Estatística I

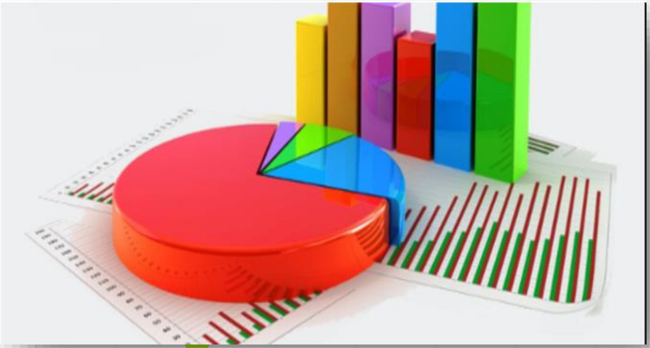
Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)

2.º Ano/1.º Semestre

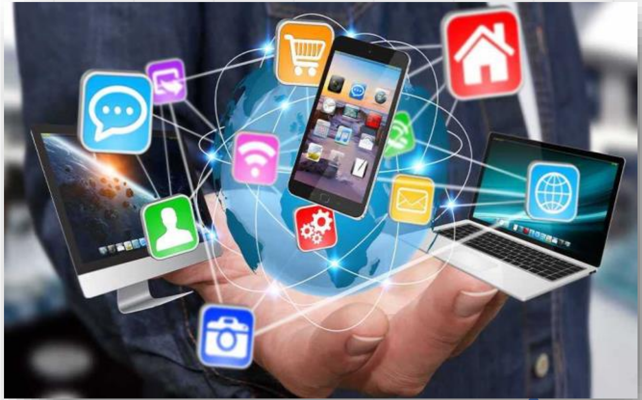
2023/2024

Aulas Teórico-Práticas N.^{os} 14 e 15 (Semana 8)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao



https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas TP (Semanas 1 e 3)	Aulas TP (Semanas 3 a 6)	Aulas TP (Semanas 7 a 9)	Aulas TP (Semanas 10 a 12)
• **Capítulo 1**: Análise Descritiva • **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	**Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Variáveis Aleatórias Especiais

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

4. Variáveis aleatórias multivariadas

4.1. Variáveis aleatórias bidimensionais

4.2. Função de distribuição conjunta

4.3. Função de distribuição marginal

4.4. Independência de variáveis aleatórias multivariadas

4.5. Variáveis aleatórias discretas multivariadas

4.6. Variáveis aleatórias contínuas multivariadas

4.7. Funções de distribuição condicionais

4.8. Valores esperados de funções de variáveis aleatórias multivariadas

4.9. Valores esperados marginais

4.10. Momentos em relação à origem

4.11. Momentos em relação à média

4.12. A covariância

4.13. O coeficiente de correlação

1

Pares Aleatórios Discretos

Distribuição Conjunta, Marginais e Condicionais; Independência; Covariância e Correlação

Par Aleatório Discreto

PAR ALEATÓRIO

A um vector aleatório de dimensão 2 chamamos um **par aleatório ou variável aleatória bidimensional**.

Par aleatório discreto:

Um par aleatório diz-se discreto quando ambas as componentes são v.a.'s discretas. Assim (X,Y) é um par aleatório discreto quando os domínios de existência das v.a.'s X e Y são conjuntos finitos ou infinitos numeráveis.

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Função de Probabilidade Conjunta

A função de probabilidade conjunta do par aleatório (X,Y) é uma função f(x,y) que associa a cada elemento de $\mathbb{R}^2$ uma probabilidade,

$$f(x,y) = p_{ij} = P[X = x, Y = y].$$

Verifica as seguintes propriedades:

1. $0 \leq f(x,y) \leq 1, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$;
2. $\sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1$.

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Função de Probabilidade Conjunta: Exemplo

Exemplo 6. Uma moeda equilibrada tem o algarismo 1 desenhado numa das faces e o algarismo 2 desenhado na outra face. A moeda é lançada ao ar duas vezes. Seja a v.a. X – soma dos dois números observados nos lançamentos e a v.a. Y – diferença dos mesmos números (o primeiro menos o segundo).

$$\begin{array}{rcccc} \Omega = \{ & (1,1), & (1,2), & (2,1), & (2,2)\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (X,Y) = & (2,0) & (3,-1) & (3,1) & (4,0) \end{array}$$

Assim temos :

$P[X = 2, Y = 0] = ¼$; $P[X = 3, Y = -1] = ¼$;

$P[X = 3, Y = 1] = ¼$; $P[X = 4, Y = 0] = ¼$.

A função de probabilidade conjunta, por vezes é representada através de um quadro. Para o exemplo 6 a função de probabilidade conjunta de (X,Y) vem:

X \ Y	-1	0	1
2	0	1/4	0
3	1/4	0	1/4
4	0	1/4	0

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Funções de Probabilidade Marginais

Apesar de no par aleatório se proceder ao estudo em conjunto de duas variáveis aleatórias, isso não impede que se possa estudar probabilisticamente cada variável componente em separado. De facto é possível obter as funções de probabilidade das variáveis X eY, individualmente, e a que damos o nome de funções de probabilidade marginais:

Função de probabilidade marginal de X,

$$f_X(x) = P[X = x, -\infty < Y < +\infty] = \sum_y f(x,y)$$

Função de probabilidade marginal de Y

$$f_Y(y) = P[-\infty < X < +\infty, Y = y] = \sum_x f(x,y)$$

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Funções de Probabilidade Marginais: Exemplo

Exemplo 7 (continuação)

Podemos calcular as probabilidades marginais, isto é, calcular a função de probabilidade de X eY usando a função de probabilidade conjunta.

Assim,

$$P[X = 2] = P[(\{X = 2\} \cap \{Y = -1\}) \cup (\{X = 2\} \cap \{Y = 0\}) \cup (\{X = 2\} \cap \{Y = 1\})] =$$

$$= P[X = 2, Y = -1] + P[X = 2, Y = 0] + P[X = 2, Y = 1] = ¼,$$

$$P[X = 3] = P[(\{X = 3\} \cap \{Y = -1\}) \cup (\{X = 3\} \cap \{Y = 0\}) \cup (\{X = 3\} \cap \{Y = 1\})] =$$

$$= P[X = 3, Y = -1] + P[X = 3, Y = 0] + P[X = 3, Y = 1] = ½,$$

$$P[X = 4] = P[(\{X = 4\} \cap \{Y = -1\}) \cup (\{X = 4\} \cap \{Y = 0\}) \cup (\{X = 4\} \cap \{Y = 1\})] =$$

$$= P[X = 4, Y = -1] + P[X = 4, Y = 0] + P[X = 4, Y = 1] = ¼,$$

Pelo que, a função de probabilidade marginal de X é,

$$X = \begin{cases} 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{cases}$$

X \ Y	-1	0	1	
2	0	1/4	0	1/4
3	1/4	0	1/4	1/2
4	0	1/4	0	1/4
	1/4	1/2	1/4	1

função de probabilidade marginal de X

(soma de linha)

função de probabilidade marginal de Y

(soma de coluna)

Funções de Probabilidade Marginais: Exemplo

X \ Y	-1	0	1	
2	0	1/4	0	1/4
3	1/4	0	1/4	1/2
4	0	1/4	0	1/4
	1/4	1/2	1/4	1

função de probabilidade marginal de X

(soma de linha)

função de probabilidade marginal de Y

(soma de coluna)

Da mesma forma obtemos,

P[Y = -1] = ¼, P[Y = 0] = ½ e P[Y = 1] = ¼,

A função de probabilidade marginal de Y será,

$$Y = \begin{cases} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{cases}$$

O quadro da distribuição de probabilidade conjunta de (X,Y) pode agora ser completado com mais uma linha e uma coluna para as probabilidades marginais das v.a.'s X e Y.

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Funções de Probabilidade Condicionais

Sabemos que:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad , \; P(A) > 0$$

Definindo:

$A \rightarrow$ o evento onde $X = x$

$B \rightarrow$ o evento onde $Y = y$

A distribuição de probabilidade de X isolado e Y isolados são:

$$g(x) = \sum_{y} f(x,y) \quad \text{e} \quad h(y) = \sum_{x} f(x,y) \quad \text{variável discreta}$$

Temos que:

$$P(Y = y / X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \quad g(x) > 0$$

ou ainda

$$P(X = x / Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \quad h(y) > 0$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Funções de Probabilidade Condicionais: Exemplo

Considere-se a função de probabilidade conjunta f(x,y) apresentada abaixo. Determine a função de probabilidade condicional de X dado que Y=1 e considere esse resultado para calcular P(X=0|Y=1).

		X			
f(x, y)		0	1	2	
y	0	3/28	9/28	3/28	15/28
	1	6/28	6/28	-	12/28
	2	1/28	-	-	1/28
		10/28	15/28	3/28	1

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

$$P(X=0) = g(0) = \sum_{y=0}^{2} f(0,y) = f(0,0) + f(0,1) + f(0,2) = 10/28$$

$$P(X=1) = g(1) = \sum_{y=0}^{2} f(1,y) = f(1,0) + f(1,1) + f(1,2) = 15/28$$

$$P(X=2) = g(2) = \sum_{y=0}^{2} f(2,y) = f(2,0) = 3/28$$

Função massa de probabilidade de X:

x	0	1	2
g(x)	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

= distribuição de probabilidade marginal de X.

Funções de Probabilidade Condicionais: Exemplo

Considere-se a função de probabilidade conjunta f(x,y) apresentada abaixo. Determine a função de probabilidade condicional de X dado que Y=1 e considere esse resultado para calcular P(X=0|Y=1).

		X			
f(x, y)		0	1	2	
y	0	3/28	9/28	3/28	15/28
	1	6/28	6/28	-	12/28
	2	1/28	-	-	1/28
		10/28	15/28	3/28	1

Mas usando a definição:

$$P(X = x / Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{f(x, y)}{h(y)},$$

por definição: $h(y) = \sum_x f(x, y)$

$$P(x = 0/y = 1) = \frac{6/28}{12/28} = \frac{1}{2}$$

$$P(x = 1/y = 1) = \frac{6/28}{12/28} = \frac{1}{2}$$

$$P(x = 2/y = 1) = \frac{0}{12/28} = 0$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Independência entre as Variáveis Aleatórias

Dada uma v.a. bidimensional (X,Y), as v.a. unidimensionais que a integram, X e Y, dizem-se independentes se

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \quad \forall (x,y).$$

[Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)]

Independência Estatística

(Dedução com analogia Teoria das Probabilidades)

Sabemos que:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow f(x/y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}$$

Mas se A e B forem independentes:

$$P(A/B) = P(A) \Rightarrow f(x/y) = g(x)$$

Assim,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$$

Sejam x e y duas variáveis aleatórias (discretas ou contínuas) com distribuição de probabilidade conjunta f (x, y) e distribuição de probabilidade marginais g(x) e h(y), respectivamente. As variáveis aleatórias x e y são consideradas Estatisticamente Independentes se e somente se:

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

para todos (x, y) dependendo do intervalo).

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Independência Estatística

Generalização

Seja $X_1, X_2, \ldots X_n$, n variáveis aleatórias (discretas ou contínuas) com distribuição de probabilidade conjunta $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ e distribuição de probabilidade marginais $f_1(x_1), f_2(x_2) \ldots f_3(x_n)$, respectivamente. As variáveis aleatórias, $X_1, X_2, \ldots X_n$, são ditas Estatisticamente Independentes se e somente se:

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = f_1(x_1) \, . \, f_2(x_2) \ldots f_3(x_n)$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Independência Estatística: Exemplo

Mostre que as variáveis aleatórias do exemplo ① não são estatisticamente independentes.

$$f(x, y) \overset{?}{=} g(x) \cdot h(x)$$

		X			
f(x, y)		0	1	2	
y	0	3/28	9/28	3/28	15/28
	1	6/24	6/24	-	12/28
	2	1/28	-	-	1/28
		10/28	15/28	3/28	

Vamos verificar em um par (x, y)

Suponha (0, 0)

f (x, y) = f (0, 0) = 3/28

9 (0) = 10/28

h (0) = 15/28

Vemos que:

$$\frac{3}{28} \neq \frac{10}{28} \cdot \frac{15}{28}$$

não são estatisticamente independentes.

Valor Médio do Par Aleatório

Valor esperado:

Seja X uma variável aleatória. O **valor esperado**, **média** ou **esperança matemática** de X, que denotamos por E[X] (também representado por μ_X ou μ), quando existe, define-se por

$$E[X] = \sum_i x_i f(x_i) \qquad \text{se X é uma variável aleatória discreta,}$$

Propriedades do valor esperado:

Dadas X e Y duas variáveis aleatórias, e seja k uma constante real,

- $E[k] = k$;
- $E[kX] = k\,E[X]$;
- $E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y]$;
- $E[XY] = E[X] \,.\, E[Y] + Cov[X,Y]$

  Se X e Y forem independentes então $E[XY] = E[X] \,.\, E[Y]$

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Variância do Par Aleatório

Variância:

Seja X uma variável aleatória. A variância de X, que denotamos por Var[X] (também representada por σ_X^2 ou simplesmente σ²), é definida por:

$$Var[X] = E[(X - \mu_X)^2],$$

ou seja,

$$Var[X] = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 \cdot f(x_i) \quad \text{se X é uma v.a. discreta,}$$

Propriedades da variância:

Dadas X e Y duas variáveis aleatórias, e seja k uma constante real,

- $Var[k] = 0$;
- $Var[kX] = k^2 \, Var[X]$;
- $Var[X \pm Y] = Var[X] + Var[Y] \pm 2Cov[X,Y]$;

  Se X e Y forem independentes então $Var[X \pm Y] = Var[X] + Var[Y]$
- $Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$

  Onde,

$$E[X^2] = \sum_i x_i^2 f(x_i) \quad \text{se X é uma variável aleatória discreta,}$$

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Covariância do Par Aleatório

Covariância:

A **covariância** entre X eY, representa-se por Cov(X,Y)ou simplesmente $\sigma_{X,Y}$, e define-se como

$$Cov[X, Y] = \sigma_{X,Y} = E[(X- \mu_X)(Y- \mu_Y)],$$

ou seja,

$$Cov[X,Y] = \sum_i \sum_j (x_i - \mu_X)(x_j - \mu_Y) \cdot f(x_i, y_j) \quad \text{se (X,Y) é uma v.a. discreta,}$$

Uma outra fórmula para calcular a covariância é

$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X] \; E[Y].$$

onde

$$E[XY] = \sum_i \sum_j x_i y_j f(x_i, y_j) \quad \text{se (X,Y) é uma v.a. discreta,}$$

Propriedades da Covariância:

Sejam X eY duas variáveis aleatórias e a, b, c e d constantes reais,

- X eY são variáveis independentes $\Rightarrow$Cov(X,Y) =0

  (Nota: O recíproca pode não ser verdadeiro. O facto de Cov(X,Y) =0 não implica a independência entre X eY, pode existir uma ligação não linear entre as variáveis.);
- Cov(X,X) = Var[X];
- Cov(aX+b, cY+d) = acCov(X,Y).

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Coeficiente de Correlação do Par Aleatório

- **Coeficiente de correlação:**

O **coeficiente de correlação** é definido como:

$$\rho = \rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \, \sigma_Y}$$

Propriedades do coeficiente de correlação:

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias e a, b, c e d constantes reais,

- $-1 < \rho_{X,Y} < 1$;
- Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então $\rho_{X,Y} = 0$;
- O coeficiente de correlação não se altera quando as variáveis sofrem uma transformação linear positiva, ou seja,

$$\rho_{aX+b,cY+d} = \rho_{X,Y} \qquad \text{se } ac > 0.$$

Pares Aleatórios Discretos: Exercícios

2

Distribuição Conjunta, Marginais e Condicionais;
Independência; Covariância e Correlação

5.1 Uma loja de electrodomésticos vende televisores da marca X e da marca Y. A função de probabilidade conjunta do número de televisores vendidos diariamente é a seguinte:

$Y \setminus X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

(a) Calcule as funções de probabilidade marginais de X e de Y.

(b) Calcule a função de distribuição marginal de X.

(c) Calcule a probabilidade de que num dia a marca Y seja mais vendida do que a marca X.

(d) Determine o valor esperado e a variância do número total de televisores vendidos diariamente.

Exercício 5.1 (a): Funções de Probabilidade Marginais

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

P(y=x)

0.12+0.25+0.13 = 0.5

0.05+0.30+0.01 = 0,36

0.03+0.10+0.01 = 0.14

$$f_X(x)=\begin{cases}0.2, & x=0\\ 0.65, & x=1\\ 0.15, & x=2\end{cases};$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}0.5, & y=0\\ 0.36, & y=1\\ 0.14, & y=2\end{cases}$$

Slides Professora Claúdia Nunes

Exercício 5.1 (b): Função de Distribuição

$Y \setminus X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

P(y=x)

0.12+0.25+0.13 = 0.5

0.05+0.30+0.01 = 0,36

0.03+0.10+0.01 = 0.14

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.2, & x = 0 \\ 0.65, & x = 1 \\ 0.15, & x = 2 \end{cases};$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0. & x < 0 \\ 0.2, & 0 \le x < 1 \\ 0.85, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

Slides Professora Claúdia Nunes

Exercício 5.1 (c): Função de Probabilidade

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	$\boxed{0.05}$	0.30	0.01
2	$\boxed{0.03}$	$\boxed{0.10}$	0.01

$P(y=x)$

$0.12+0.25+0.13=0.5$

$0.05+0.30+0.01=0,36$

$0.03+0.10+0.01=0.14$

$$\boxed{P(Y>X) = P(X=0,\ Y=1) + P(X=0,\ Y=2) + P(X=1,\ Y=2) = 0{,}05+0{,}03+0{,}1 = 0{,}18}$$

Slides Professora Claúdia Nunes

Exercício 5.1 (d): Valor Médio e Variância da Soma

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

P(y=x)
0.12+0.25+0.13 = 0,5
0.05+0.30+0.01 = 0,36
0.03+0.10+0.01 = 0,14

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.2, & x = 0 \\ 0.65, & x = 1 \\ 0.15, & x = 2 \end{cases};$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0.5, & y = 0 \\ 0.36, & y = 1 \\ 0.14, & y = 2 \end{cases}$$

Cov(X,Y) = E(XY)-E(X)E(Y)

E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 0,95 + 0,64 = 1,59

Slides Professora Claúdia Nunes

Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2× Cov(X,Y)
= (1,25 – 0,95^2) + (0,92 – 0,64^2) + 2×(0,56-0,95*0,64) = 0,7619

Pares Aleatórios: Função de Probabilidade Condicional

Considere-se a função de probabilidade conjunta f(x,y) apresentada abaixo. Determine a função de probabilidade condicional de X dado que Y=1.

Caracterização condicional

[cap. 2: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$]

Tomando como "inspiração" esta fórmula, vamos definir probabilidades se momentos condicionados:

i) Prob. condicionada de X em Y

$$\boxed{P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}} \quad \forall x, y$$

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$P(Y=x)$

$0.12+0.25+0.13=0,5$

$0.05+0.30+0.01=0,36$

$0.03+0.10+0.01=0.14$

Exemplo:

$$P(X=x|Y=1) = \frac{P(X=x, Y=1)}{P(Y=1)} = \begin{cases} \frac{0.05}{0.36} & x=0 \\ \frac{0.30}{0.36} & x=1 \\ \frac{0.01}{0.36} & x=2 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Pares Aleatórios: Função de Distribuição Condicional

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$P(y = x)$

$0.12 + 0.25 + 0.13 = 0.5$

$0.05 + 0.30 + 0.01 = 0.36$

$0.03 + 0.10 + 0.01 = 0.14$

À esta dessa probabilidade condicionada, podemos definir:

- Função de distribuição condicionada de x em y

Pares Aleatórios: Função de Distribuição Condicional

exemplo: $F_{X|Y=1}(x) = P(X \leq x \mid Y=1)$

$[\, F_X(x) = P(X \leq x) \,]$

$$= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{0.05}{0.36} & 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{0.05+0.30}{0.36} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$Y\backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$P(X \leq 1.3 \mid Y=0) =$

$= \dfrac{P(X \leq 1.3,\, Y=0)}{P(Y=0)} = \dfrac{0.12+0.25}{0.5}$

$P(X \leq 1.3 \mid Y=1) = F_{X|Y=1}(1.3) = \dfrac{0.05+0.30}{0.36}$

Slides Professora Claúdia Nunes

Pares Aleatórios: Valores Esperados Condicionais

Valores esperados condicionados

$$\boxed{E[X|Y=y] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x\, P(X=x|Y=y)}$$

Exemplo: $E[X|Y=1] = \sum_{x=0}^{2} x P(X=x|Y=1)$

Exemplo:

$$P(X=x|Y=1) = \frac{P(X=x, Y=1)}{P(Y=1)} = \begin{cases} \frac{0.05}{0.36} & x=0 \\ \frac{0.30}{0.36} & x=1 \\ \frac{0.01}{0.36} & x=2 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$= 0 \times \frac{0.05}{0.36} + 1 \times \frac{0.30}{0.36} + 2 \times \frac{0.01}{0.36}$$

Pares Aleatórios: Variâncias Condicionais

$$\boxed{E[X^2|Y=y] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x^2 P(X=x|Y=y)}$$

$$\boxed{E[g(X)|Y=y] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} g(x) P(X=x|Y=y)}$$

Em particular:

$$\boxed{\text{var}[X|Y=y] = E[X^2|Y=y] - E^2[X|Y=y]}$$

<u>Nota</u>: idênticas definições (devidamente adaptadas para o caso de Y condicionado em X)

Função de Distribuição Conjunta

Dada uma v.a. bidimensional (par aleatório) (X,Y), discreta, a função de distribuição conjunta de (X,Y) é definida da seguinte forma:

$$F(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y] = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f(x_i, y_j),$$

e satisfaz as seguintes condições:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x,y) = 0$, com y fixo;
2. $\lim\limits_{y \to -\infty} F(x,y) = 0$, com x fixo;
3. $\lim\limits_{x,y \to -\infty} F(x,y) = 0$;
4. $\lim\limits_{x,y \to +\infty} F(x,y) = 1$;
5. $0 \leq F(x,y) \leq 1, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$;
6. $F(x_1,y_1) \leq F(x_2,y_2), \ \forall x_1 < x_2, \ y_1 < y_2$

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

Função de Distribuição Conjunta

A partir de probabilidade conjunta podemos definir a função de distribuição conjunta:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Exemplo:

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$$F_{X,Y}(1,1) = P(X \leq 1, Y \leq 1)$$

$$= \sum_{x \leq 1} \sum_{y \leq 1} P(X=x, Y=y)$$

$$= 0.12 + 0.25 + 0.05 + 0.30$$

Em termos de propriedades, tem propriedades semelhantes à f. distribuição para uma v.a, tendo em conta que agora temos 2 v.a.

Nota: tal como no caso univariado, também podemos calcular $F_{X,Y}(x,y)$ $\forall x, y$ [temos visto

Slides Professora Claúdia Nunes

Pares Aleatórios Discretos: Exercícios do Murteira et al (2015)

3

Distribuição Conjunta, Marginais e Condicionais; Independência; Covariância e Correlação

Cap 4 do livro: 1, 3, 7

1. Numa dada loja de componentes para computadores, as vendas diárias de discos rígidos das marcas X e Y têm a seguinte função probabilidade conjunta:

$y \setminus x$	**0**	**1**	**2**
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

a) Determine as funções de distribuição marginais de X e de Y.
b) Qual a probabilidade de, num dia, a marca X ser a mais vendida?
c) Qual a proporção de dias em que se vende igual número de discos das marcas referidas?
d) Obtenha a função probabilidade de X, nos dias em que se vende exactamente um disco da marca Y.
e) Verifique se as variáveis são independentes.
f) Calcule as médias e as variâncias de X e de Y.
g) Calcule o coeficiente de correlação.
h) Verifique que $E(Y \mid X = x)$ não coincide com $E(Y)$. Comente.
i) Calcule a média e a variância de $Z = X - Y$.

Exercício 1 (a): Funções de Probabilidade Marginais

Função probabilidade de X

- $f_X(0) = 0.12 + 0.05 + 0.03 = 0.20$
- $f_X(1) = 0.25 + 0.30 + 0.10 = 0.65$
- $f_X(2) = 0.13 + 0.01 + 0.01 = 0.15$

$$\longrightarrow \quad f_X(x) = \begin{cases} 0.20 & (x=0) \\ 0.65 & (x=1) \\ 0.15 & (x=2) \end{cases}$$

Função probabilidade de Y

- $f_Y(0) = 0.12 + 0.25 + 0.13 = 0.50$
- $f_Y(1) = 0.05 + 0.30 + 0.01 = 0.36$
- $f_Y(2) = 0.03 + 0.10 + 0.01 = 0.14$

$$\longrightarrow \quad f_Y(y) = \begin{cases} 0.50 & (y=0) \\ 0.36 & (y=1) \\ 0.14 & (y=2) \end{cases}$$

Exercício 1 (a): Funções de Probabilidade Marginais

Logo, as funções de distribuição marginais são dadas por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 0.20 & (0 \leq x < 1) \\ 0.85 & (1 \leq x < 2) \\ 1 & (x \geq 2) \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & (y < 0) \\ 0.50 & (0 \leq y < 1) \\ 0.86 & (1 \leq y < 2) \\ 1 & (y \geq 2) \end{cases}$$

Exercício 1 (b): Probabilidade

$$P(X > Y) = \sum_{x>y} f_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(1,0) + f_{X,Y}(2,0) + f_{X,Y}(2,1) = 0.25 + 0.13 + 0.01 = 0.39$$

Exercício 1 (c): Probabilidade

$$P(X=Y) = \sum_{x=y} f_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(0,0) + f_{X,Y}(1,1) + f_{X,Y}(2,2) = 0.12 + 0.30 + 0.01 = 0.43$$

Exercício 1 (d): Probabilidade Condicional

Quer-se: $f_{X|Y=1}(x) = \dfrac{f_{X,Y}(x,1)}{f_Y(1)}$

- $x = 0 \rightarrow f_{X|Y=1}(0) = \dfrac{f_{X,Y}(0,1)}{f_Y(1)} = \dfrac{0.05}{0.36} = \dfrac{5}{36}$
- $x = 1 \longrightarrow f_{X|Y=1}(1) = \dfrac{f_{X,Y}(1,1)}{f_Y(1)} = \dfrac{0.30}{0.36} = \dfrac{30}{36}$
- $x = 2 \longrightarrow f_{X|Y=1}(2) = \dfrac{f_{X,Y}(2,1)}{f_Y(1)} = \dfrac{0.01}{0.36} = \dfrac{1}{36}$

Logo,

$$f_{X|Y=1}(x) = \begin{cases} 5/36 & (x=0,\ y=1 \text{ fixo}) \\ 30/36 & (x=1,\ y=1 \text{ fixo}) \\ 1/36 & (x=2,\ y=1 \text{ fixo}) \end{cases}$$

Exercício 1 (e): Independência

X e Y são independentes se e só se: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$, $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$f_{X,Y}(0,0) = 0.12$ e $f_X(0) \cdot f_Y(0) = 0.20 \times 0.50 = 0.10$

Logo, $f_{X,Y}(0,0) \neq f_X(0)\, f_Y(0)$, pelo que X e Y não são independentes.

Exercício 1 (f): Valor Médio e Variância

$$E(x) = \sum_{(x,y)} x \cdot f_{x,y}(x,y) = 0 \times 0.12 + 1 \times 0.25 + 2 \times 0.13 + 0 \times 0.05 + 1 \times 0.30 + 2 \times 0.01$$

$$+ 0 \times 0.03 + 1 \times 0.10 + 2 \times 0.01 = 0.95$$

$$E(x^2) = \sum_{(x,y)} x^2 f_{x,y}(x,y) = 0^2 \times 0.12 + 1^2 \times 0.25 + 2^2 \times 0.13 + 0^2 \times 0.05 + 1^2 \times 0.30 + 2^2 \times 0.01 +$$

$$+ 0^2 \times 0.03 + 1^2 \times 0.10 + 2^2 \times 0.01 = 1.25$$

$$Var(x) = 1.25 - 0.95^2 = 0.3475$$

Exercício 1 (f): Valor Médio e Variância

$$E(Y) = \sum_{(x,y)} y \cdot f_{X,Y}(x,y) = 0 \times 0.12 + 0 \times 0.25 + 0 \times 0.13 + 1 \times 0.05 + 1 \times 0.30 + 1 \times 0.01 +$$

$$+ 2 \times 0.03 + 2 \times 0.10 + 2 \times 0.01 = 0.64$$

$$E(Y^2) = \sum_{(x,y)} y^2 \cdot f_{X,Y}(x,y) = 0^2 \times 0.12 + 0^2 \times 0.25 + 0^2 \times 0.13 + 1^2 \times 0.05 + 1^2 \times 0.30 + 1^2 \times 0.01 +$$

$$+ 2^2 \times 0.03 + 2^2 \times 0.10 + 2^2 \times 0.01 = 0.92$$

$$VaR(Y) = 0.92 - 0.64^2 = 0.5104$$

Exercício 1 (g): Coeficiente de Correlação

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

- $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

- $E(XY) = \sum_{(x,y)} xy\, f_{X,Y}(x,y) = 0\times0\times0.12 + 1\times0\times0.25 + 2\times0\times0.13 +$
$+ 0\times1\times0.05 + 1\times1\times0.30 + 2\times1\times0.01 +$
$+ 0\times2\times0.03 + 1\times2\times0.10 + 2\times2\times0.01 = 0.56$

$Cov(X,Y) = 0.56 - 0.95\times0.64 = -0.048$

Logo,

$$\rho_{X,Y} = \frac{-0.048}{\sqrt{0.3475}\sqrt{0.5104}} \approx -0.1140$$

Exercício 1 (h): Valor Médio

$$E(Y|X=x) = \sum_y y \cdot f_{Y|X=x}(y)$$

$$\bullet\ X=0 \longrightarrow E(Y|X=0) = \sum_{y=0}^{2} y \cdot f_{Y|X=0}(y) = \sum_{y=0}^{2} y \cdot \frac{f_{X,Y}(0,y)}{f_X(0)} = 0 \times \frac{0.12}{0.20} +$$

$$+ 1 \times \frac{0.05}{0.20} + 2 \times \frac{0.03}{0.20} = 0.55$$

$$\bullet\ X=1 \longrightarrow E(Y|X=1) = \sum_{y=0}^{2} y \cdot f_{Y|X=1}(y) = \sum_{y=0}^{2} y \cdot \frac{f_{X,Y}(1,y)}{f_X(1)} = 0 \times \frac{0.25}{0.65} +$$

$$+ 1 \times \frac{0.30}{0.65} + 2 \times \frac{0.10}{0.65} \approx 0.77$$

Exercício 1 (h): Valor Médio

- $X = 2 \longrightarrow E(Y|X=2) = \sum_{y=0}^{2} y \cdot f_{Y|X=2}(y) = \sum_{y=0}^{2} y \cdot \frac{f_{X,Y}(2,y)}{f_X(2)} = 0 \times \frac{0.13}{0.15} +$

$$+ 1 \times \frac{0.01}{0.15} + 2 \times \frac{0.01}{0.15} = 0.20$$

Logo,

$$E(Y|X=x) = \begin{cases} 0.55 & (x=0) \\ 0.77 & (x=1) \\ 0.20 & (x=2) \end{cases} \neq E(Y) = 0.64$$

Y não é independente em média de X.

Exercício 1 (i): Valor Médio e Variância

$Z = X - Y$

$E(Z) = E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 0.95 - 0.64 = 0.31$

$Var(Z) = Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2\,cov(X,Y) = 0.3475 + 0.5104 -$

$= 0.3475 + 0.5104 - 2 \times (-0.048) = 0.9539$

3. Os acertos finais para obtenção da cor desejada para uma tinta são feitos em primeiro lugar por um computador, sendo completados manualmente por um operário especializado. O número de afinações de cor levadas a efeito pelo computador varia entre uma e três. O operário examina o trabalho e procede ou não a uma última afinação manual, consoante julgar necessário.

   Da experiência passada sabe-se que:

   - Em 60% dos casos não é necessária qualquer afinação manual;
   - Em 30% dos casos o computador leva a efeito uma única afinação de cor, e, em 40% destes, já não é necessário proceder a qualquer afinação manual;
   - Em 60% dos casos o computador leva a efeito duas afinações de cor;
   - Quando o computador realiza três afinações de cor é sempre necessário afinação manual.

   Calcule a função probabilidade de (X, Y), onde X representa o número de afinações de cor realizadas pelo computador, e Y, o número de afinações manuais. Estude a independência das variáveis.

Exercício 3: Função de Probabilidade Conjunta

X - nº afinações do computador $(X = 1, 2, 3)$

Y - nº afinações do operário $(Y = 0, 1)$

Sabe-se que:

- $P(Y=0) = 0.6 \Leftrightarrow f_Y(0) = 0.6$
- $P(X=1) = 0.3 \Leftrightarrow f_X(1) = 0.3$
- $P(Y=0 \mid X=1) = 0.4 \Leftrightarrow f_{Y|X=1}(0) = 0.4$
- $P(X=2) = 0.6 \Leftrightarrow f_X(2) = 0.6$
- $P(Y=1 \mid X=3) = 1 \Leftrightarrow f_{Y|X=3}(1) = 1$

Exercício 3: Função de Probabilidade Conjunta

$x \backslash y$	0	1	$f_X(x)$
1	$f_{X,Y}(1,0)$ 0.12	$f_{X,Y}(1,1)$ 0.18	0.3
2	$f_{X,Y}(2,0)$ 0.48	$f_{X,Y}(2,1)$ 0.12	0.6
3	$f_{X,Y}(3,0)$ 0	$f_{X,Y}(3,1)$ 0.1	$f_X(3)$ 0.1
$f_Y(y)$	0.6	$f_Y(1)$ 0.4	1

- $0.3 + 0.6 + f_X(3) = 1 \Leftrightarrow f_X(3) = 1 - 0.3 - 0.6 = 0.1$
- $0.6 + f_Y(1) = 1 \Leftrightarrow f_Y(1) = 1 - 0.6 = 0.4$
- $f_{Y|X=1}(0) = 0.4 \Leftrightarrow \dfrac{f_{X,Y}(1,0)}{f_X(1)} = 0.4 \Leftrightarrow \dfrac{f_{X,Y}(1,0)}{0.3} = 0.4 \Leftrightarrow f_{X,Y}(1,0) = 0.4 \times 0.3 = 0.12$
- $f_{Y|X=3}(1) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{f_{X,Y}(3,1)}{f_X(3)} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{f_{X,Y}(3,1)}{0.1} = 1 \Leftrightarrow f_{X,Y}(3,1) = 1 \times 0.1 = 0.1$

Exercício 3: Independência

X e Y são independentes se e só se: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$

$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}$

Por exemplo, $f_{X,Y}(1,0) = 0.12 \neq f_X(1)\, f_Y(0) = 0.3 \times 0.6 = 0.18$

Logo, X e Y não são independentes.

7. Um comerciante vende, entre outros artigos, máquinas de calcular de certo tipo. Seja (X,Y) uma variável aleatória discreta onde X representa o número de máquinas recebidas mensalmente para venda, e Y o número de máquinas vendidas também mensalmente, com distribuição dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = 1/9 \quad (x = 1,2,3;\, y = 0,1,\ldots,x).$$

   a) Calcule as funções probabilidade marginais e estude a independência entre X e Y.
   b) Calcule a função probabilidade condicionada, $f_{Y|X=2}(y)$, e diga qual o seu significado.
   c) Obtenha a função probabilidade da variável aleatória que representa o número de máquinas que ficam por vender mensalmente.
   d) Calcule a média e a variância de X e de Y.
   e) Obtenha $E(Y \mid X = x)$. Interprete o valor para $x = 2$.
   f) Determine a média e a variância do número de máquinas que ficam por vender mensalmente.
   g) Determine o coeficiente de correlação entre X e Y.

Exercício 7 (a): Funções de Probabilidade Marginais

X - nº máquinas recebidas mensalmente

Y - nº máquinas vendidas mensalmente

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{9} \quad (x = 1,2,3 \; ; \; y = 0,1,\ldots,?$$

(a)

y \ x	0	1	2	3	$f_X(x)$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{2}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{3}{9}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
$f_Y(y)$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

Funções probabilidade marginais:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2/9 & (x = 1) \\ 3/9 & (x = 2) \\ 4/9 & (x = 3) \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3/9 & (y = 0) \\ 3/9 & (y = 1) \\ 2/9 & (y = 2) \\ 1/9 & (y = 3) \end{cases}$$

Exercício 7 (a): Independência

X e Y são independentes se e só se $f(x,y) = f(x)\,f(y)$, $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}$

Por exemplo, $f_{X,Y}(1,0) = 1/9 \neq f_X(1) \cdot f_Y(0) = 2/9 \times 3/9 = 2/27$

Logo, X e Y não são independentes.

Exercício 7 (b): Função de Probabilidade Condicionada

$P(Y=y|X=2) \quad (y=0,1,2)$

$f_{Y|X=2}(y) \rightarrow$ Representa as probabilidades às vendas mensais (Y) sabendo que foram recebidas duas máquinas no mês (X=2).

- $y=0 \rightarrow f_{Y|X=2}(0) = \dfrac{f_{X,Y}(2,0)}{f_X(2)} = \dfrac{1/9}{3/9} = \dfrac{1}{3}$

- $y=1 \longrightarrow f_{Y|X=2}(1) = \dfrac{f_{X,Y}(2,1)}{f_X(2)} = \dfrac{1/9}{3/9} = \dfrac{1}{3}$

- $y=2 \longrightarrow f_{Y|X=2}(2) = \dfrac{f_{X,Y}(2,2)}{f_X(2)} = \dfrac{1/9}{3/9} = \dfrac{1}{3}$

Logo,

$f_{Y|X=2}(y) = \dfrac{1}{3} \quad (y=0,1,2;\ x=2 \text{ fixo})$

Exercício 7 (c): Função de Probabilidade

$Z = X - Y \rightarrow$ nº máquinas por vender, mensalmente

$$Z = \begin{cases} 0, & (x,y) = (1,1);\ (2,2);\ (3,3) \\ 1, & (x,y) = (1,0);\ (2,1);\ (3,2) \\ 2, & (x,y) = (2,0);\ (3,1) \\ 3, & (x,y) = (3,0) \end{cases}$$

- $z = 0 \rightarrow f_Z(0) = f_{X,Y}(1,1) + f_{X,Y}(2,2) + f_{X,Y}(3,3) = 1/9 + 1/9 + 1/9 = 3/9$
- $z = 1 \rightarrow f_Z(1) = f_{X,Y}(1,0) + f_{X,Y}(2,1) + f_{X,Y}(3,2) = 1/9 + 1/9 + 1/9 = 3/9$
- $z = 2 \rightarrow f_Z(2) = f_{X,Y}(2,0) + f_{X,Y}(3,1) = 1/9 + 1/9 = 2/9$
- $z = 3 \rightarrow f_Z(3) = f_{X,Y}(3,0) = 1/9$

Logo, a função probabilidade de Z é dada por:

$$f(z) = \begin{cases} 3/9 & (z = 0) \\ 3/9 & (z = 1) \\ 2/9 & (z = 2) \\ 1/9 & (z = 3) \end{cases}$$

Exercício 7 (d): Valor Médio e Variância

$$E(X) = \sum_{(x,y)} x\, f(x,y) = 1 \times 1/9 + 1 \times 1/9 + 2 \times 1/9 + 2 \times 1/9 + 2 \times 1/9 + 3 \times 1/9 + 3 \times 1/9 +$$

$$+ 3 \times 1/9 + 3 \times 1/9 = 20/9 \approx 2.222$$

Ou, pela função probabilidade marginal de X: $E(X) = \sum_{x} x\, f_X(x)$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

- $E(X^2) = \sum_{(x,y)} x^2 f(x,y) = 1^2 \times 1/9 + 1^2 \times 1/9 + 2^2 \times 1/9 + 2^2 \times 1/9 + 2^2 \times 1/9 + 3^2 \times 1/9 + 3^2 \times 1/9 +$

$$+ 3^2 \times 1/9 + 3^2 \times 1/9 = 50/9$$

Exercício 7 (d): Valor Médio e Variância

• Ou, pela função probabilidade marginal de X: $E(X^2) = \sum_{x} x^2 f_X(x)$

$Var(X) = 50/9 - (20/9)^2 = 50/81 \approx 0.6173$

$E(Y) = \sum_{(x,y)} y\, f(x,y) = 1 \times 1/9 + 1 \times 1/9 + 1 \times 1/9 + 2 \times \frac{1}{9} + 2 \times 1/9 + 3 \times 1/9 = 10/9 \approx 1.1111$

Ou, pela função probabilidade marginal de Y: $E(Y) = \sum_{y} y\, f_Y(y)$

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

• $E(Y^2) = \sum_{(x,y)} y^2 f(x,y) = 1^2 \times 1/9 + 1^2 \times 1/9 + 1^2 \times 1/9 + 2^2 \times 1/9 + 2^2 \times 1/9 + 3^2 \times 1/9 = 20/9 \approx 2.2$

• Ou, pela função probabilidade marginal de Y: $E(Y^2) = \sum_{y} y^2 f_Y(y)$

$Var(Y) = 20/9 - (10/9)^2 = 80/81 \approx 0.9877$

Exercício 7 (e): Valor Médio

$$E(Y|X=x) = \sum_y y \, f_{Y|X=x}(y) = \sum_y y \, \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

• $\underline{x=1}$: $E(Y|X=1) = \sum_y y \, \frac{f_{X,Y}(1,y)}{f_X(1)} = 0 \times \frac{f_{X,Y}(1,0)}{f_X(1)} + 1 \times \frac{f_{X,Y}(1,1)}{f_X(1)} +$

$$+ 2 \times \frac{f_{X,Y}(1,2)}{f_X(1)} + 3 \times \frac{f_{X,Y}(1,3)}{f_X(1)} = \frac{1/9}{2/9} = \frac{1}{2} = 0.5$$

• $\underline{x=2}$: $E(Y|X=2) = \sum_y y \, \frac{f_{X,Y}(2,y)}{f_X(2)} = 0 \times \frac{f_{X,Y}(2,0)}{f_X(2)} + 1 \times \frac{f_{X,Y}(2,1)}{f_X(2)} +$

$$+ 2 \times \frac{f_{X,Y}(2,2)}{f_X(2)} + 3 \times \frac{f_{X,Y}(2,3)}{f_X(2)} = \frac{1/9}{3/9} + 2 \times \frac{1/9}{3/9} = 1$$

Quando se recebe duas máquinas no mês, vende-se em média, uma máquina.

Exercício 7 (e): Valor Médio

• $\underline{x=3}$: $E(Y|X=3) = \sum_y y \cdot \frac{f_{X,Y}(3,y)}{f_X(3)} = 0 \times \frac{f_{X,Y}(3,0)}{f_X(3)} + 1 \times \frac{f_{X,Y}(3,1)}{f_X(3)} +$

$+ 2 \times \frac{f_{X,Y}(3,2)}{f_X(3)} + 3 \times \frac{f_{X,Y}(3,3)}{f_X(3)} = 1 \times \frac{1/9}{4/9} + 2 \times \frac{1/9}{4/9} +$

$+ 3 \times \frac{1/9}{4/9} = \frac{6}{4} = 1.5$

Exercício 7 (f): Valor Médio e Variância

$Z = X - Y \rightarrow$ nº máquinas por vender, mensalmente

$E(Z) = E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 20/9 - 10/9 = 10/9 \approx 1.111$

Ou, pela função probabilidade de Z, em e): $E(Z) = \sum_z z \cdot f_Z(z)$

$Var(Z) = Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2\,Cov(X,Y)$

- $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, onde:

$E(XY) = \sum_{x,y} xy\, f(x,y) = 1\times0\times 1/9 + 1\times1\times 1/9 + 1\times2\times0 + 1\times3\times0 + 2\times0\times 1/9 + 2\times1\times 1/9 +$

$+ 2\times2\times 1/9 + 2\times3\times0 + 3\times0\times 1/9 + 3\times1\times 1/9 + 3\times2\times 1/9 + 3\times3\times 1/9 =$

$= 25/9$

Exercício 7 (f): Valor Médio e Variância

- $Cov(X,Y) = 25/9 - (20/9)(10/9) = 25/81$

$Var(Z) = 50/81 + 80/81 - 2(25/81) = 80/81 \approx 0.9877$

Ou, pela função probabilidade de Z, em e): $Var(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]$,

- $E(Z^2) = \sum_{z} z^2 \cdot f_Z(z)$

Exercício 7 (g): Coeficiente de Correlação

Coeficiente de correlação entre X e Y: $\rho_{X,Y} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \, \sigma_Y} = \dfrac{25/81}{\sqrt{50/81} \cdot \sqrt{80/81}} \approx 0.3928$

Obrigada!

Questões?