ISEG Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

# Estatística I

## Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)

## 2.º Ano/1.º Semestre

## 2023/2024

# Aulas Teórico-Práticas N.$^{os}$ 16 e 17 (Semana 9)

**Docente**: Elisabete Fernandes
**E-mail**: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

# Conteúdos Programáticos

| Aulas TP (Semanas 1 e 3) | Aulas TP (Semanas 3 a 6) | Aulas TP (Semanas 7 a 9) | Aulas TP (Semanas 10 a 12) |
|---|---|---|---|
| • **Capítulo 1**: Análise Descritiva<br>• **Capítulo 2**: Probabilidades | • **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais | **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais | • **Capítulo 5**: Variáveis Aleatórias Especiais |

**Material didático:** Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas


**Bibliografia**: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

**4. Variáveis aleatórias multivariadas**

4.1. Variáveis aleatórias bidimensionais

4.2. Função de distribuição conjunta

4.3. Função de distribuição marginal

4.4. Independência de variáveis aleatórias multivariadas

4.5. Variáveis aleatórias discretas multivariadas

4.6. Variáveis aleatórias contínuas multivariadas

4.7. Funções de distribuição condicionais

4.8. Valores esperados de funções de variáveis aleatórias multivariadas

4.9. Valores esperados marginais

4.10. Momentos em relação à origem

4.11. Momentos em relação à média

4.12. A covariância

4.13. O coeficiente de correlação

# Pares Aleatórios Contínuos

1

Distribuição Conjunta, Marginais e Condicionais; Independência; Covariância e Correlação

# Função Densidade de Probabilidade Conjunta

A função $f(x, y)$ é uma função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias $x$ e $y$ se:

1. $f(x, y) \geq 0$ p/ todos $(x, y)$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\ dx\ dy = 1$
3. $P[(X, Y) \in A] = \int \int f(x, y)\ dx\ dy$ para qualquer região $A$ no plano $xy$.

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

# Função Densidade de Probabilidade Conjunta: Exemplo

Uma fábrica de doces distribuiu caixas de chocolates com mistura de creme, toffees e amêndoas, envolta em chocolate branco e marrom. Para uma caixa selecionada ao acaso, seja x e y, respectivamente, a proporção de chocolate branco e marrom existente no creme e suponha que f.d.p. conjunta é:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x + 3y) & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

**A função f(x,y) é uma fdp conjunta?**

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

# Função Densidade de Probabilidade Conjunta: Exemplo

**A função f(x,y) é uma fdp conjunta?**

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dx\,dy$$

$\Rightarrow$ integra em relação a "x"; depois em relação a "y".

$$= \frac{2}{5}\int_0^1 \left( \int_0^1 2x\,dx + \int_0^1 3y\,dx \right) dy$$

$$= \frac{2}{5}\int_0^1 \left( 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 3yx\Big|_0^1 \right) dy$$

$$= \frac{2}{5}\int_0^1 (1+3y)\,dy$$

$$= \frac{2}{5}\left[ \int_0^1 dy + \int_0^1 3y\,dy \right]$$

$$= \frac{2}{5}\left[ y\Big|_0^1 + \frac{3y^2}{2}\Big|_0^1 \right]$$

$$= \frac{2}{5}\left[1+\frac{3}{2}\right] = \frac{2}{5}\left[\frac{2+3}{2}\right] = 1 \quad \text{c.q.d!}$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

# Funções Densidade de Probabilidade Marginais

$$g(x) = \sum_{y} f(x,y) \quad \text{e} \quad h(y) = \sum_{x} f(x,y) \qquad \text{variável discreta}$$

$$\boxed{g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \quad \text{e} \quad h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx} \qquad \text{variável contínua}$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

# Funções Densidade de Probabilidade Marginais: Exemplo

**Considere-se a fdp conjunta f(x,y) apresentada abaixo. Determine a fdp marginal de X definida por g(x):**

$$f(x,y) = x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y) & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{outro valor} \end{cases}$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

Por definição a distribuição de probabilidade marginal de x é dada por:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dy = \frac{2}{5}\left[2xy\Big|_0^1 + \frac{3y^2}{2}\Big|_0^1\right]$$

$$= \frac{2}{5}\left[2x + \frac{3}{2}\right] = \frac{4x}{5} + \frac{3}{5}$$

$$\therefore g(x) = \frac{4x+3}{5}$$

ou seja:

$$\therefore g(x) \begin{cases} \frac{4x+3}{5} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \end{cases}$$

# Funções Densidade de Probabilidade Marginais: Exemplo

**Considere-se a fdp conjunta f(x,y) apresentada abaixo. Determine a fdp marginal de Y definida por h(y):**

$$f(x,y) = x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y) & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{outro valor} \end{cases}$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 (2x+3y)dx$$

$$= \frac{2}{5}\left[\frac{2x^2}{2}\Big|_0^1 + 3yx\Big|_0^1\right] = \frac{2}{5}[1+3y]$$

$$= \frac{2+6y}{5}$$

ou seja:

$$h(y)\begin{cases} \frac{2+6y}{5} & p/\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \end{cases}$$

# Funções Densidade de Probabilidade Condicionais

Sabemos que:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad , \; P(A) > 0$$

Definindo:

A → o evento onde X = x

B → o evento onde Y = y

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \quad e \quad h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \quad \text{variável contínua}$$

**Temos que:**

$$P(Y = y / X = x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}$$

ou ainda

$$P(X = x / Y = y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

# Funções Densidade de Probabilidade Condicionais: Exemplo

Considere-se a fdp conjunta f(x,y) = 10xy² $0 < x < y < 1$
a) Determine as fdp´s marginais de X e Y definidas por g(x) e h(y), respetivamente.
b) Determine a função densidade condicional de Y|X.
c) Calcule P(Y > 0,5 | X = 0,25)

**a)**

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{x}^{1} 10xy^2 dy$$

$$= \frac{10xy^3}{3}\Big|_x^1 = \frac{10x}{3}\left(1 - x^3\right) = \frac{10x - 10x^4}{3}$$

$$\boxed{g(x) = \frac{10x}{3}\Big|_x^1 = \frac{10x}{3}\left(1 - x^3\right), \qquad 0 < x < 1}$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{x=0}^{x=y} 10xy^2 dx = \frac{10y^2.x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=y}$$

$$= 5y^2\left(y^2 - 0\right) = 5y^4$$

$$\boxed{h(y) = 5y^4 \quad , \qquad 0 < y < 1}$$

# Funções Densidade de Probabilidade Condicionais: Exemplo

Considere-se a fdp conjunta $f(x,y) = 10xy^2$ $0 < x < y < 1$
a) Determine as fdp´s marginais de X e Y definidas por g(x) e h(y), respetivamente.
b) Determine a função densidade condicional de Y|X.
c) Calcule P(Y > 0,5 | X = 0,25)

**b)**

$f(y/x)$

por definição $f(y/x) = \dfrac{f(x,y)}{g(x)} = \dfrac{10xy^2}{\frac{10}{3}x(1-x^3)}$

$$= \frac{3.10xy^2}{10x(1-x^3)} = \frac{3y^2}{(1-x^3)} \quad , \quad 0 < x < y < 1$$

www.cearidus.ufc.br/Arquivo

# Funções Densidade de Probabilidade Condicionais: Exemplo

**Considere-se a fdp conjunta f(x,y) = 10xy² $0 < x < y < 1$**
**a) Determine as fdp´s marginais de X e Y definidas por g(x) e h(y), respetivamente.**
**b) Determine a função densidade condicional de Y|X.**
**c) Calcule P(Y > 0,5 | X = 0,25)**

**c)**

$$P\left(y > \frac{1}{2} | x = 0{,}25\right)$$

Por definição:

$$P(a < y < b / X = x) = \int_a^b f(y/x).dy$$

f(y/x)

$$\text{por definição } f(y/x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} = \frac{10xy^2}{\frac{10}{3}x(1-x^3)}$$

$$= \frac{3.10xy^2}{10x(1-x^3)} = \frac{3y^2}{(1-x^3)} \quad , \quad 0 < x < y < 1$$

$$P(a < y < b / X = x) = \int_a^b f(y/x).dy$$

$$= \int_{1/2}^{1} \frac{3y^2}{(1-x^3)}dy = \frac{3}{(1-0{,}25^3)}\int_{1/2}^{1} y^2 dy = \frac{3}{(1-0{,}25^3)} \left.\frac{y^3}{3}\right|_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{1}{(1-0{,}25^3)}\left(1-\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{1-1/8}{1-1/64}\right) = \frac{\frac{8-1}{8}}{\frac{64-1}{64}} = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{63}{64}} = \frac{7}{8}.\frac{64}{63} = \frac{8}{9}$$

# Função de Distribuição Conjunta

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

Distribuições Conjuntas de Probabilidade | Resumos LEIC-A

# Funções de Distribuição Marginais

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du \qquad F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(u)\,du$$

Distribuições Conjuntas de Probabilidade | Resumos LEIC-A

# Pares Aleatórios Contínuos: Exercícios

# 2

Distribuição Conjunta, Marginais e Condicionais;
Independência; Covariância e Correlação

**5.13** Considere a variável aleatória bidimensional contínua $(X, Y)$ com função densidade de probabilidade conjunta:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 & , 0 < x < y < 1 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Calcule o coeficiente de correlação entre $X$ e $Y$.

(b) Calcule a $V(X|Y = y)$.

(c) Verifique que $E(X) = E[E(X|Y)]$.

# Exercício 5.13 (a): Coeficiente de Correlação entre X e Y

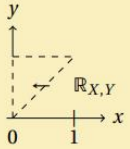
- **Par aleatório**

  $(X, Y)$

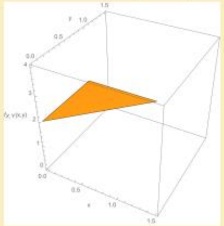
- **F.d.p. conjunta**

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- **Contradomínio de $(X,Y)$, $\mathbb{R}_{X,Y}$**




- **Gráfico da f.d.p. conjunta de $(X,Y)$**



- **Correlação entre $X$ e $Y$**

  Uma vez que se pretende calcular

$$\begin{aligned} corr(X,Y) &= \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\times V(Y)}} \\ &= \frac{E(X\,Y) - E(X)\times E(Y)}{\sqrt{[E(X^2)-E^2(X)]\times[E(Y^2)-E^2(Y)]}} \end{aligned}$$

  é necessário calcular diversos momentos...

- **Valor esperado, 2o. momento e variância de $X$**

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \times f_X(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\right] dx \\ &= \int_0^1 x \times \left[\int_x^1 2\,dy\right] dx \\ &= \int_0^1 x \times \left[(2y)\Big|_x^1\right] dx \\ &= \int_0^1 x \times 2(1-x)\,dx \qquad [f_X(x) = 2(1-x), \quad 0 < x < 1] \\ &= \left(x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

# Exercício 5.13 (a): Coeficiente de Correlação entre X e Y

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f_X(x)\,dx \\
&= \int_0^1 x^2 \times 2(1-x)\,dx \\
&= \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{6} \\
V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\
&= \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
&= \frac{1}{18}
\end{aligned}
$$

- **Valor esperado, 2o. momento e variância de** $Y$

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \times f_Y(y)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} y \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\right] dy \\
&= \int_0^1 y \times \left[\int_0^y 2\,dx\right] dy \\
&= \int_0^1 y \times \left[\,(2x)|_0^y\right] dy \\
&= \int_0^1 y \times 2y\,dy && [f_Y(y) = 2y, \quad 0 < y < 1] \\
&= \left(\frac{2y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \times f_Y(y)\,dy \\
&= \int_0^1 y^2 \times 2y\,dy \\
&= \left(\frac{2x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\
&= \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\
&= \frac{1}{18}
\end{aligned}
$$

# Exercício 5.13 (a): Coeficiente de Correlação entre X e Y

- **Valor esperado de $XY$**

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy \times f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1\int_x^1 xy\times 2\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 x\left(\int_x^1 2y\,dy\right)dx \\ &= \int_0^1 x\left(y^2\Big|_x^1\right)dx \\ &= \int_0^1 x(1-x^2)\,dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \left.\left(\frac{x^2}{1}-\frac{x^4}{4}\right)\right|_x^1 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- **Covariância entre $X$ e $Y$**

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E(XY)-E(X)\times E(Y) \\ &= \frac{1}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

- **Correlação pedida**

$$\begin{aligned} corr(X,Y) &= \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\times V(Y)}} \\ &= \frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18}\times\frac{1}{18}}} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- **[Obs.**
  - $corr(X,Y)=0.5\neq 0$ logo $X$ e $Y$ são v.a. DEPENDENTES.
  - $corr(X,Y)=0.5>0$ donde $X$ e $Y$ tenderão a variar no mesmo sentido.
  - O valor de $|corr(X,Y)|=0.5$ está relativamente afastado de 1 donde se possa adiantar que as v.a. $X$ e $Y$ não estão correlacionadas linearmente.]

# Exercício 5.13 (b): Variância Condicional

- **F.d.p. de $X$ condicional a $Y = y$**

$$\begin{aligned} f_{X|Y=y}(x) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{2y} = \frac{1}{y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \end{aligned}$$

onde $y$ é uma constante no intervalo $(0,1)$.

- **Variância de $X$ condicional a $Y = y$**

$$\begin{aligned} V(X \mid Y = y) &= E(X^2 \mid Y = y) - E^2(X \mid Y = y) \\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f_{X|Y=y}(x)\,dx\right] - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x \times f_{X|Y=y}(x)\,dx\right]^2 \\ &= \left[\int_0^y x^2 \times \frac{1}{y}\,dx\right] - \left[\int_0^y x \times \frac{1}{y}\,dx\right]^2 \\ &= \frac{1}{y} \times \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^y - \left[\frac{1}{y} \times \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^y\right]^2 \\ &= \frac{y^2}{3} - \left(\frac{y}{2}\right)^2 \\ &= \frac{y^2}{12}, \quad 0 < y < 1. \end{aligned}$$

# Exercício 5.13 (c): E(X) = E(E(X|Y))

Verifique que $E(X) = E[E(X|Y)]$.

- **V.a. de interesse**

  $E(X \mid Y)$ é uma v.a. que toma valores

  $$E(X \mid Y = y) \overset{(b)}{=} \frac{y}{2}, \quad 0 < y < 1$$

  com densidade $f_Y(y)$. Assim,

$$\begin{aligned}
E[E(X|Y)] &= \int_0^1 \frac{y}{2} \times f_Y(y)\,dy \\
&\overset{(a)}{=} \int_0^1 \frac{y}{2} \times 2y\,dy \\
&= \left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{3} \\
&\overset{(a)}{=} E(X).
\end{aligned}$$

- **[Obs.**

  $E[E(X|Y)] = E(X)$ para qualquer par aleatório $(X, Y)$...]

Slides Professora Sofia Naique

# Pares Aleatórios Contínuos: Exercícios do Murteira et al (2015)

3

Distribuição Conjunta, Marginais e Condicionais; Independência; Covariância e Correlação

Cap 4 do livro: 14, 16, 20, 24.

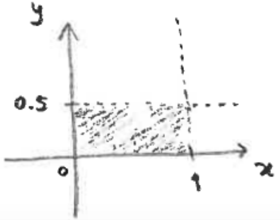
14. Considere que o vector aleatório $(X, Y)$ tem função densidade

$$f_{X,Y}(x, y) = 2 \quad (0 < x < 1; 0 < y < 1/2).$$

a) Verifique que é uma função densidade.
b) Obtenha as funções densidade marginais de $X$ e de $Y$, e analise a independência.
c) Calcule $P(X > 1/2, Y < 1/4)$.
d) Calcule $P(Y > X)$.
e) Calcule a média e a variância de $X$ e de $Y$.
f) Obtenha o coeficiente de correlação entre $X$ e $Y$.

# Exercício 14 (a)

$f_{X,Y}(x,y) = 2 \quad (0 < x < 1 \; ; \; 0 < y < 1/2) \longrightarrow$ suporte:




- $f_{X,Y}(x,y)$ é não negativa ✓

- $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{1/2}\int_0^1 2\,dx\,dy = \int_0^{1/2}\left[2x\right]_0^1 dy = \int_0^{1/2} 2\,dy =$

$= \left[2y\right]_0^{1/2} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ ✓

Logo, $f_{X,Y}(x,y)$ é uma função densidade.

# Exercício 14 (b)

Função densidade marginal de X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy = \int_0^{1/2} 2\, dy = \left[2y\right]_0^{1/2} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

Logo, $f_X(x) = 1 \quad (0 < x < 1)$

Função densidade marginal de Y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx = \int_0^1 2\, dx = \left[2x\right]_0^1 = 2$$

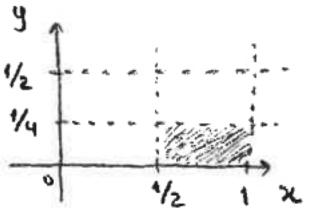
Logo, $f_Y(y) = 2 \quad (0 < y < 1/2)$

# Exercício 14 (b)

Porque $f_{X,Y}(x,y) = 2$ e $f_X(x)\, f_Y(y) = 1 \times 2 = 2$, podemos concluir que $X$ e $Y$ são independentes.

# Exercício 14 (c)

$$P\left(X > \tfrac{1}{2},\ Y < \tfrac{1}{4}\right) = ?$$




$$\longrightarrow \left(\tfrac{1}{2} < x < 1\right) \text{ e } \left(0 < y < \tfrac{1}{4}\right)$$

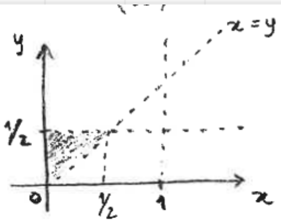
Logo,

$$P\left(X > \tfrac{1}{2},\ Y < \tfrac{1}{4}\right) = \int_0^{1/4} \int_{1/2}^{1} 2 \, dx \, dy = \int_0^{1/4} \left[2x\right]_{1/2}^{1} dy = \int_0^{1/4} (2-1)\, dy =$$

$$= \int_0^{1/4} 1 \, dy = \left[y\right]_0^{1/4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

# Exercício 14 (d)

$P(Y > X) = ?$




$\longrightarrow$ $(0 < x < y)$ e $(0 < y < 1/2)$

ou

$(0 < x < 1/2)$ e $(x < y < 1/2)$.

Logo,

$$P(X > Y) = \int_0^{1/2}\int_0^{y} 2\,dx\,dy = \int_0^{1/2}\Big[2x\Big]_0^{y} dy = \int_0^{1/2} 2y\,dy = \Big[y^2\Big]_0^{1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0.2$$

ou

$$P(X > Y) = \int_0^{1/2}\int_x^{1/2} 2\,dy\,dx = \int_0^{1/2}\Big[2y\Big]_x^{1/2} dx = \int_0^{1/2}(1-2x)\,dx = \Big[x - x^2\Big]_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

16. Seja

$$f_{X,Y}(x, y) = x + y \quad (0 < x < 1; 0 < y < 1).$$

a) Calcule $P(X > 1/2, Y > 1/2)$.

b) Determine as funções densidade marginais, e analise a independência das variáveis.

c) Obtenha as funções densidade condicionadas.

# Exercício 16 (a)

$$f_{X,Y}(x,y) = x + y \quad (0<x<1\,;\ 0<y<1)$$

(a)

$$P(X>1/2,\ Y>1/2) = \int_{1/2}^{1}\int_{1/2}^{1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{1/2}^{1}\int_{1/2}^{1} (x+y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{1/2}^{1} \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_{1/2}^{1} dy = \int_{1/2}^{1} \left(\frac{1}{2} + y - \frac{1}{8} - \frac{y}{2}\right) dy =$$

$$= \int_{1/2}^{1} \left(\frac{y}{2} + \frac{3}{8}\right) dy = \left[\frac{y^2}{4} + \frac{3}{8}y\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{16} - \frac{3}{16} = \frac{3}{8} = 0.375$$

# Exercício 16 (b)

- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^1 (x+y)\,dy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = x + \frac{1}{2} \quad (0<x<1)$

- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^1 (x+y)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_0^1 = y + \frac{1}{2} \quad (0<y<1)$

$X$ e $Y$ são independentes se e só se: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}$

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) = xy + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{4} \neq f_{X,Y}(x,y)$$

Logo, $X$ e $Y$ não são independentes.

# Exercício 16 (c)

- $$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{x+y}{y+1/2} \qquad (0<x<1 \;;\; y \text{ fixo})$$

- $$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x+y}{x+1/2} \qquad (0<y<1 \;;\; x \text{ fixo})$$

20. Uma pessoa pretende viajar diariamente num comboio que parte entre as 7:20 e as 7:30. A variável aleatória que representa o período de tempo (em minutos) que decorre entre as 7:20 e o momento da partida, $X$, tem função densidade

$$f_X(x) = \frac{10-x}{50} \quad (0 < x < 10).$$

A hora de chegada da pessoa à estação é também aleatória, entre as 7:20 e as 7:30.

A variável aleatória que representa o período de tempo (em minutos) que decorre entre as 7:20 e o momento da chegada da pessoa à estação, $Y$, tem distribuição dada por:

$$f_Y(y) = \frac{1}{10} \quad (0 < y < 10).$$

Admita a independência entre as duas variáveis aleatórias.

a) Determine a função de densidade conjunta da variável $(X, Y)$.
b) Calcule a percentagem de dias em que a pessoa viaja nesse comboio.
c) Qual a probabilidade de a pessoa ter que esperar mais de 2 minutos até à partida desse comboio?

# Exercício 20 (a)

X - tempo entre 7:20 e partida comboio $\longrightarrow f_X(x) = \frac{10-x}{50} \quad (0 < x < 10)$

Y - tempo entre 7:20 e chegada pessoa $\longrightarrow f_Y(y) = \frac{1}{10} \quad (0 < y < 10)$

X e Y são independentes

(a)

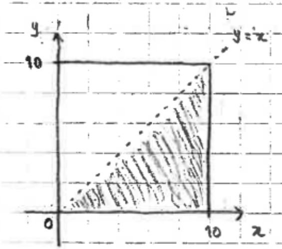
Porque X e Y são independentes, tem-se:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{10-x}{50} \cdot \frac{1}{10} = \frac{10-x}{500} \quad (0 < x < 10;\ 0 < y < 10)$$

# Exercício 20 (b)

Quer-se $P(X \geq Y)$

Domínio de integração




$(y \leq x < 10)$ e $(0 < y < 10)$ ou $(0 < y \leq x)$ e $(0 < x < 10)$

Alternativamente,

$$P(X \geq Y) = \int_0^{10} \int_0^{x} f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx = \cdots = 1/3$$

Logo,

$$P(X \geq Y) = \int_0^{10} \int_y^{10} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^{10} \int_y^{10} \frac{10-x}{500}\, dx\, dy = \frac{1}{500} \int_0^{10} \int_y^{10} (10-x)\, dx\, dy =$$

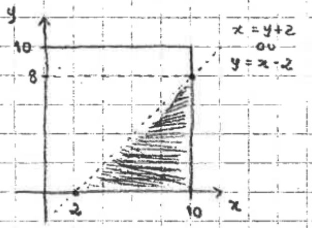
$$= \frac{1}{500} \int_0^{10} \left[ 10x - \frac{x^2}{2} \right]_y^{10} dy = \frac{1}{500} \int_0^{10} \left( 100 - 50 - 10y + \frac{y^2}{2} \right) dy = \frac{1}{500} \int_0^{10} \left( \frac{y^2}{2} - 10y + 50 \right) d$$

$$= \frac{1}{500} \left[ \frac{y^3}{6} - 5y^2 + 50y \right]_0^{10} = \frac{1}{500} \left( \frac{1000}{6} - 500 + 500 \right) = \frac{1000}{3000} = \frac{1}{3}$$

# Exercício 20 (c)

Quer-se $P(X > Y+2)$

Domínio de integração




$(y+2 < x < 10)$ e $(0 < y < 8)$

ou

$(0 < y < x-2)$ e $(2 < x < 10)$

Logo,

$$P(X > Y+2) = \int_0^8 \int_{y+2}^{10} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^8 \int_{y+2}^{10} \frac{10-x}{500}\,dx\,dy = \frac{1}{500}\int_0^8 \int_{y+2}^{10} (10-x)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{500}\int_0^8 \left[10x - \frac{x^2}{2}\right]_{y+2}^{10} dy = \frac{1}{500}\int_0^8 \left(100 - 50 - 10y - 20 + \frac{y^2}{2} + 2y + 2\right) dy$$

$$= \frac{1}{500}\int_0^8 \left(\frac{y^2}{2} - 8y + 32\right) dy = \frac{1}{500}\left[\frac{y^3}{6} - 4y^2 + 32y\right]_0^8 =$$

$$= \frac{1}{500}\left(\frac{512}{6} - 256 + 256\right) = \frac{1}{500} \times \frac{256}{3} = \frac{64}{375} \approx 0.1707$$

Alternativamente,

$$P(X > Y+2) = \int^{10} \int^{x-2} f(x,y)\,dy\,dx = \cdots = 64/375 \approx 0.1707$$

24. Uma empresa dedica-se ao comércio de diversos artigos, cujas vendas têm comportamentos aleatórios. As vendas mensais dos artigos $A$ e $B$, expressas em unidades monetárias, constituem um vector aleatório $(X, Y)$ com função densidade

$$f_{X,Y}(x, y) = 1/2 \quad (0 < x < 2, 0 < y < x).$$

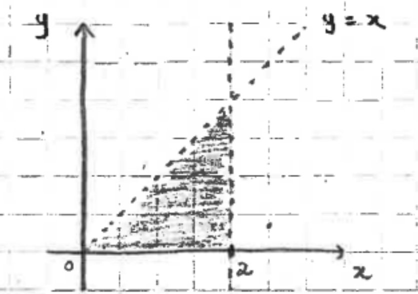
a) Calcule a média e a variância de $X$, e de $Y$.
b) Estude a independência das variáveis e determine o coeficiente de correlação.
c) Obtenha a média da variável $Y$, condicionada por $X = 1$.
d) Determine a média e a variância do total das vendas dos dois artigos em causa?

# Exercício 24 (a)

X - vendas mensais do artigo A, em u.m.

Y - vendas mensais do artigo B, em u.m.

$f(x,y) = 1/2 \quad (0<x<2\ ;\ 0<y<x) \xrightarrow{\text{suporte}}$



# Exercício 24 (a)

Artigo A

$$E(x) = \int_0^2 \int_0^x x\, f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^2 \int_0^x x \cdot \frac{1}{2}\, dy\, dx = \int_0^2 \left[\frac{xy}{2}\right]_0^x dx =$$

$$= \int_0^2 \frac{x^2}{2}\, dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \approx 1.3333$$

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$\bullet\ E(x^2) = \int_0^2 \int_0^x x^2 \cdot \frac{1}{2}\, dy\, dx = \int_0^2 \left[\frac{x^2 y}{2}\right]_0^x dx = \int_0^2 \frac{x^3}{2}\, dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 = \frac{16}{8} = 2$$

$$Var(x) = 2 - (4/3)^2 = 2/9 \approx 0.2222$$

# Exercício 24 (a)

Artigo B

$$E(Y) = \int_0^2 \int_0^x y \cdot \frac{1}{2}\, dy\, dx = \int_0^2 \left[\frac{y^2}{4}\right]_0^x dx = \int_0^2 \frac{x^2}{4}\, dx = \left[\frac{x^3}{12}\right]_0^2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \approx 0.6667$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

- $$E(Y^2) = \int_0^2 \int_0^x y^2 \cdot \frac{1}{2}\, dy\, dx = \int_0^2 \left[\frac{y^3}{6}\right]_0^x dx = \int_0^2 \frac{x^3}{6}\, dx = \left[\frac{x^4}{24}\right]_0^2 = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$Var(Y) = (2/3) - (2/3)^2 = 2/9 \approx 0.2222$$

# Exercício 24 (b)

X e Y são independentes se e só se : $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$

<u>Função densidade marginal de X</u>

$$f_X(x) = \int_y f_{X,Y}(x,y)\, dy = \int_0^x \frac{1}{2}\, dy = \left[\frac{y}{2}\right]_0^x = x/2 \qquad (0 < x < 2)$$

<u>Função densidade marginal de Y</u>

$$f_Y(y) = \int_x f_{X,Y}(x,y)\, dx = \int_y^2 \frac{1}{2}\, dx = \left[\frac{x}{2}\right]_y^2 = 1 - y/2 \qquad (0 < y < 2)$$

Porque $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)\, f_Y(y)$ , conclui-se que X e Y não são independentes.

# Exercício 24 (b)

Coeficiente de correlação: $\rho_{X,Y} = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \; \sigma_Y}$

- $\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y)$, onde:

$$E(XY) = \int_0^2 \int_0^x xy \cdot \frac{1}{2}\, dy\, dx = \int_0^2 \left[\frac{xy^2}{4}\right]_0^x dx = \int_0^2 \frac{x^3}{4}\, dx = \left[\frac{x^4}{16}\right]_0^2 = 1$$

- $\text{Cov}(X,Y) = 1 - (4/3)(2/3) = 1/9$

Logo, $\rho_{X,Y} = \dfrac{1/9}{\sqrt{2/9}\,\sqrt{2/9}} = \dfrac{1}{2} = 0.5$

# Exercício 24 (c)

$$E(Y|X=1) = \int_{y} y \cdot f_{Y|X=1}(y)\,dy = \int_0^x y \cdot f_{Y|X=1}(y)\,dy = \int_0^1 y \cdot f_{Y|X=1}(y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 y \cdot \frac{f_{X,Y}(1,y)}{f_X(1)}\,dy = \int_0^1 y \cdot \frac{1/2}{1/2}\,dy = \int_0^1 y\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} = 0.5$$

# Exercício 24 (d)

$Z = X + Y \rightarrow$ total das vendas, em u.m.

$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 4/3 + 2/3 = 6/3 = 2$

$Var(Z) = Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y) = 2/9 + 2/9 + 2 \cdot (1/9) = 2/3$

$\approx 0.6667$

# Obrigada!

## Questões?