	.9848	.9104	.7788	.6174	.4552	.3127	.2001	.1189	.0652	.0327
	3	.9984	.9815	.9306	.8389	.7133	.5696	.4256	.2963	.1911	.1133
	4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9980	.9941	.9852	.9673
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9993	.9978	.9941
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9995
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
12	0	.5404	.2824	.1422	.0687	.0317	.0138	.0057	.0022	.0008	.0002
	1	.8816	.6590	.4435	.2749	.1584	.0850	.0424	.0196	.0083	.0032
	2	.9804	.8891	.7358	.5583	.3907	.2528	.1513	.0834	.0421	.0193
	3	.9978	.9744	.9078	.7946	.6488	.4925	.3467	.2253	.1345	.0730
	4	.9998	.9957	.9761	.9274	.8424	.7237	.5833	.4382	.3044	.1938
	5	1.0000	.9995	.9954	.9806	.9456	.8822	.7873	.6652	.5269	.3872
	6	1.0000	.9999	.9993	.9961	.9857	.9614	.9154	.8418	.7393	.6128
	7	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9972	.9905	.9745	.9427	.8883	.8062
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9983	.9944	.9847	.9644	.9270
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9992	.9972	.9921	.9807
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9989	.9968
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	0	.5133	.2542	.1209	.0550	.0238	.0097	.0037	.0013	.0004	.0001
	1	.8646	.6213	.3983	.2336	.1267	.0637	.0296	.0126	.0049	.0017
	2	.9755	.8661	.6920	.5017	.3326	.2025	.1132	.0579	.0269	.0112
	3	.9969	.9658	.8820	.7473	.5843	.4206	.2783	.1686	.0929	.0461
	4	.9997	.9935	.9658	.9009	.7940	.6543	.5005	.3530	.2279	.1334
	5	1.0000	.9991	.9925	.9700	.9198	.8346	.7159	.5744	.4268	.2905
	6	1.0000	.9999	.9987	.9930	.9757	.9376	.8705	.7712	.6437	.5000
	7	1.0000	1.0000	.9998	.9988	.9944	.9818	.9538	.9023	.8212	.7095
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9990	.9960	.9874	.9679	.9302	.8666
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9975	.9922	.9797	.9539

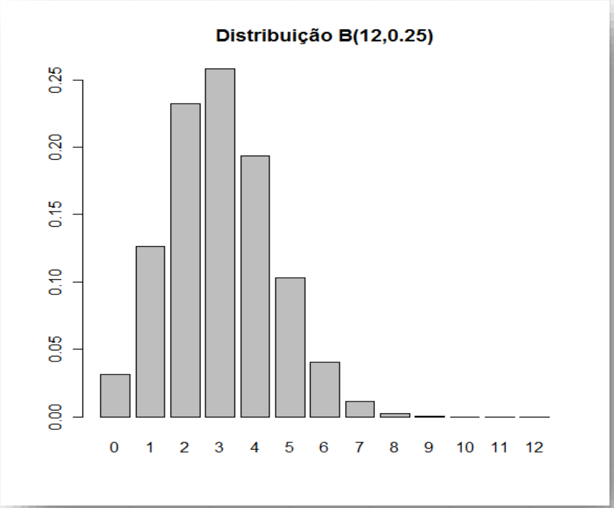
P (acertar pelo menos a 6) = $P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6)$
$= 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0{,}9456 = 0{,}0544$

Distribuição Binomial: Exemplo 2

No R, probabilidades

```
> dbinom(0:12,12,0.25)
 [1] 3.167635e-02 1.267054e-01 2.322932e-01 2.581036e-01 1.935777e-01
 [6] 1.032414e-01 4.014945e-02 1.147127e-02 2.389848e-03 3.540516e-04
[11] 3.540516e-05 2.145767e-06 5.960464e-08

> cbind(0:12,dbinom(0:12,12,0.25))
      [,1]         [,2]
 [1,]    0 3.167635e-02
 [2,]    1 1.267054e-01
 [3,]    2 2.322932e-01
 [4,]    3 2.581036e-01
 [5,]    4 1.935777e-01
 [6,]    5 1.032414e-01
 [7,]    6 4.014945e-02
 [8,]    7 1.147127e-02
 [9,]    8 2.389848e-03
[10,]    9 3.540516e-04
[11,]   10 3.540516e-05
[12,]   11 2.145767e-06
[13,]   12 5.960464e-08
```




```
> barplot(dbinom(0:12,12,0.25),names.arg=0:12,main="Distribuição B(12,0.25)")
```

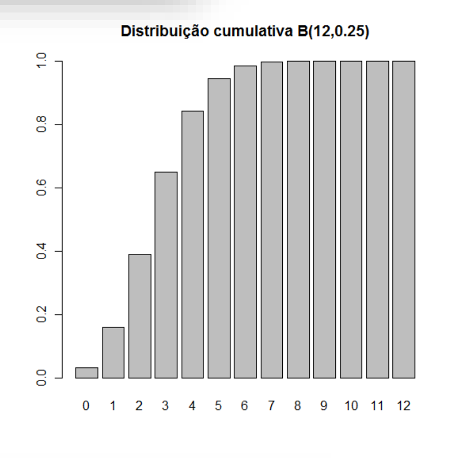
https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial: Exemplo 2

No R, distribuição cumulativa $P(X \leq x)$

```
> pbinom(0:12,12,0.25)
 [1] 0.03167635 0.15838176 0.39067501 0.64877862 0.84235632 0.94559777
 [7] 0.98574722 0.99721849 0.99960834 0.99996239 0.99999779 0.99999994
[13] 1.00000000
```

```
> cbind(0:12,pbinom(0:12,12,0.25))
      [,1]       [,2]
 [1,]    0 0.03167635
 [2,]    1 0.15838176
 [3,]    2 0.39067501
 [4,]    3 0.64877862
 [5,]    4 0.84235632
 [6,]    5 0.94559777
 [7,]    6 0.98574722
 [8,]    7 0.99721849
 [9,]    8 0.99960834
[10,]    9 0.99996239
[11,]   10 0.99999779
[12,]   11 0.99999994
[13,]   12 1.00000000
```




```
> barplot(pbinom(0:12,12,0.25),names.arg=0:12,main="Distribuição cumulativa B(12,0.25)")
```

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial: Exemplo 2

No R, calcularemos $P(X \geq 6)$

```
> 1-pbinom(5,12,0.25)
[1] 0.05440223
> pbinom(5,12,0.25,lower.tail=FALSE)
[1] 0.05440223
```

$1 - P(X \leq 5) = P(X \geq 6)$

calcula a probabilidade $P(X > 5) = P(X \geq 6)$

A média é

$E(X) = n \times p = 12 \times 0{,}25 = 3$,

ou seja, *em média*, o aluno que responder ao acaso a todas as questões acertará 3.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Soma de Binomiais Independentes

- Soma de binomiais **independentes com o mesmo parâmetro** θ.

  Sejam Y_1 e Y_2 duas variáveis aleatórias independentes. Então,

$$Y_1 \sim B(n_1;\theta,),\ Y_2 \sim B(n_2;\theta) \Rightarrow Y = Y_1 + Y_2 \sim B(n,\theta)$$

  onde $n = n_1 + n_2$.

Murteira et al (2015)

5 Distribuição Binomial: Exercícios

Variáveis Aleatórias Discretas

3.7 Num armazém encontra-se um lote de 10000 latas de um certo produto alimentar que está a ser preparado para ser distribuído. 500 dessas latas já ultrapassaram o prazo de validade. É efectuada uma inspecção sobre uma amostra de 15 embalagens escolhidas ao acaso com reposição. A inspecção rejeita o lote se forem encontradas mais do que duas latas fora do prazo de validade nessa amostra.

(a) Qual a probabilidade de rejeição do lote?

(b) Qual o número esperado de latas fora do prazo de validade?

Exercício 3.7 (a)

- **V.a. de interesse**

  X = número de latas fora do prazo de validade em 15 embalagens escolhidas ao acaso COM reposição de um lote de 10 000 latas das quais 500 já ultrapassaram o prazo de validade

- **Distribuição de X**

  A v.a. X corresponde ao número de sucessos em n provas de Bernoulli independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com probabilidade de sucesso comum p, pelo que

$$X \sim \text{Binomial}(n, p)$$

  com

$$\begin{aligned} n &= 15 \\ p &= \frac{500}{10000} = 0.05 \end{aligned}$$

- **F.p. de X**

$$P(X = x) \stackrel{form.}{=} \binom{15}{x} 0.05^x (1-0.05)^{15-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, 15$$

Exercício 3.7 (a)

- **Prob. pedida**

  A prob. pedida pode obter-se recorrendo directamente à f.p.:

$$\begin{aligned}
P(\text{rejeitar lote}) &= P(X>2)\\
&= 1-P(X\leq 2)\\
&= 1-\sum_{x=0}^{2} P(X=x)\\
&= 1-\left[\binom{15}{0}0.05^0\,(1-0.05)^{15-0}+\binom{15}{1}0.05^x\,(1-0.05)^{15-1}+\binom{15}{2}0.05^2\,(1-0.05)^{15-2}\right]\\
&= 1-\left(0.95^{15}+15\times 0.05\times 0.95^{14}+\frac{15\times 14}{2}\times 0.05^2\times 0.95^{13}\right)\\
&\simeq 1-(0.463291+0.365756+0.134752)\\
&= 0.036201
\end{aligned}$$

  Alternativamente, podemos recorrer às tabelas disponíveis:

$$\begin{aligned}
P(\text{rejeitar lote}) &= P(X>2)\\
&= 1-P(X\leq 2)\\
&= 1-F_{Binomial(15,0.05)}(2)\\
&\overset{tabela/calc.}{\simeq} 1-0.9638\\
&= 0.0362
\end{aligned}$$

Exercício 3.7 (a): Distribuição Binomial

$X \sim Binomial(15;0,05)$

B. Função de distribuição

N	x	θ .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9987	.9959	.9888
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9983
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
14	0	.4877	.2288	.1028	.0440	.0178	.0068	.0024	.0008	.0002	.0001
	1	.8470	.5846	.3567	.1979	.1010	.0475	.0205	.0081	.0029	.0009
	2	.9699	.8416	.6479	.4481	.2811	.1608	.0839	.0398	.0170	.0065
	3	.9958	.9559	.8535	.6982	.5213	.3552	.2205	.1243	.0632	.0287
	4	.9996	.9908	.9533	.8702	.7415	.5842	.4227	.2793	.1672	.0898
	5	1.0000	.9985	.9885	.9561	.8883	.7805	.6405	.4859	.3373	.2120
	6	1.0000	.9998	.9978	.9884	.9617	.9067	.8164	.6925	.5461	.3953
	7	1.0000	1.0000	.9997	.9976	.9897	.9685	.9247	.8499	.7414	.6047
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9996	.9978	.9917	.9757	.9417	.8811	.7880
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9983	.9940	.9825	.9574	.9102
	10	1.0000	1.0000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	11	1.0000	1.0000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	12	1.0000	1.0000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	0	.4633	.2059	.0874	.0352	.0134	.0047	.0016	.0005	.0001	.0000
	1	.8290	.5490	.3186	.1671	.0802	.0353	.0142	.0052	.0017	.0005
	2	.9638	.8159	.6042	.3980	.2361	.1268	.0617	.0271	.0107	.0037
	3	.9945	.9444	.8227	.6482	.4613	.2969	.1727	.0905	.0424	.0176
	4	.9994	.9873	.9383	.8358	.6865	.5155	.3519	.2173	.1204	.0592
	5	.9999	.9978	.9832	.9389	.8516	.7216	.5643	.4032	.2608	.1509
	6	1.0000	.9997	.9964	.9819	.9434	.8689	.7548	.6098	.4522	.3036
	7	1.0000	1.0000	.9994	.9958	.9827	.9500	.8868	.7869	.6535	.5000
	8	1.0000	1.0000	.9999	.9992	.9958	.9848	.9578	.9050	.8182	.6964
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9992	.9963	.9876	.9662	.9231	.8491
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9972	.9907	.9745	.9408
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9981	.9937	.9824
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9989	.9963
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}9638 = 0{,}0362$

Exercício 3.7 (b)

- **Valor esperado de X**

$$\begin{aligned} E(X) &\overset{form.}{=} n\,p \\ &= 15 \times 0.05 \\ &= 0.75 \quad \notin \quad \mathbb{R}_X = \{0, 1, 2, \ldots, 15\} \end{aligned}$$

Obrigada!

Questões?