# Estatística I

## Licenciatura em Gestão
## 2.º Ano/1.º Semestre
## 2023/2024

# Aulas Teóricas N.ºs 18 e 19 (Semana 10)

**Docente**: Elisabete Fernandes
**E-mail**: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

# Conteúdos Programáticos

| Aulas Teóricas (Semanas 1 a 3) | Aulas Teóricas (Semanas 3 a 5) | Aulas Teóricas (Semanas 5 a 7) | Aulas Teóricas (Semanas 8 a 13) |
|---|---|---|---|
| • **Capítulo 2**: Probabilidades | • **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais | • **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais | • **Capítulo 5**: Distribuições Teóricas<br>• **Capítulo 6**: Amostragem. Distribuições por Amostragem. |

**Material didático:** Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

**Bibliografia**: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

https://cas.iseg.ulisboa.pt

| | |
|---|---|
| Aula 17 | Distribuição normal: continuação. Distribuição exponencial: propriedades; falta de memória e distribuição do mínimo. Exemplo. |
| Aula 18 | Distribuição do tempo de espera até à primeira ocorrência de um processo de Poisson. Distribuição gama e distribuição do qui-quadrado. Teorema do limite central: enunciado e exemplo de aplicação. |
| Aula 19 | Teorema de De Moivre Laplace. Aproximação de Poisson por normal. |

# 1 Distribuição Normal

Variáveis Aleatórias Contínuas

# Distribuição Normal ou Gaussiana

A v. a. $X$ tem distribuição Normal com parâmetros $\mu$ e $\sigma^2$ se sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Formulário

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, x \in \mathbb{R}$$

$$E(X) = \mu, Var(X) = \sigma^2$$

Pode ser mostrado que:

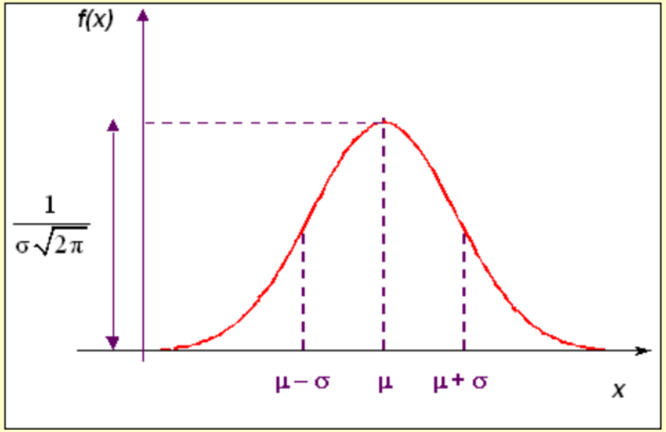
1. $\mu$ é o valor esperado (média) de $X$, com $-\infty < \mu < \infty$;
2. $\sigma^2$ é a variância de $X$, com $\sigma^2 > 0$.

Distribuição Normal (usp.br)

Notação : $X \sim N(\mu\,;\,\sigma^2)$

# Distribuição Normal: Propriedades

Propriedades de $X \sim N(\mu; \sigma^2)$

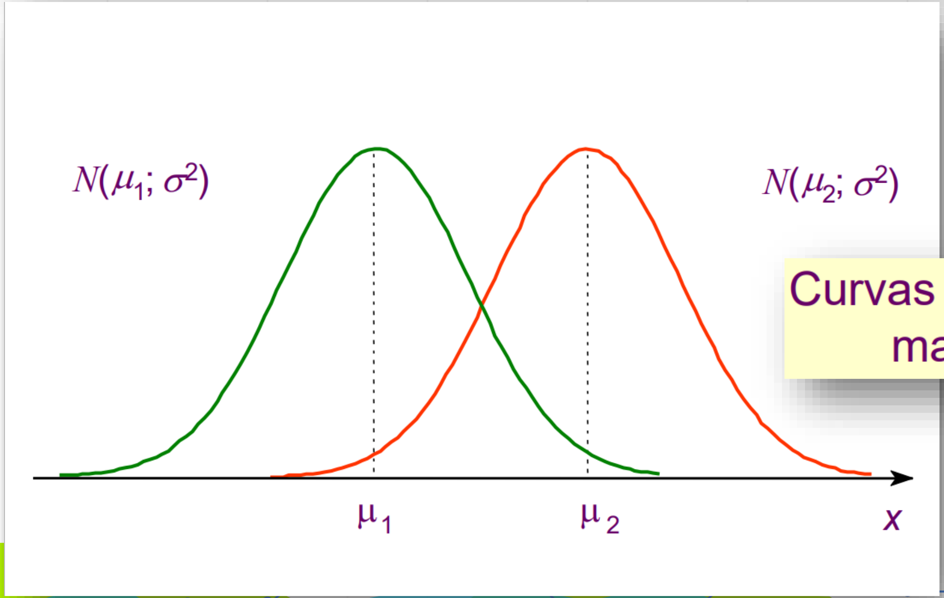



- $E(X) = \mu$ (média ou valor esperado);
- $Var(X) = \sigma^2$ (e portanto, $DP(X) = \sigma$);
- $f(x) \to 0$, quando $x \to \pm\infty$;
- $x = \mu$ é ponto de máximo de $f(x)$;
- $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são pontos de inflexão de $f(x)$;
- a curva Normal é simétrica em torno da média $\mu$.

Distribuição Normal (usp.br)

# Distribuição Normal: Valor Médio

A distribuição Normal depende dos parâmetros $\mu$ e $\sigma^2$

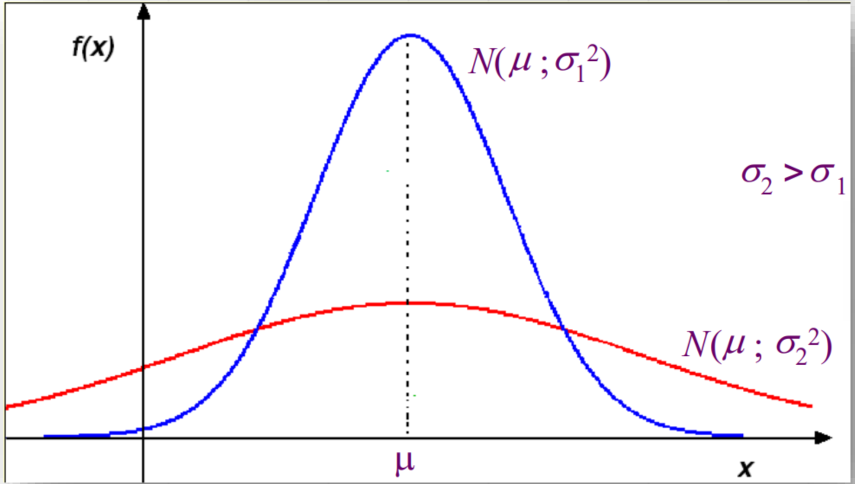



Curvas Normais com <u>mesma variância</u> $\sigma^2$ mas <u>médias diferentes</u> ($\mu_2 > \mu_1$).

Distribuição Normal (usp.br)

# Distribuição Normal: Variância

Influência de $\sigma^2$ na curva Normal




Curvas Normais com <u>mesma média $\mu$</u> mas com <u>variâncias diferentes</u> ($\sigma_2 > \sigma_1$ ).

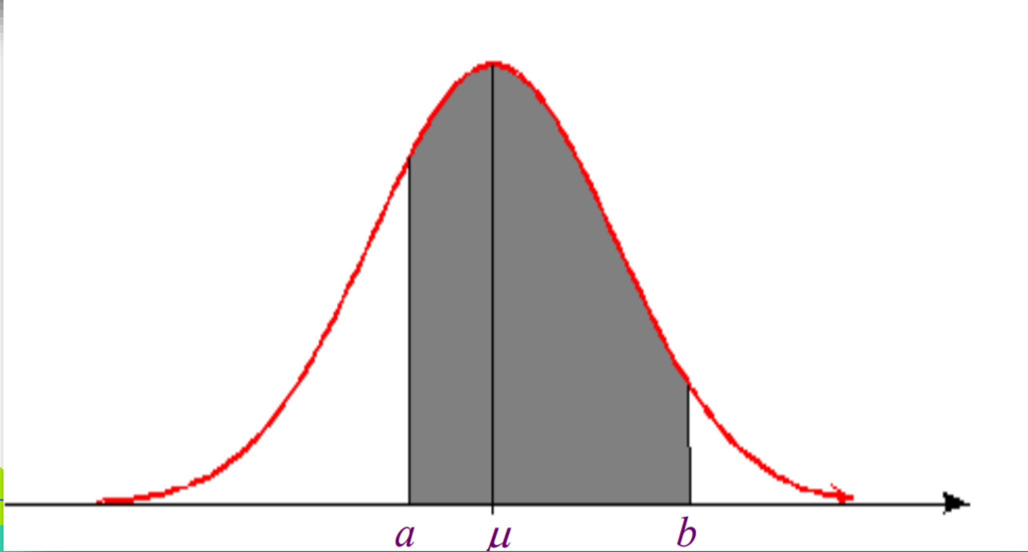
[Distribuição Normal (usp.br)]

# Distribuição Normal: Cálculo de Probabilidades

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$$

$$\Downarrow$$

Área sob a curva e acima do eixo horizontal $(x)$ entre $a$ e $b$.



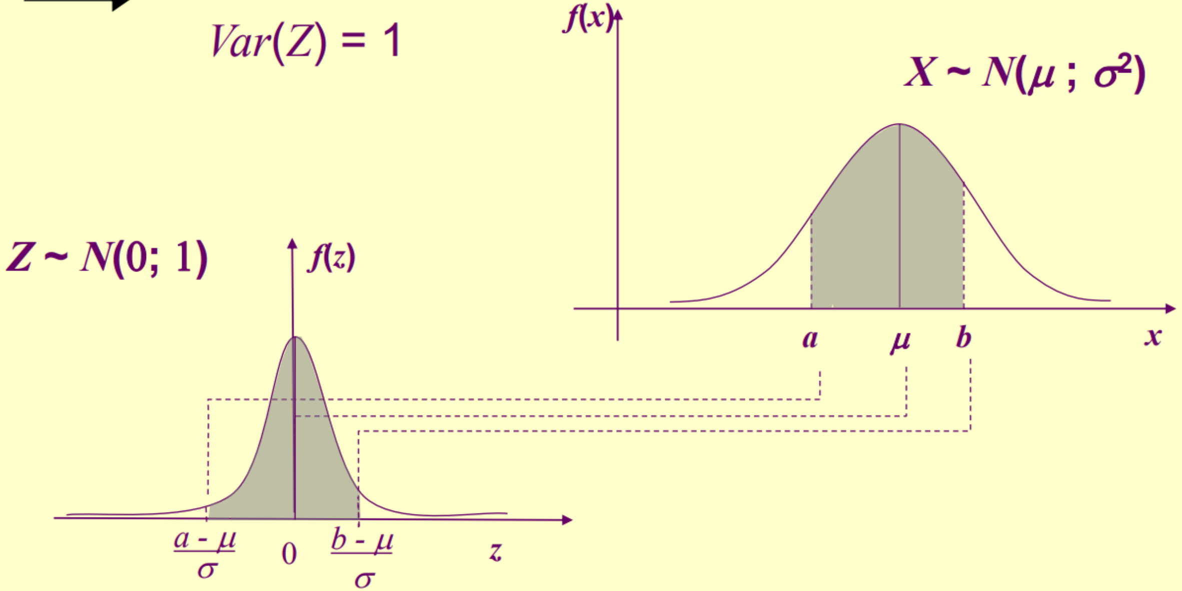

Distribuição Normal (usp.br)

# Distribuição Normal Padrão: Z ~ N(0,1)

Se $X \sim N(\mu\,;\sigma^2)$, definimos $\boxed{Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}}$

$\Rightarrow$ $E(Z) = 0$

$Var(Z) = 1$




Distribuição Normal (usp.br)

# Distribuição Normal Padrão: Z ~ N(0,1)

A v.a. $Z \sim N(0;1)$ denomina-se ***normal padrão*** ou ***reduzida***.

Portanto,

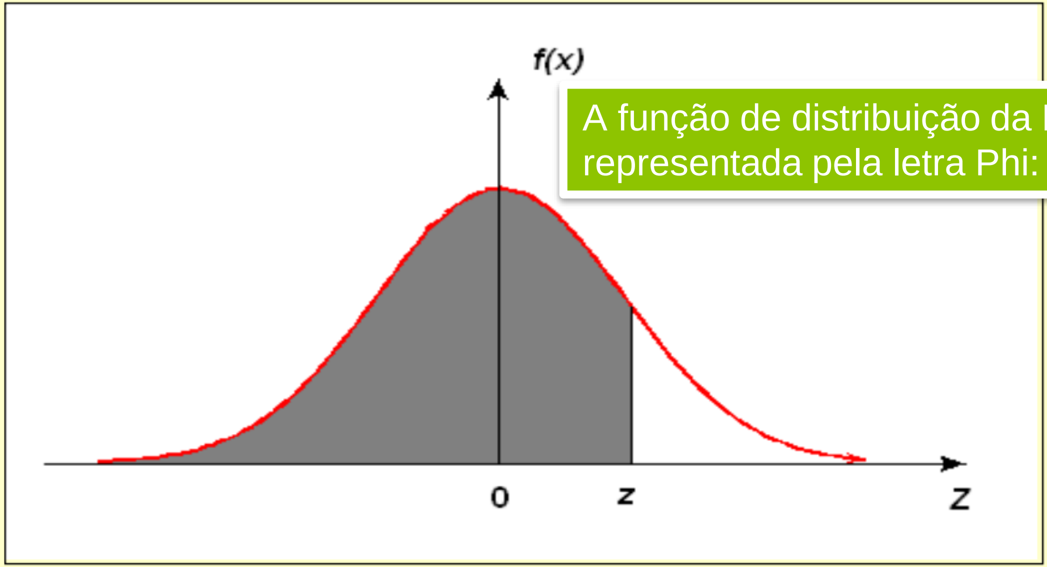
$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

Dada a v.a. $Z \sim N(0;1)$ podemos obter a v.a. $X \sim N(\mu;\ \sigma^2)$ através da transformação inversa

$$X = \mu + Z \times \sigma.$$

Distribuição Normal (usp.br)

# Distribuição Normal Padrão: Probabilidades




A função de distribuição da Normal Padrão é representada pela letra Phi: $P(Z \leq z) = F(z) = \Phi(z)$

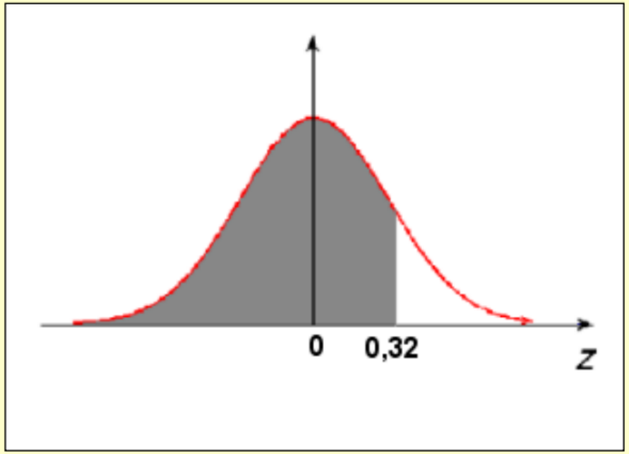
Denotamos : $A(z) = P(Z \leq z)$, para $z \geq 0$.

[Distribuição Normal (usp.br)]

# Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

**Exemplo:** Seja $Z \sim N(0;\ 1)$, calcular

a) $P(Z \leq 0{,}32)$




Distribuição Normal (usp.br)

$$P(Z \leq 0{,}32) = A(0{,}32) = 0{,}6255.$$

# Distribuição Normal Padrão: Tabela

| $z$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.998650 | 0.998694 | 0.998736 | 0.998777 | 0.998817 | 0.998856 | 0.998893 | 0.998930 | 0.998965 | 0.998999 |
| 3.1 | 0.999032 | 0.999064 | 0.999096 | 0.999126 | 0.999155 | 0.999184 | 0.999211 | 0.999238 | 0.999264 | 0.999289 |
| 3.2 | 0.999313 | 0.999336 | 0.999359 | 0.999381 | 0.999402 | 0.999423 | 0.999443 | 0.999462 | 0.999481 | 0.999499 |
| 3.3 | 0.999517 | 0.999533 | 0.999550 | 0.999566 | 0.999581 | 0.999596 | 0.999610 | 0.999624 | 0.999638 | 0.999650 |
| 3.4 | 0.999663 | 0.999675 | 0.999687 | 0.999698 | 0.999709 | 0.999720 | 0.999730 | 0.999740 | 0.999749 | 0.999758 |
| 3.5 | 0.999767 | 0.999776 | 0.999784 | 0.999792 | 0.999800 | 0.999807 | 0.999815 | 0.999821 | 0.999828 | 0.999835 |
| 3.6 | 0.999841 | 0.999847 | 0.999853 | 0.999858 | 0.999864 | 0.999869 | 0.999874 | 0.999879 | 0.999883 | 0.999888 |
| 3.7 | 0.999892 | 0.999896 | 0.999900 | 0.999904 | 0.999908 | 0.999912 | 0.999915 | 0.999918 | 0.999922 | 0.999925 |
| 3.8 | 0.999928 | 0.999930 | 0.999933 | 0.999936 | 0.999938 | 0.999941 | 0.999943 | 0.999946 | 0.999948 | 0.999950 |
| 3.9 | 0.999952 | 0.999954 | 0.999956 | 0.999958 | 0.999959 | 0.999961 | 0.999963 | 0.999964 | 0.999966 | 0.999967 |
| 4.0 | 0.999968 | 0.999970 | 0.999971 | 0.999972 | 0.999973 | 0.999974 | 0.999975 | 0.999976 | 0.999977 | 0.999978 |

$P(Z \leq 0{,}32) = 0{,}6255$

# Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

b) $P(0 < Z \leq 1{,}71)$

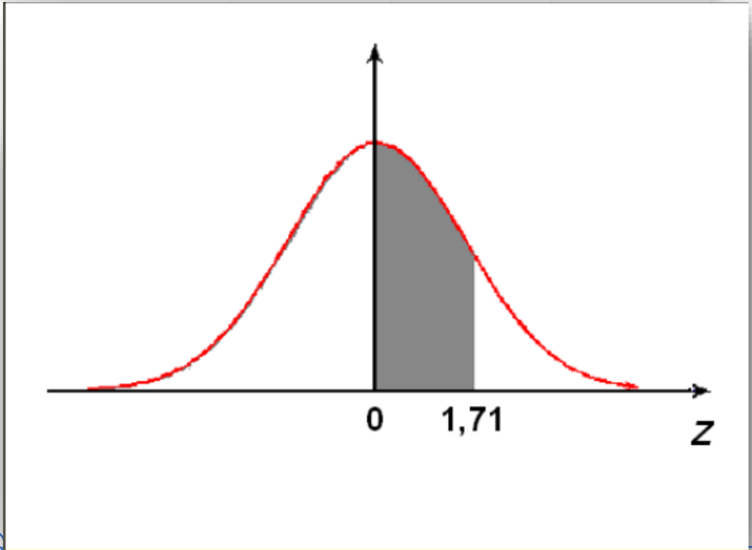
$= P(Z \leq 1{,}71) - P(Z \leq 0)$

$= A(1{,}71) - A(0)$

$= 0{,}9564 - 0{,}5 = 0{,}4564.$

Obs.: $A(0)=P(Z < 0)=P(Z > 0)=0{,}5.$

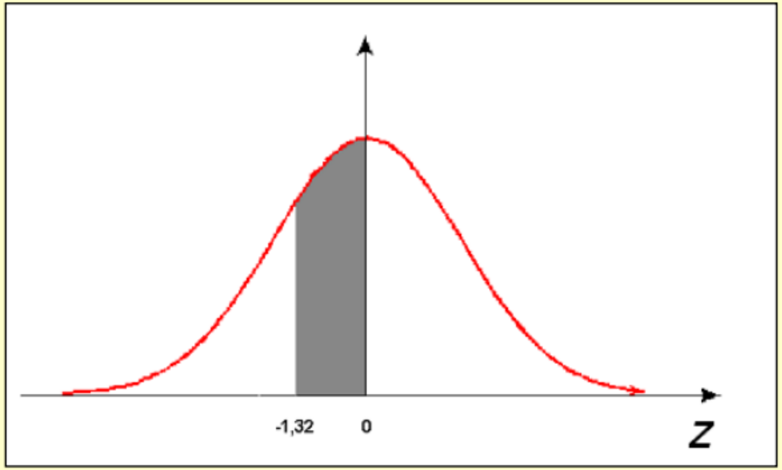
P(-a < Z < a) = Φ(a) – Φ(-a)
P(Z < -a) = Φ(-a) = 1-Φ(a)
sendo "a" uma constante positiva e Φ (Phi) a fd da Distribuição Normal Padrão




Distribuição Normal (usp.br)

# Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

c) $P(-1,32 < Z < 0) = P(0 < Z < 1,32)$




$= P(Z \leq 1,32) - P(Z \leq 0)$

$= A(1,32) - 0,5$

$= 0,9066 - 0,5 = 0,4066.$

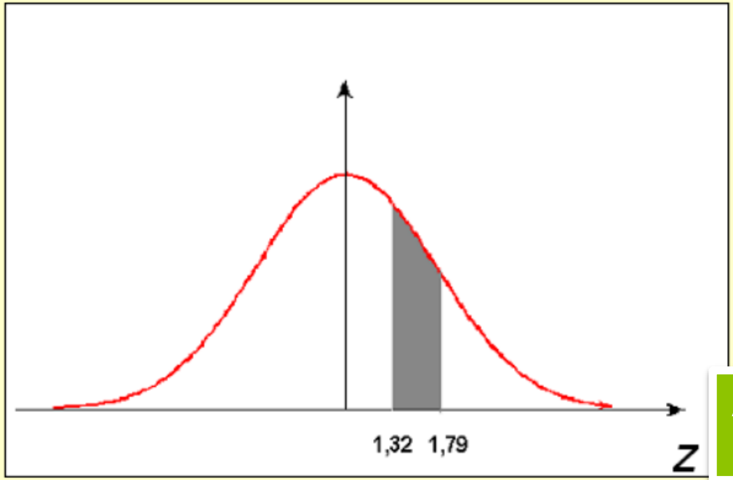
Tabela

Alternativa, $P(-1,32 < Z < 0) = \Phi(0) - \Phi(-1,32) = \Phi(0) - [1 - \Phi(1,32)] = 0,5 - 1 + 0,9066 = 0,4066$

Distribuição Normal (usp.br)

# Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

d) $P(1{,}32 < Z \leq 1{,}79)$




$$= P(Z \leq 1{,}79) - P(Z \leq 1{,}32)$$

$$= A(1{,}79) - A(1{,}32)$$

$$= 0{,}9633 - 0{,}9066 = 0{,}0567.$$

Alternativa, $P(1{,}32 < Z \leq 1{,}79) = \Phi(1{,}79) - \Phi(1{,}32)$
$= 0{,}9633 - 0{,}9066 = 0{,}0567$

Distribuição Normal (usp.br)

# Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

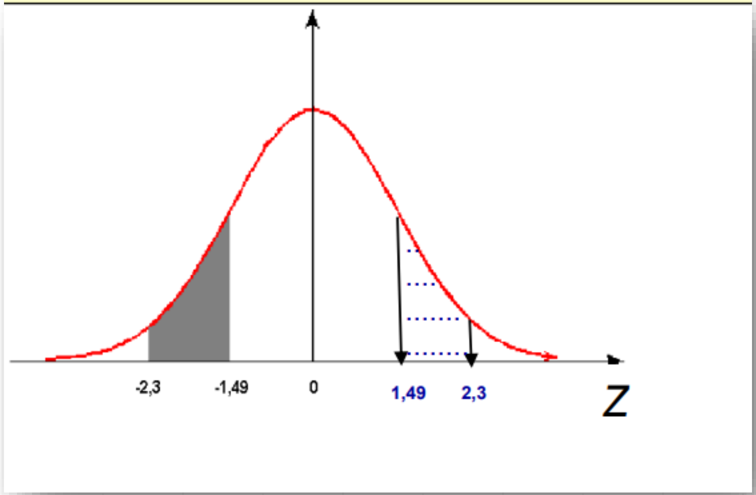
e) $P(-2{,}3 < Z \leq -1{,}49)$

$= P(1{,}49 \leq Z < 2{,}3)$

$= A(2{,}3) - A(1{,}49)$

$= 0{,}9893 - 0{,}9319$

$= 0{,}0574.$




Distribuição Normal (usp.br)

Alternativa, $P(-2{,}3 < Z \leq -1{,}49) = \Phi(-1{,}49) - \Phi(-2{,}3)$
$= [1 - \Phi(1{,}49)] - [1 - \Phi(2{,}3)] = 0{,}0574$

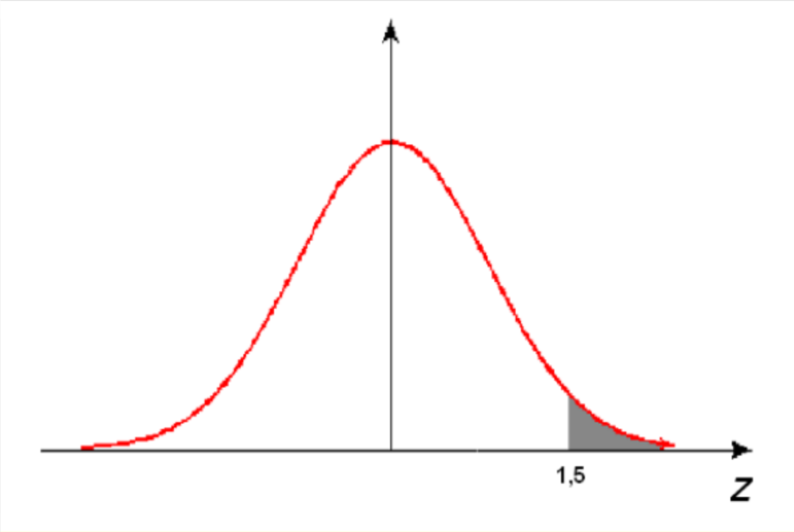
# Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

f) $P(Z \geq 1{,}5)$

$= 1 - P(Z \leq 1{,}5)$

$= 1 - A(1{,}5)$

$= 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668.$




Distribuição Normal (usp.br)

Alternativa, $P(Z \geq 1{,}5) = 1 - \Phi(1{,}5) = 0{,}0668$

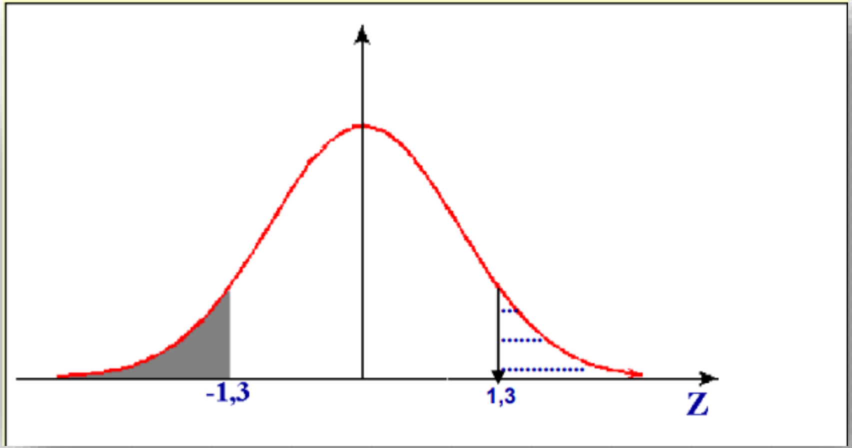
# Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

g) $P(Z \leq -1{,}3)$

$= P(Z \geq 1{,}3) = 1 - P(Z \leq 1{,}3)$

$= 1 - A(1{,}3)$

$= 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968.$




Distribuição Normal (usp.br)

Obs.: Pela simetria, $P(Z \leq -1{,}3) = P(Z \geq 1{,}3)$.

# Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

h) $P(-1{,}5 \leq Z \leq 1{,}5)$

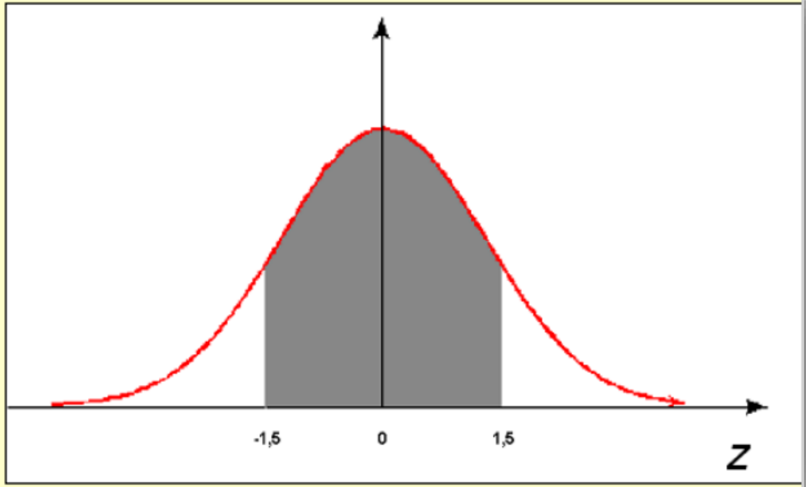
$$= P(Z \leq 1{,}5) - P(Z \leq -1{,}5)$$

$$= P(Z \leq 1{,}5) - P(Z \geq 1{,}5)$$

$$= P(Z \leq 1{,}5) - [1 - P(Z \leq 1{,}5)]$$

$$= 2 \times P(Z \leq 1{,}5) - 1 = 2 \times A(1{,}5) - 1$$

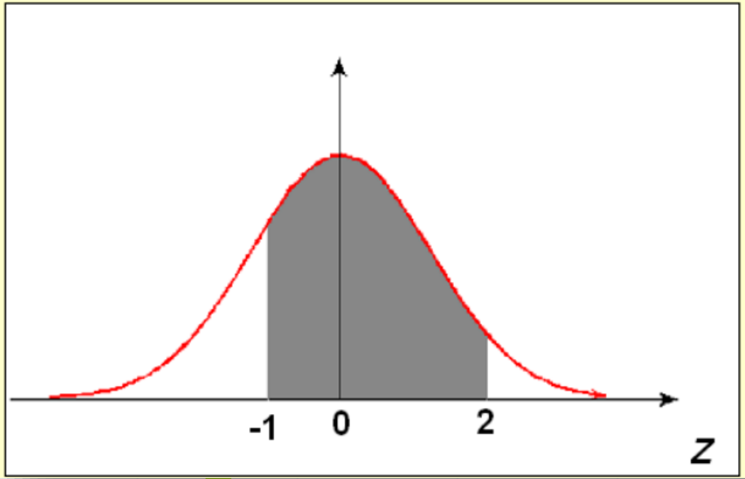
$$= 2 \times 0{,}9332 - 1 = 0{,}8664.$$




Distribuição Normal (usp.br)

# Distribuição Normal Padrão: Probabilidades

i) $P(-1 \leq Z \leq 2)$




$= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1)$

$= A(2) - P(Z \geq 1) = A(2) - (1 - A(1))$

$= 0{,}9773 - (1 - 0{,}8413)$

$= 0{,}9773 - 0{,}1587 = 0{,}8186.$

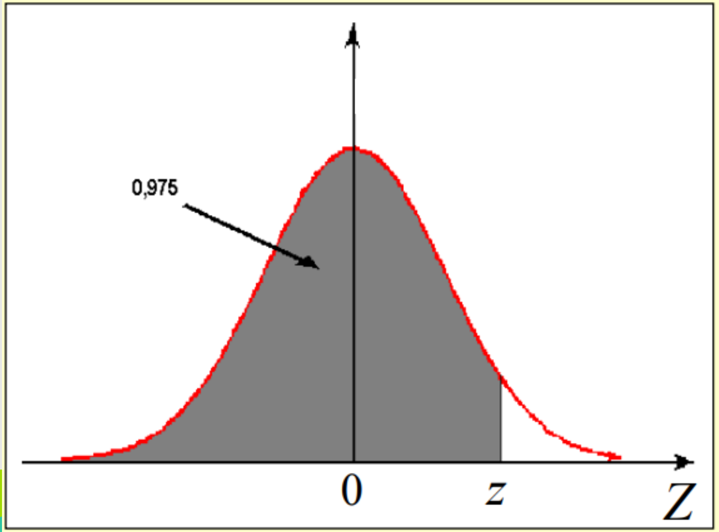
Tabela

Distribuição Normal (usp.br)

# Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor $z$ da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(i) $P(Z \leq z) = 0,975$




$z$ é tal que $A(z) = 0,975$.

Pela tabela, $z = 1,96$.

Alternativa, $P(Z \leq z) = 0,975 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0,975$
$\Leftrightarrow z = \Phi(0,975)^{-1} = 1,96$

Distribuição Normal (usp.br)

# Distribuição Normal Padrão: Tabela

Quantis

| z | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| .1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| .2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| .3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| .4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| .5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| .6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| .7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| .8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| .9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| 1.3 | .9032 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| 1.4 | .9192 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0 | .9772 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2 | .9861 | .9864 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3 | .9893 | .9896 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4 | .9918 | .9920 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |
| 2.9 | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |
| 3.0 | .9987 | .9987 | .9987 | .9988 | .9988 | .9989 | .9989 | .9989 | .9990 | .9990 |
| 3.1 | .9990 | .9991 | .9991 | .9991 | .9992 | .9992 | .9992 | .9992 | .9993 | .9993 |
| 3.2 | .9993 | .9993 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9995 | .9995 | .9995 |
| 3.3 | .9995 | .9995 | .9995 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9997 |

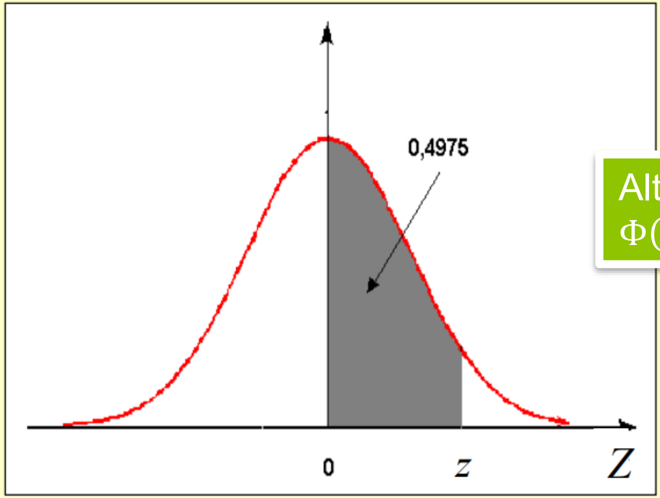
$P(Z \leq z) = 0{,}975 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0{,}975 \Leftrightarrow z = \Phi(0{,}975)^{-1} = 1{,}96$

Probabilidades

# Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor $z$ da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(ii) $P(0 < Z \leq z) = 0{,}4975$




$z$ é tal que $A(z) = 0{,}5 + 0{,}4975 = 0{,}9975$.

Pela tabela $z = 2{,}81$. Tabela

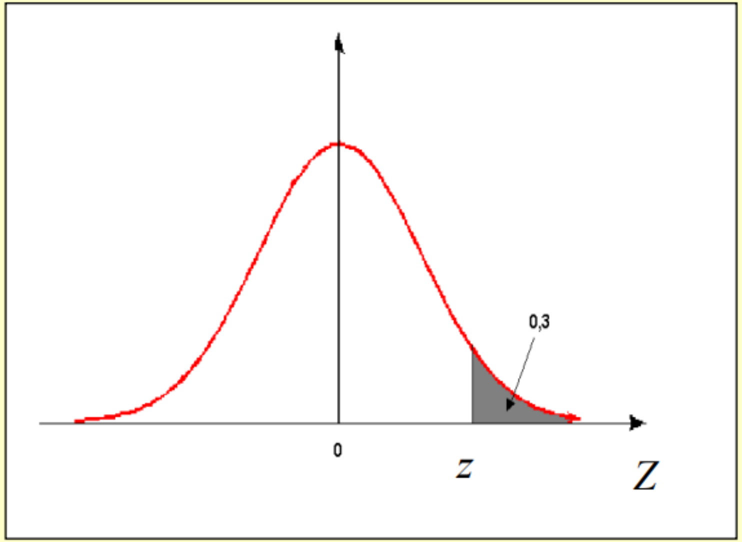
Alternativa, $P(0 < Z \leq z) = 0{,}4975 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(0) = 0{,}4975 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0{,}4975 + 0{,}5 \Leftrightarrow z = \Phi(0{,}9975)^{-1} = 2{,}81$

Distribuição Normal (usp.br)

# Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor $z$ da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(iii) $P(Z \geq z) = 0,3$




$z$ é tal que $A(z) = 0,7$.

Pela tabela, $z = 0,53$.

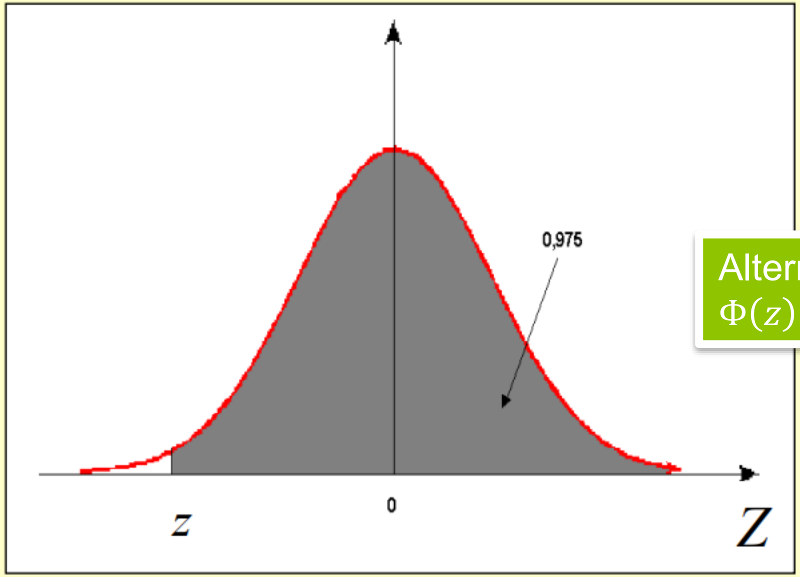
Alternativa, $P(Z \geq z) = 0,3 \Leftrightarrow 1 - \Phi(z) = 0,3 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0,7 \Leftrightarrow z = \Phi(0,7)^{-1} = 0,53$

Distribuição Normal (usp.br)

# Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor $z$ da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(iv) $P(Z \geq z) = 0{,}975$




$a$ é tal que $A(a) = 0{,}975$ e $z = -a$.

Pela tabela $a = 1{,}96$.

Então, $z = -1{,}96$.

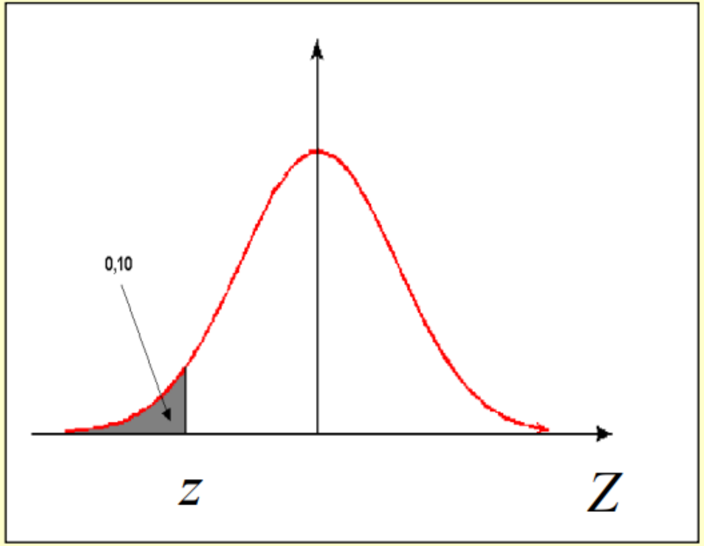
Alternativa, $P(Z \geq z) = 0{,}975 \Leftrightarrow 1 - \Phi(z) = 0{,}975 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0{,}025 \Leftrightarrow z = \Phi(0{,}025)^{-1} = -\Phi(0{,}975)^{-1} = -1{,}96$

Distribuição Normal (usp.br)

# Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor $z$ da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(v) $P(Z \leq z) = 0{,}10$




$a$ é tal que $A(a)$=0,90 e $z = -a$.

Pela tabela, $a$ = 1,28

e, assim, $z$ = – 1,28.

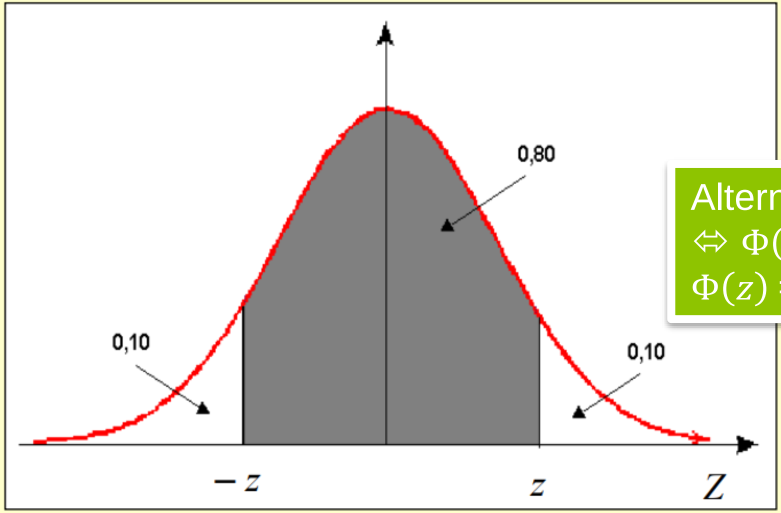
Alternativa, P(Z ≤ z) = 0,10 ⇔ $\Phi(z) = 0{,}10$ ⇔ z = $\Phi(0{,}1)^{-1}$ = $-\Phi(0{,}9)^{-1}$ = -1,28

Distribuição Normal (usp.br)

# Distribuição Normal Padrão: Quantis

Como encontrar o valor $z$ da distribuição $N(0;1)$ tal que:

(vi) $P(-z \leq Z \leq z) = 0{,}80$




$z$ é tal que $P(Z < -z) = P(Z > z) = 0{,}1$.

Isto é, $P(Z < z) = A(z) = 0{,}90$

$\Rightarrow z = 1{,}28$ (pela tabela).

Tabela

Alternativa, $P(-z \leq Z \leq z) = 0{,}80 \Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0{,}80 \Leftrightarrow \Phi(z) - [1 - \Phi(z)] = 0{,}80 \Leftrightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0{,}80 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0{,}9 \Leftrightarrow z = \Phi(0{,}9)^{-1} = 1{,}28$

Distribuição Normal (usp.br)

# Distribuição Normal: Probabilidades

**Exemplo:** Seja $X \sim N(10\ ;\ 64)$ ( $\mu = 10$, $\sigma^2 = 64$ e $\sigma = 8$ )

Calcular: (a) $P(6 \leq X \leq 12)$

$$= P\left(\frac{6-10}{8} < \frac{X-10}{8} < \frac{12-10}{8}\right) = P(-0{,}5 < Z < 0{,}25)$$


$= A(0{,}25) - (1 - A(0{,}5))$

$= 0{,}5987 - (1 - 0{,}6915)$

$= 0{,}5987 - 0{,}3085 = 0{,}2902$

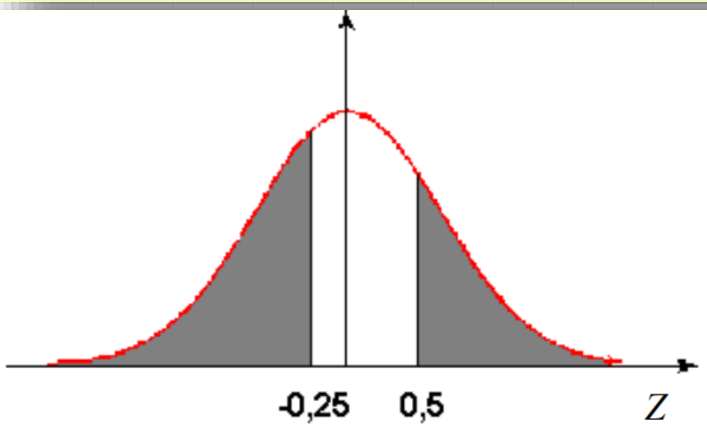
Distribuição Normal (usp.br)

# Distribuição Normal: Probabilidades

(b) $P(\,X \leq 8$ ou $X > 14)$

$$P(X \leq 8) + P(X > 14) = P\left(Z \leq \frac{8-10}{8}\right) + P\left(Z > \frac{14-10}{8}\right)$$

$$= P\left(Z < -0{,}25\right) + P\left(Z > 0{,}5\right)$$




$= 1 - A(0{,}25) + 1 - A(0{,}5)$

$= 1 - 0{,}5987 + 1 - 0{,}6915$

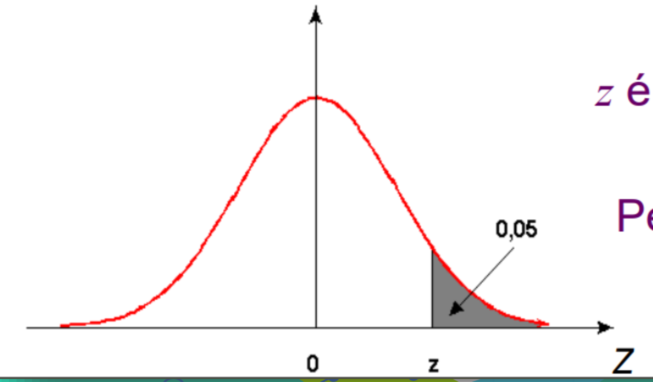
$= 0{,}7098$

Distribuição Normal (usp.br)

# Distribuição Normal: Quantis

c) $k$ tal que $P(X \geq k) = 0{,}05$

$$P(X \geq k) = 0{,}05 \Rightarrow P\left(\frac{X-10}{8} \geq \frac{k-10}{8}\right) = P\left(Z \geq \overbrace{\frac{k-10}{8}}^{z}\right) = 0{,}05.$$




$z$ é tal que $A(z) = 0{,}95$

Pela tabela $z = 1{,}64$

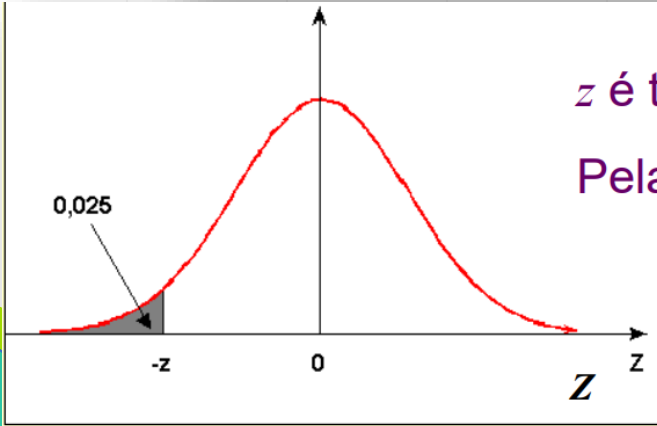
Então, $z = \dfrac{k-10}{8} = 1{,}64.$

Logo $k = 10 + 1{,}64 \times 8 = 23{,}12.$

# Distribuição Normal: Quantis

d) $k$ tal que $P(X \leq k) = 0{,}025$

$$P(X \leq k) = 0{,}025 \Rightarrow P\left(\frac{X - 10}{8} \leq \frac{k - 10}{8}\right) = P\left(Z \leq \frac{k - 10}{8}\right) = 0{,}025.$$




$z$ é tal que $A(z) = 0{,}975$.

Pela tabela, $z = 1{,}96$.

Então, $\dfrac{k - 10}{8} = -z = -1{,}96.$

Logo $k = 10 - 1{,}96 \times 8 = -5{,}68$.

# Distribuição Normal: Probabilidades

Observação : Se $X \sim N(\mu\,;\,\sigma^2)$, então

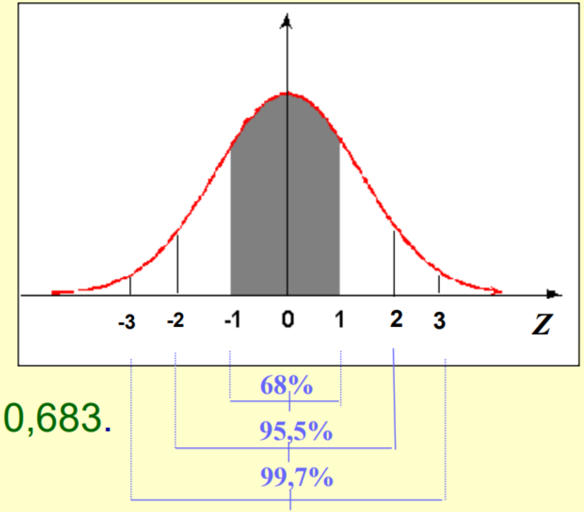
$$(\text{i})P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) = P\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right)$$

$= P(-1 \le Z \le 1)$

$= 2\times(A(1) - 0{,}5)$

$= 2\times(0{,}8413 - 0{,}5)$

$= 0{,}6826$




ou seja, $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) =$ 0,683.

(ii) $P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) = P(-2 \le Z \le 2) =$ 0,955.

(iii) $P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) = P(-3 \le Z \le 3) =$ 0,997.

Tabela

Distribuição Normal (usp.br)

# Distribuição Normal: Resumo…

Formulário

- **NORMAL** $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $(-\infty < \mu < +\infty, \quad 0 < \sigma < +\infty)$

$$f(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$E(X) = \mu\,;\ \operatorname{Var}(X) = \sigma^2\,;\ M_X(s) = \exp\left\{\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right\};\ \gamma_1 = 0\,;\ \gamma_2 = 3$$

Função geradora de momentos

$M_X(t) = E(e^{tX})$,

$M_X^{(n)}(t)\big|_{t=0} = E(X^n)$

Propriedades:

- Normal estandardizada $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ ; $\phi(z) = \phi(-z)$ e $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$
- $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ independentes $\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{k} X_i \sim N\left(k\mu, k\sigma^2\right)$ e $\bar{X} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{k}\right)$
- $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ independentes $\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_i \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$ com $\mu_Y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu_i$ e $\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \sigma_i^2$

# Distribuição Normal: Exercícios

Variáveis Aleatórias Contínuas

2

**Exemplo** : O tempo gasto no exame vestibular de uma universidade tem distribuição Normal, com média 120 $min$ e desvio padrão 15 $min$.

a) Sorteando-se um aluno ao acaso, qual é a probabilidade dele terminar o exame antes de 100 minutos?

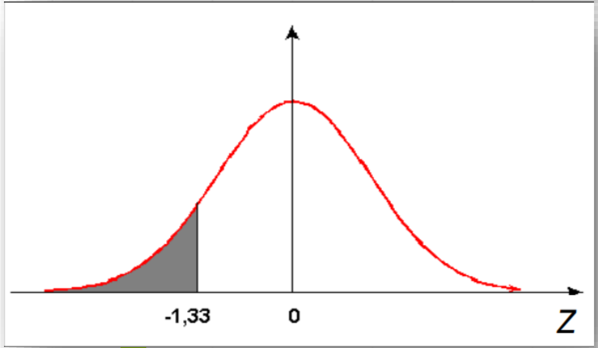
b) Qual deve ser o tempo de prova, de modo a permitir que 95% dos vestibulandos terminem no prazo estipulado?

c) Qual é o intervalo de tempo, simétrico em torno da média (intervalo central), tal que 80% dos estudantes gastam para completar o exame?

# Exercício 1 (a): Probabilidades

$X$: tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120;\, 15^2)$

$$P(X \leq 100) = P\left(Z \leq \frac{100-120}{15}\right) = P(Z \leq -1{,}33)$$




$= 1 - A(1{,}33)$

$= 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918.$

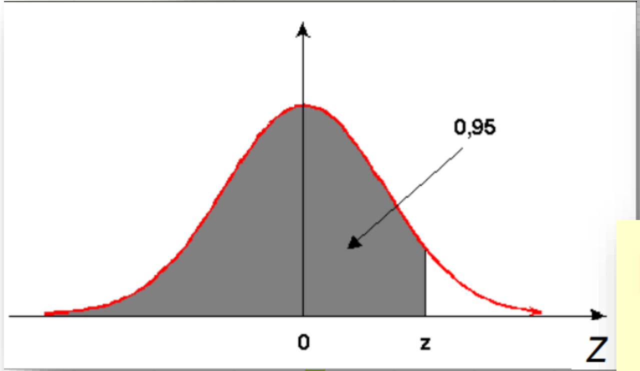
Distribuição Normal (usp.br)

Alternativa, P(Z ≤ -1,33) $= \Phi(-1{,}33) = 1 - \Phi(1{,}33) = 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$

# Exercício 1 (b): Distribuição Normal - Quantis

$X$: tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120;\ 15^2)$

$$P(X \leq x) = 0{,}95 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{x - 120}{15}\right) = 0{,}95$$




$z$ = ? tal que $A(z) = 0{,}95$.

Pela tabela $z = 1{,}64$.

Distribuição Normal (usp.br)

Então, $z = 1{,}64 = \dfrac{x - 120}{15} \Rightarrow x = 120 + 1{,}64 \times 15$

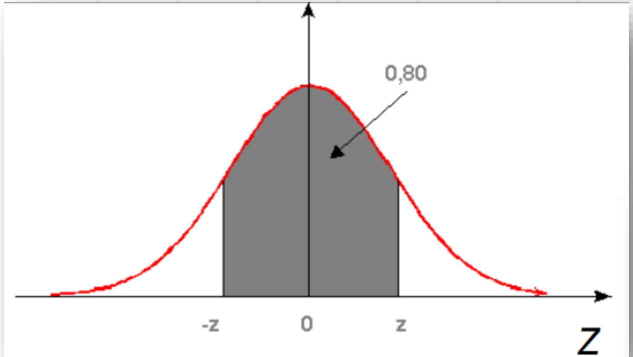
$\Rightarrow x = 144{,}6\ min.$

Alternativa, $P(Z \leq (x-120)/15) = 0{,}95 \Leftrightarrow \Phi((x-120)/15) = 0{,}95 \Leftrightarrow (x-120)/15 = \Phi(0{,}95)^{-1} \Leftrightarrow (x-120)/15 = 1{,}64 \Leftrightarrow x = 144{,}6$ minutos

# Exercício 1 (c): Distribuição Normal - Quantis

$X$: tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120,\ 15^2)$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = 0{,}80 \Rightarrow P\left(\frac{x_1 - 120}{15} \leq Z \leq \frac{x_2 - 120}{15}\right) = 0{,}80$$




$z$ = ?   tal que $A(z)$ = 0,90.

Pela tabela, $z$ = 1,28.

Distribuição Normal (usp.br)

$$-z = \frac{x_1 - 120}{15} = -1{,}28 \Rightarrow x_1 = 120 - 1{,}28 \times 15 \Rightarrow x_1 = 100{,}8\ min.$$

$$z = \frac{x_2 - 120}{15} = 1{,}28 \Rightarrow x_2 = 120 + 1{,}28 \times 15 \Rightarrow x_2 = 139{,}2\ min.$$

Tab

# Distribuição Exponencial

3

Variáveis Aleatórias Contínuas

# Distribuição Exponencial

- A distribuição exponencial (ou exponencial negativa) tem a sua génese associada ao processo de Poisson, mas também é utilizada fora deste contexto;
- Se uma sucessão de eventos constitui um processo de Poisson de intensidade $\lambda$ e se se inicia a contagem no instante 0, o **tempo de espera** pela chegada da primeira ocorrência é uma variável aleatória, com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda$ (dedução no livro).
- Diz-se que a v.a. $X$ tem distribuição exponencial de parâmetro $\lambda$ quando a sua função densidade é da forma,

e = 2,71828 (Número de Euler)

$$f(x|\lambda) = \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & x > 0. \end{cases}$$

A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com **Distribuição Exponencial** pode ser escrita destas duas formas.

Formulário

- **EXPONENCIAL** $X \sim \text{Ex}(\lambda)$, $(\lambda > 0)$ ; $X \sim \text{Ex}(\lambda) \Leftrightarrow X \sim \text{G}(1, \lambda)$ Distribuição Gama

$f(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$ $\quad E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$; $\text{Var}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$; $M_X(s) = \dfrac{\lambda}{\lambda - s}$, $s < \lambda$ ; $\gamma_1 = 2$; $\gamma_2 = 9$

Propriedades:

- $X_i \sim \text{Ex}(\lambda)$ $(i = 1, 2, ..., k)$ independentes $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{k} X_i \sim G(k, \lambda)$ e $\min X_i \sim \text{Ex}(k\lambda)$

# Exponencial vs Poisson

**Observações:**

- Existe uma relação muito importante entre a distribuição exponencial e a distribuição de Poisson, que surge muitas vezes na prática. Estando a observar a ocorrência de certos acontecimentos em intervalos de tempo, pretendemos caracterizar $T$ o tempo ao fim do qual se verifica a primeira ocorrência.

**Teorema**

Seja $X$ uma v.a. de Poisson de parâmetro $\lambda$. Seja $T$ a v.a. que designa o tempo de espera pela ocorrência do primeiro acontecimento, então $T$ tem distribuição exponencial, $T \frown Exp[\beta)$, de parâmetro $\beta = 1/\lambda$.

moduloI_aula2.pdf

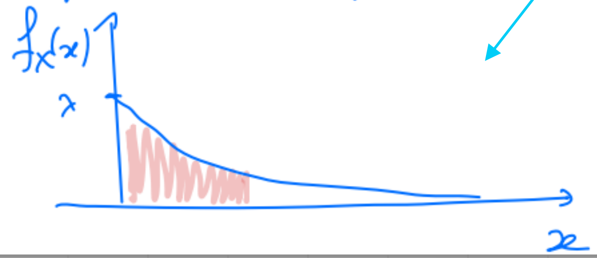
# Distribuição Exponencial

Representação gráfica da função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com **Distribuição Exponencial** de parâmetro λ.

ii) $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$ [ lê-se: X tem distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$ )

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \; x \geq 0$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \; Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$



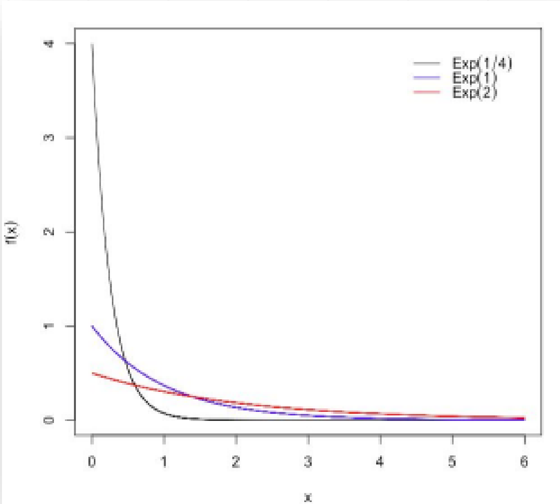

Note-se que $1/\lambda$ representa o valor médio de $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ e $\lambda$ representa uma frequência média.

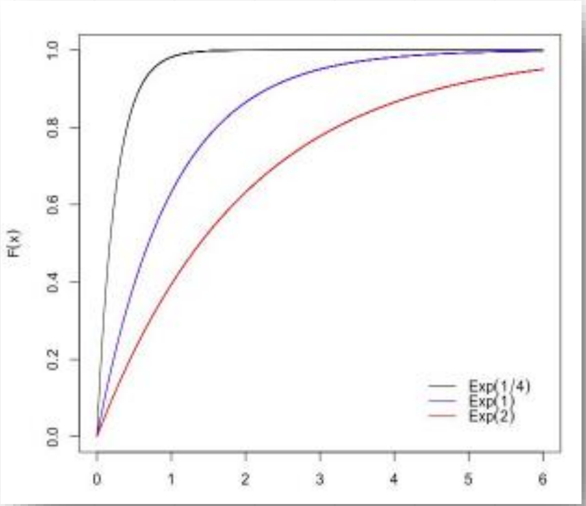
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy = 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Função de distribuição de uma variável aleatória com **Distribuição Exponencial** de parâmetro λ.

Slides Professora Claúdia Nunes

# Distribuição Exponencial




Representação gráfica da função densidade de probabilidade f(x) e da função de distribuição de uma variável aleatória com **Distribuição Exponencial** para vários valores do parâmetro λ.

# Distribuição Exponencial

- A partir da fgm vem $E(X)=\frac{1}{\lambda}$, $\operatorname{Var}(X)=\frac{1}{\lambda^2}$, $CV=1$, $\gamma_1=2$, $\gamma_2=9$.
- Moda: **Não existe** (a função densidade é decrescente com $x$ e o domínio é aberto).
- Mediana: $\mu_e=(\ln 2)/\lambda$. Note-se que $\mu_e<\mu$ (como seria de esperar numa distribuição com assimetria positiva)

- É habitual classificar as distribuições simétricas comparando-as com a normal:
  - Distribuições *leptokurtica* ($\gamma_2>3$) → caudas mais "espessas" (com zona central mais "pontiaguda") que a distribuição normal.
  - Distribuições *platikurtica* ($\gamma_2<3$) → caudas mais "finas" (com zona central mais "achatada") que a distribuição normal.
  - Distribuição *mesokurtica* ($\gamma_2=3$)

https://fenix.iseg.ulisboa.pt/downloadFile/281608120794416/

# Distribuição Exponencial: Propriedades

Duas propriedades importantes:

- "Falta de memória": $X \sim \text{Ex}(\lambda) \Rightarrow P(X > x + h \mid X > x) = P(X > h)$.
- $X_1, X_2, \dots, X_k$ v.a. **independentes** então, $X_i \sim \text{Ex}(\lambda) \Rightarrow Y = \min_i X_i \sim \text{Ex}(k\lambda)$.

https://fenix.iseg.ulisboa.pt/downloadFile/281608120794416/

# Distribuição Exponencial: Exemplo

**Exemplo 5.20** (alterado) – Suponha-se que o tempo de vida útil de um dado componente é uma v.a. *X* com distribuição exponencial com média igual a 600 horas.

Se $E(X) = 1/\lambda = 600$, então tem-se $\lambda = 1/600$

- Probabilidade de o componente durar mais de 700 horas

$$P(X > 700) = \int_{700}^{+\infty} \frac{1}{600} e^{-x/600} dx = e^{-7/6} \approx 0.31.$$

https://fenix.iseg.ulisboa.pt/downloadFile/281608120794416/

Na **Distribuição Exponencial** tem-se $F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$, então $P(X > x) = 1-[1- e^{-\lambda x}] = e^{-\lambda x}$

Logo, alternativamente à resolução anterior tem-se $P(X>700) = 1-P(X\leq 700) = 1- [1- e^{-700/600}] = e^{-7/6}$

# Distribuição Exponencial: Exemplo

**Exemplo 5.20** (alterado) – Suponha-se que o tempo de vida útil de um dado componente é uma v.a. *X* com distribuição exponencial com média igual a 600 horas.

- Sabendo que o componente já durou 400 horas, qual a probabilidade de durar ainda mais 700 horas.

$$P(X > 1100 \mid X > 400) = \frac{P(X > 1100)}{P(X > 400)} = \frac{e^{-11/6}}{e^{-4/6}} = e^{-7/6}.$$

1100=700+400

Dada a falta de memória da exponencial,

$P(X > 700) = P(X > 1100 \mid X > 400)$. Mais simples

https://fenix.iseg.ulisboa.pt/downloadFile/281608120794416/

# Distribuição Exponencial: Exemplo

- Num conjunto de 10 componentes a funcionar de forma independente qual a probabilidade de algum deles durar menos de 100 horas

$$P(\min X_i < 100) = \int_0^{100} \frac{1}{60} e^{-x/60} dx = 1 - e^{-100/60} \approx 0.8111$$

já que $\min X_i \sim \mathrm{Ex}(1/60)$. Note-se que $P(X < 100) = 1 - e^{-1/6} \approx 0.1535$

Se E(X) = 1/λ = 600, então tem-se λ = 1/600

Como X ~ Exp(1/600), então Min Xi ~ Exp(10/600 = 1/60)

- $X_1, X_2, \ldots, X_k$ v.a. **independentes** então, $X_i \sim \mathrm{Ex}(\lambda) \Rightarrow Y = \min_i X_i \sim \mathrm{Ex}(k\lambda)$.

# Distribuição Exponencial

Uma v.a. X tem distribuição exponencial com parâmetro λ >0 se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Notação: X ~ Exp(λ)

A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com **Distribuição Exponencial** pode ser escrita com esta parametrização.

## Valor esperado e variância

$$E(X) = \lambda \quad \text{e} \quad V(X) = \lambda^2$$

# Distribuição Exponencial: Exercícios

4

Variáveis Aleatórias Contínuas

**Exemplo:** Cerca de 15 clientes utilizam o caixa eletrônico por hora. Supondo que a distribuição de tempos de chegada é exponencial, qual é a probabilidade de que o tempo de chegada entre clientes consecutivos seja:

(a) Menor que três minutos?

(b) Maior que 3 minutos?

(c) Entre 2 e 4 minutos?

https://fenix.iseg.ulisboa.pt/downloadFile/281608120794416/

# Exercício: Distribuição Exponencial

- A variável aleatória X= tempo

- Note que foi dada a frequência de chegada $\lambda = 1/\beta = 15$ /hora

-3 min = 0,05 horas

-2 min = 0,0333 horas

-4 min = 0,0666 horas

Note-se que $1/\lambda$ representa o valor médio de $X \sim Exp(\lambda)$ e $\lambda$ representa uma frequência média.

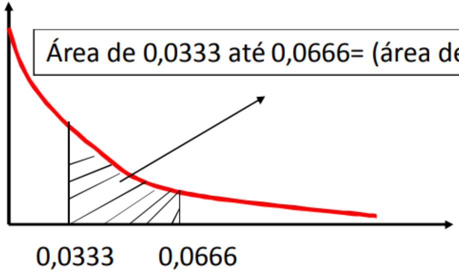
https://fenix.iseg.ulisboa.pt/downloadFile/281608120794416/

# Exercício: Distribuição Exponencial

(a) $P(t < 0{,}05) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-(15).(0{,}05)} = 0{,}5276$

(b) $P(t \geq 0{,}05) = 1 - P(t < 0{,}05) = 1 - 0{,}5276 = 0{,}4734$

(c)




Área de 0,0333 até 0,0666= (área de 0 até 0,0666) – (área de 0 até 0,033)

$P(0{,}0333<t < 0{,}0666)= P(t<0{,}0666)- P(t<0{,}0333)= e^{-(15).(0{,}0666))} - e^{-(15).(0{,}0333))}$

https://fenix.iseg.ulisboa.pt/downloadFile/281608120794416/

# Obrigada!

## Questões?