Estatística I

Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)

2.º Ano/1.º Semestre

2023/2024

Aulas Teórico-Práticas N.^{os} 18 e 19 (Semana 10)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas TP (Semanas 1 e 3)	Aulas TP (Semanas 3 a 6)	Aulas TP (Semanas 7 a 9)	Aulas TP (Semanas 10 a 12)
• **Capítulo 1**: Análise Descritiva • **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	**Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Variáveis Aleatórias Especiais

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

1 Distribuição Uniforme Discreta

Variáveis Aleatórias Discretas

Variáveis Aleatórias Discretas

No contexto de v.a. discretas, há variáveis que são usadas em muitas situações e que por isso merecem ser estudadas em detalhe:

- Bernoulli
- Binomial (formulário) (Tabelas)
- Uniforme discreta
- Poisson (formulário) (Tabelas)
- Geométrica (formulário)

Distribuição Uniforme Discreta

Definição: A v. a. X segue uma **distribuição Uniforme discreta em N pontos**, $X \sim U\{1, 2, \ldots, N\}$, se a sua função de probabilidade é:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{N}, \qquad x = 1, 2, \ldots, N.$$

O parâmetro caracterizador desta distribuição é N.

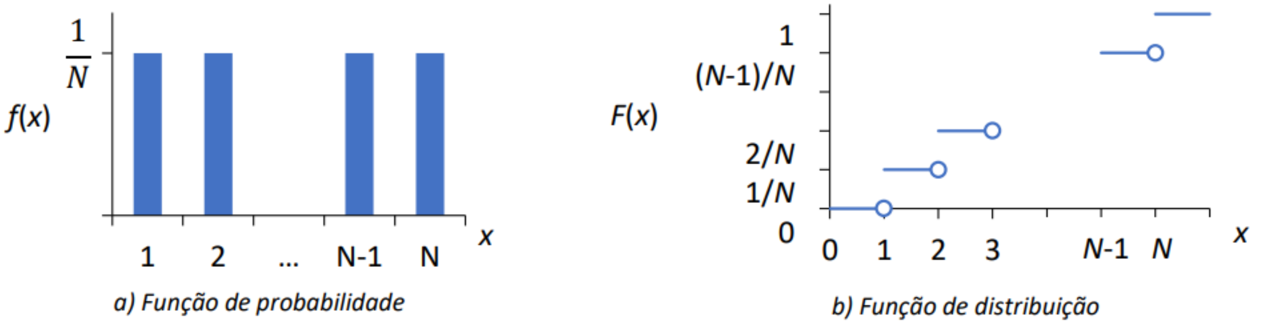


Figura 5.1: *Função de probabilidade e de distribuição da distribuição Uniforme discreta em N pontos.*

dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/25959/3/ProbabilidadesEstatistica2019.pdf

Distribuição Uniforme Discreta

Para qualquer valor de N, esta distribuição tem uma forma muita característica sendo, por exemplo, sempre simétrica em torno da sua média

Se $X \sim U\{1, 2, \ldots, N\}$ então $\mu_X = E(X) = \dfrac{N+1}{2}$ e $\sigma_X^2 = Var(X) = \dfrac{N^2-1}{12}$.

dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/25959/3/ProbabilidadesEstatistica2019.pdf

Distribuição Uniforme: Exercícios

Variáveis Aleatórias Discretas

2

Considere-se a experiência aleatória que consiste no lançamento de um dado.
Seja X a v. a. que representa o valor da face voltada para cima.

a) Descreva a função de probabilidade da v. a. X.
b) Determine o valor esperado e a variância de X.
c) Qual a probabilidade de sair um número par no dado?
d) Determine a probabilidade de sair um número superior a 3 no lançamento.
e) Num lançamento, qual a probabilidade de sair um número inferior ou igual a 2?

dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/25959/3/ProbabilidadesEstatistica2019.pdf

Exercício 1: Distribuição Uniforme Discreta

a) Função de probabilidade:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{6}, \qquad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Portanto, $X \sim U\{1, 2, \ldots, 6\}$.

b) $E(X) = \dfrac{6+1}{2} = 3{,}5.$

$Var(X) = \dfrac{6^2 - 1}{12} = 2{,}9167.$

c) $P(X = 2 \cup X = 4 \cup X = 6) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}.$

d) $P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}.$

e) $P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}.$

dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/25959/3/ProbabilidadesEstatistica2019.pdf

Distribuição Bernoulli e Binomial

Variáveis Aleatórias Discretas

3

Distribuição Bernoulli

Na prática, existem muitas experiências que admitem apenas dois resultados.

Exemplos:

- Uma peça é classificada como boa ou defeituosa;
- O resultado de um exame médico para detecção de uma doença é positivo ou negativo;
- Um paciente submetido a um tratamento, durante um período de tempo fixo, cura-se ou não da doença;
- Um entrevistado concorda ou não com a afirmação feita;
- No lançamento de um dado ocorre ou não a face “5”.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Bernoulli

As experiências com alternativas *dicotómicas* podem ser representadas, genericamente, por respostas do tipo sucesso-fracasso ou sucesso-insucesso.

- Essas experiências recebem o nome de ***Ensaios de Bernoulli*** ou Provas de Bernoulli e originam uma v.a. com *Distribuição Bernoulli.*

Variável aleatória de Bernoulli: É uma v.a. que assume apenas dois valores:

- ***1*** se ocorrer ***sucesso***,
- ***0*** se ocorrer ***insucesso/fracasso***.

Geralmente, a probabilidade de sucesso é representada por p, $0 < p < 1$.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Bernoulli

"X ~ ***Bernoulli*** (p)" representa uma v.a. com ***Distribuição Bernoulli*** com parâmetro p, isto é,

$$X = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ se ocorrer "sucesso"} \\ \mathbf{0}, \text{ se ocorrer "insucesso"} \end{cases}$$

e a sua função massa de probabilidade pode ser representada pela tabela

X	1	0
$P(X=x)$	p	$1 - p$

$$E(X) = p,$$

$$\text{Var}(X) = p(1 - p).$$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Bernoulli: Exemplo

Exemplo: Um dado equilibrado é lançado 1 vez.
Qual é a probabilidade de se obter a *face 5*?

Denotamos,

S: "sucesso", ocorrer face 5;
I: "insucesso", não ocorrer face 5.

A variável X "indica" se ocorreu sucesso ou não numa prova Bernoulli!

É fácil ver que $\boldsymbol{p} = P(\text{sucesso}) = P(X=1) = 1/6$ e
$\boldsymbol{q = 1 - p} = P(\text{insucesso}) = P(X=0) = 5/6$

$\Omega = \{S, I\}$

X	1	0
$P(X=x)$	1/6	5/6

$X \sim \text{Bernoulli}(1/6)$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuições Bernoulli e Binomial

→ Repetições independentes de um ensaio de Bernoulli, com a mesma probabilidade de ocorrência de "sucesso", dão origem ao ***Modelo de Probabilidade Binomial***.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial

A v.a. X correspondente ao **número de sucessos em n ensaios/provas de Bernoulli independentes e com mesma probabilidade p de sucesso** tem *Distribuição Binomial com parâmetros n e p.*

A função massa de probabilidade da v.a. X é dada por

Notação: $X \sim Bin(n; p)$.

Formulário

- **BINOMIAL** $X \sim B(n;\theta)$, $(0<\theta<1)$

$$f(x\mid\theta)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x},\ x=0,1,2,\ldots,n$$

$$E(X)=n\theta\ ;\ \ \mathrm{Var}(X)=n\theta(1-\theta)\ ;\ \ M_X(s)=\left[(1-\theta)+\theta e^s\right]^n\ ;\ \ \gamma_1=(1-2\theta)/\sigma$$

Propriedades:

- $X\sim B(n;\theta)\Leftrightarrow(n-X)\sim B(n;1-\theta)$
- $X_1\sim B(n_1;\theta,),\ X_2\sim B(n_2;\theta),\ X_1$ e X_2 independentes $\Rightarrow X_1+X_2\sim B(n_1+n_2,\theta)$
- **BERNOULLI** $X\sim B(1;\theta)$

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

$$x=0,1,\ldots,n$$

$$E(X)=np \qquad Var(X)=np(1-p)$$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial

Resultado: Se $X \sim Bin(n; p)$, então

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{média: } \mu = \mathrm{E}(X) = n \times p \\ \text{variância: } \sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = n \times p \times (1-p) \end{array}}$$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial: Resumindo…

A distribuição binomial verifica as seguintes condições:

1. A experiência tem um *nº fixo de provas*, *n*.
2. As provas são *independentes*. (O resultado de uma prova não afecta a probabilidade de ocorrência das restantes.)
3. Cada prova origina um de dois resultados possíveis: *sucesso* ou *insucesso*.
4. A probabilidade de sucesso, denotada por *p*, é *constante* em cada prova.

Ana M. Abreu - 2006/07

[PDF] Capítulo 3 Modelos Estatísticos - Free Download PDF (silo.tips)

Distribuição Binomial: Exemplo 1

Exemplo: Um dado equilibrado é lançado 3 vezes.
Qual é a probabilidade de se obter a *face 5* duas vezes?

Denotamos,

S: "sucesso", ocorrer face 5;
I: "insucesso", não ocorrer face 5.

É fácil ver que $\boldsymbol{p} = P(\text{sucesso}) = 1/6$ e

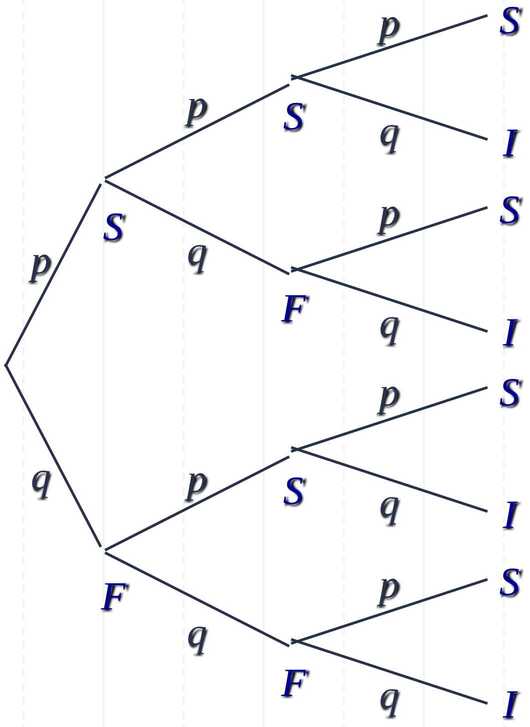
$$\boldsymbol{q} = \mathbf{1} - \boldsymbol{p} = P(\text{insucesso}) = 5/6$$

$$\Omega = \{SSS, SSI, SIS, ISS, SII, ISI, IIS, III\}$$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial: Exemplo 1

Estamos interessados no número total de sucessos que, no caso, é o *número de vezes que a face 5 é observada* nos três lançamentos do dado.



Ω	Prob	X
(SSS)	p^3	3
(SSI)	p^2q	2
(SIS)	p^2q	2
(SII)	pq^2	1
(ISS)	p^2q	2
(ISI)	pq^2	1
(IIS)	pq^2	1
(III)	q^3	0

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial: Exemplo 1

A função de probabilidade de X é dada por:

Probabilidades binomiais para n = 3 e $P(S) = p$		
nº. de sucessos	probabilidades	p = 1/6
0	q^3	125/216=0,5787
1	$3pq^2$	75/216=0,3472
2	$3p^2q$	15/216=0,0694
3	p^3	1/216=0,0046

Podemos escrever essa função como

$$P(X = x) = \binom{3}{x} p^x \, q^{3-x} \quad , \quad x = 0, 1, 2, 3.$$

No exemplo, para n **= 3** e p **= 1/6**, $P(X = 2) = 0{,}0694.$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial: Exemplo 2

Considere-se uma prova de escolha múltipla com 12 questões, cada uma com 4 alternativas. Suponha-se que o aluno escolhe as respostas ao acaso. Qual é a probabilidade dele ***acertar pelo menos a 6 questões***?

X: nº de questões que o aluno acertará

X pode assumir valores no conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

P(Sucesso) = P(acertar a cada questão) = 1/4 = 0,25

n = 12

$X \sim Bin(12; 0{,}25)$

$$\boxed{P(X = x) = \binom{12}{x} 0{,}25^{x} (1 - 0{,}25)^{12-x}}$$

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial: Exemplo 2

$X \sim Bin(12;\ 0{,}25)$

B. Função de distribuição

N	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
11	0	.5688	.3138	.1673	.0859	.0422	.0198	.0088	.0036	.0014	.0005
	1	.8981	.6974	.4922	.3221	.1971	.1130	.0606	.0302	.0139	.0059
	2	.9848	.9104	.7788	.6174	.4552	.3127	.2001	.1189	.0652	.0327
	3	.9984	.9815	.9306	.8389	.7133	.5696	.4256	.2963	.1911	.1133
	4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9980	.9941	.9852	.9673
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9993	.9978	.9941
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9995
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
12	0	.5404	.2824	.1422	.0687	.0317	.0138	.0057	.0022	.0008	.0002
	1	.8816	.6590	.4435	.2749	.1584	.0850	.0424	.0196	.0083	.0032
	2	.9804	.8891	.7358	.5583	.3907	.2528	.1513	.0834	.0421	.0193
	3	.9978	.9744	.9078	.7946	.6488	.4925	.3467	.2253	.1345	.0730
	4	.9998	.9957	.9761	.9274	.8424	.7237	.5833	.4382	.3044	.1938
	5	1.0000	.9995	.9954	.9806	.9456	.8822	.7873	.6652	.5269	.3872
	6	1.0000	.9999	.9993	.9961	.9857	.9614	.9154	.8418	.7393	.6128
	7	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9972	.9905	.9745	.9427	.8883	.8062
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9983	.9944	.9847	.9644	.9270
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9992	.9972	.9921	.9807
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9989	.9968
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	0	.5133	.2542	.1209	.0550	.0238	.0097	.0037	.0013	.0004	.0001
	1	.8646	.6213	.3983	.2336	.1267	.0637	.0296	.0126	.0049	.0017
	2	.9755	.8661	.6920	.5017	.3326	.2025	.1132	.0579	.0269	.0112
	3	.9969	.9658	.8820	.7473	.5843	.4206	.2783	.1686	.0929	.0461
	4	.9997	.9935	.9658	.9009	.7940	.6543	.5005	.3530	.2279	.1334
	5	1.0000	.9991	.9925	.9700	.9198	.8346	.7159	.5744	.4268	.2905
	6	1.0000	.9999	.9987	.9930	.9757	.9376	.8705	.7712	.6437	.5000
	7	1.0000	1.0000	.9998	.9988	.9944	.9818	.9538	.9023	.8212	.7095
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9990	.9960	.9874	.9679	.9302	.8666
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9975	.9922	.9797	.9539

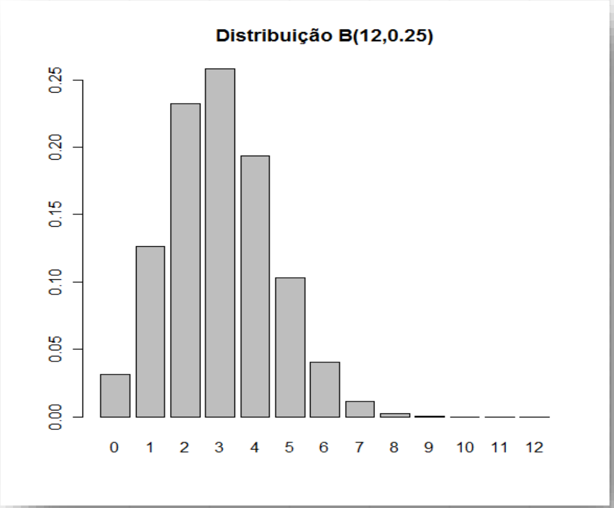
P (acertar pelo menos a 6) = P(X ≥ 6) = 1- P(X < 6)
= 1- P(X ≤ 5) = 1-0,9456 = 0,0544

Distribuição Binomial: Exemplo 2

No R, probabilidades

```
> dbinom(0:12,12,0.25)
 [1] 3.167635e-02 1.267054e-01 2.322932e-01 2.581036e-01 1.935777e-01
 [6] 1.032414e-01 4.014945e-02 1.147127e-02 2.389848e-03 3.540516e-04
[11] 3.540516e-05 2.145767e-06 5.960464e-08

> cbind(0:12,dbinom(0:12,12,0.25))
      [,1]         [,2]
 [1,]    0 3.167635e-02
 [2,]    1 1.267054e-01
 [3,]    2 2.322932e-01
 [4,]    3 2.581036e-01
 [5,]    4 1.935777e-01
 [6,]    5 1.032414e-01
 [7,]    6 4.014945e-02
 [8,]    7 1.147127e-02
 [9,]    8 2.389848e-03
[10,]    9 3.540516e-04
[11,]   10 3.540516e-05
[12,]   11 2.145767e-06
[13,]   12 5.960464e-08
```




```
> barplot(dbinom(0:12,12,0.25),names.arg=0:12,main="Distribuição B(12,0.25)")
```

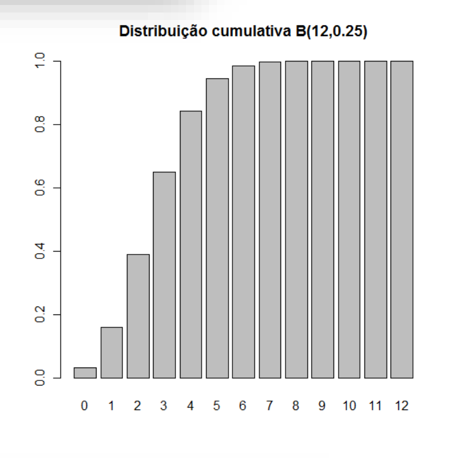
https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial: Exemplo 2

No R, distribuição cumulativa $P(X \leq x)$

```
> pbinom(0:12,12,0.25)
 [1] 0.03167635 0.15838176 0.39067501 0.64877862 0.84235632 0.94559777
 [7] 0.98574722 0.99721849 0.99960834 0.99996239 0.99999779 0.99999994
[13] 1.00000000
```

```
> cbind(0:12,pbinom(0:12,12,0.25))
      [,1]       [,2]
 [1,]    0 0.03167635
 [2,]    1 0.15838176
 [3,]    2 0.39067501
 [4,]    3 0.64877862
 [5,]    4 0.84235632
 [6,]    5 0.94559777
 [7,]    6 0.98574722
 [8,]    7 0.99721849
 [9,]    8 0.99960834
[10,]    9 0.99996239
[11,]   10 0.99999779
[12,]   11 0.99999994
[13,]   12 1.00000000
```




```
> barplot(pbinom(0:12,12,0.25),names.arg=0:12,main="Distribuição cumulativa B(12,0.25)")
```

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Distribuição Binomial: Exemplo 2

No R, calcularemos $P(X \geq 6)$

```
> 1-pbinom(5,12,0.25)
[1] 0.05440223
> pbinom(5,12,0.25,lower.tail=FALSE)
[1] 0.05440223
```

$1 - P(X \leq 5) = P(X \geq 6)$

calcula a probabilidade $P(X > 5) = P(X \geq 6)$

A média é

$E(X) = n \times p = 12 \times 0{,}25 = 3$,

ou seja, *em média*, o aluno que responder ao acaso a todas as questões acertará 3.

https://www.slideserve.com/carlo/vari-veis-aleat-rias-e-distribui-o-binomial

Soma de Binomiais Independentes

- Soma de binomiais **independentes com o mesmo parâmetro** θ.

  Sejam Y_1 e Y_2 duas variáveis aleatórias independentes. Então,

$$Y_1 \sim B(n_1;\theta,),\ Y_2 \sim B(n_2;\theta) \Rightarrow Y = Y_1 + Y_2 \sim B(n,\theta)$$

  onde $n = n_1 + n_2$.

Murteira et al (2015)

Distribuição Binomial: Exercícios

Variáveis Aleatórias Discretas

4

3.7 Num armazém encontra-se um lote de 10000 latas de um certo produto alimentar que está a ser preparado para ser distribuído. 500 dessas latas já ultrapassaram o prazo de validade. É efectuada uma inspecção sobre uma amostra de 15 embalagens escolhidas ao acaso com reposição. A inspecção rejeita o lote se forem encontradas mais do que duas latas fora do prazo de validade nessa amostra.

(a) Qual a probabilidade de rejeição do lote?

(b) Qual o número esperado de latas fora do prazo de validade?

Exercício 3.7 (a)

- **V.a. de interesse**

  X = número de latas fora do prazo de validade em 15 embalagens escolhidas ao acaso COM reposição de um lote de 10 000 latas das quais 500 já ultrapassaram o prazo de validade

- **Distribuição de X**

  A v.a. X corresponde ao número de sucessos em n provas de Bernoulli independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com probabilidade de sucesso comum p, pelo que

$$X \sim \text{Binomial}(n, p)$$

  com

$$n = 15$$
$$p = \frac{500}{10000} = 0.05$$

- **F.p. de X**

$$P(X = x) \stackrel{form.}{=} \binom{15}{x} 0.05^x (1-0.05)^{15-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, 15$$

Exercício 3.7 (a)

- **Prob. pedida**

  A prob. pedida pode obter-se recorrendo directamente à f.p.:

$$
\begin{aligned}
P(\text{rejeitar lote}) &= P(X>2) \\
&= 1-P(X\leq 2) \\
&= 1-\sum_{x=0}^{2} P(X=x) \\
&= 1-\left[\binom{15}{0}0.05^0\,(1-0.05)^{15-0}+\binom{15}{1}0.05^x\,(1-0.05)^{15-1}+\binom{15}{2}0.05^2\,(1-0.05)^{15-2}\right] \\
&= 1-\left(0.95^{15}+15\times 0.05\times 0.95^{14}+\frac{15\times 14}{2}\times 0.05^2\times 0.95^{13}\right) \\
&\simeq 1-(0.463291+0.365756+0.134752) \\
&= 0.036201
\end{aligned}
$$

  Alternativamente, podemos recorrer às tabelas disponíveis:

$$
\begin{aligned}
P(\text{rejeitar lote}) &= P(X>2) \\
&= 1-P(X\leq 2) \\
&= 1-F_{Binomial(15,0.05)}(2) \\
&\overset{tabela/calc.}{\simeq} 1-0.9638 \\
&= 0.0362
\end{aligned}
$$

Exercício 3.7 (a): Distribuição Binomial

$X \sim Binomial(15;0,05)$

B. Função de distribuição

N	x	θ = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9987	.9959	.9888
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9983
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
14	0	.4877	.2288	.1028	.0440	.0178	.0068	.0024	.0008	.0002	.0001
	1	.8470	.5846	.3567	.1979	.1010	.0475	.0205	.0081	.0029	.0009
	2	.9699	.8416	.6479	.4481	.2811	.1608	.0839	.0398	.0170	.0065
	3	.9958	.9559	.8535	.6982	.5213	.3552	.2205	.1243	.0632	.0287
	4	.9996	.9908	.9533	.8702	.7415	.5842	.4227	.2793	.1672	.0898
	5	1.0000	.9985	.9885	.9561	.8883	.7805	.6405	.4859	.3373	.2120
	6	1.0000	.9998	.9978	.9884	.9617	.9067	.8164	.6925	.5461	.3953
	7	1.0000	1.0000	.9997	.9976	.9897	.9685	.9247	.8499	.7414	.6047
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9996	.9978	.9917	.9757	.9417	.8811	.7880
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9983	.9940	.9825	.9574	.9102
	10	1.0000	1.0000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	11	1.0000	1.0000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	12	1.0000	1.0000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	0	.4633	.2059	.0874	.0352	.0134	.0047	.0016	.0005	.0001	.0000
	1	.8290	.5490	.3186	.1671	.0802	.0353	.0142	.0052	.0017	.0005
	2	.9638	.8159	.6042	.3980	.2361	.1268	.0617	.0271	.0107	.0037
	3	.9945	.9444	.8227	.6482	.4613	.2969	.1727	.0905	.0424	.0176
	4	.9994	.9873	.9383	.8358	.6865	.5155	.3519	.2173	.1204	.0592
	5	.9999	.9978	.9832	.9389	.8516	.7216	.5643	.4032	.2608	.1509
	6	1.0000	.9997	.9964	.9819	.9434	.8689	.7548	.6098	.4522	.3036
	7	1.0000	1.0000	.9994	.9958	.9827	.9500	.8868	.7869	.6535	.5000
	8	1.0000	1.0000	.9999	.9992	.9958	.9848	.9578	.9050	.8182	.6964
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9992	.9963	.9876	.9662	.9231	.8491
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9972	.9907	.9745	.9408
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9981	.9937	.9824
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9989	.9963
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1-0,9638 = 0,0362$

Exercício 3.7 (b)

- **Valor esperado de X**

$$
\begin{aligned}
E(X) &\stackrel{form.}{=} n\,p \\
&= 15 \times 0.05 \\
&= 0.75 \quad \notin \quad \mathbb{R}_X = \{0,1,2,\ldots,15\}
\end{aligned}
$$

5 Distribuição Binomial: Exercícios do Murteira et al (2015)

Variáveis Aleatórias Discretas

1. Um produtor de refrigerantes resolveu lançar uma campanha publicitária, oferecendo prémios impressos nas cápsulas das garrafas. Durante a campanha, 5% das garrafas distribuídas para venda tinham prémio. Ao adquirir 15 garrafas, calcule a probabilidade de
   a) existirem somente duas garrafas com prémio.
   b) receber pelo menos um prémio.

Exercício 1 (a)

X - v.a. nº garrafas premiadas num conjunto de 15 unidades $\Rightarrow X \sim B(\underset{n}{\underset{\downarrow}{15}}, \underset{\theta}{\underset{\downarrow}{0.05}})$

θ = proporção garrafas premiadas

(a)

$P(X=2) = 0.1348$

Exercício 1 (b)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - 0.4633 = 0.5367$$

2. Da produção diária de uma máquina retiram-se, para efeitos de controlo, 10 peças. Da experiência passada sabe-se que 80% das peças podem considerar-se “boas”. Calcule a probabilidade de, nas 10 peças, haver mais que 8 peças “boas”.

Exercício 2

X - nº peças boas, num conjunto de 10 $\longrightarrow$ $X \sim B(10, 0.8)$, $n = 10$, $\theta = 0.8$

$$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - 0.6242 = 0.3758 \longrightarrow \text{máquina}$$

Pela Tabela 1B:

$$P(X > 8) = P(\underbrace{n - X}_{B(10,0.2)} < 10 - 8) = P(\underset{\downarrow \; B(10,0.2)}{Y} < 2) = P(Y \leq 1) = 0.3758$$

3. Sabe-se, por experiência, que a probabilidade de uma máquina necessitar de ser afinada em cada período de trabalho de 30 minutos é de 0.05 (períodos independentes). Em cada período só pode haver, no máximo uma afinação. Determine:
   a) O número médio de afinações numa semana em que a máquina trabalha 20horas.
   b) A probabilidade de em 8 horas de trabalho se verificar pelo menos uma afinação, e a de se verificarem 2 a 5 afinações.

Exercício 3 (a)

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se máquina afinada em 30 min} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad X \sim B(1, 0.05)$$

(a)

20 horas $= 20 \times 2 = 40$ períodos de 30 minutos

Seja $\sum_{i=1}^{40} X_i \rightarrow$ nº afinações num conjunto de 40 períodos $\rightarrow \sum_{i=1}^{40} X_i \sim B(40, 0.05)$

Então,

$$E\left(\sum_{i=1}^{40} X_i\right) = 40 \times 0.05 = 2$$

Exercício 3 (b)

8 horas = 8 x 2 = 16 períodos de 30 minutos

Seja,

$$Y = \sum_{i=1}^{16} X_i \rightarrow \text{nº afinações num conjunto de 16 períodos (8 horas)} \rightarrow Y \sim B(16, 0.05)$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y<1) = 1 - P(Y \leq 0) = 1 - P(Y=0) = 1 - 0.4401 = 0.5599$$

$$P(2 \leq Y \leq 5) = P(Y \leq 5) - P(Y<2) = P(Y \leq 5) - P(Y \leq 1) = 0.9999 - 0.8108 = 0.189$$

4. A produção de parafusos em certa unidade fabril é assegurada por duas máquinas (M_1 e M_2) de funcionamento independente. Da experiência passada pode concluir-se que a proporção de parafusos com defeito, em cada uma das máquinas, é de 5%. Atendendo à capacidade das máquinas, e para efeitos de controlo de qualidade, colhe-se diariamente uma amostra de quatro parafusos da máquina M_1 e uma de oito da máquina M_2.

   a) Calcule a probabilidade de se encontrarem dois parafusos com defeito no conjunto das duas amostras.

   b) Os parafusos são vendidos em embalagens de 20, garantindo o fabricante que 90% são de boa qualidade. Calcule a probabilidade de essa garantia ser violada, isto é, de haver mais que dois parafusos defeituosos numa embalagem.

Exercício 4 (a)

X_1 - v.a. nº parafusos defeituosos num conjunto de 4 unidades de M_1 $\Rightarrow$ $X_1 \sim B(4, 0.05)$

X_2 - v.a. nº parafusos defeituosos num conjunto de 8 unidades de M_2 $\Rightarrow$ $X_2 \sim B(8, 0.05)$

(a)

$X_1 + X_2 = Y$ $\rightarrow$ v.a. nº parafusos defeituosos nos dois conjuntos

$X_1 + X_2 \sim B(4+8, 0.05) \Leftrightarrow Y \sim B(12, 0.05)$

$P(Y = 2) = 0.0988$

Exercício 4 (b)

Z - v.a. nº parafusos defeituosos numa embalagem de 20 unidades $\Rightarrow Z \sim B(20, 0.05$

$P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9245 = 0.0755$

8. Sabe-se que 1% dos parafusos de determinado fabricante são defeituosos. Os parafusos são vendidos em caixas de 12 unidades com a garantia de devolução do valor pago caso existam dois ou mais parafusos defeituosos.

a) Qual a probabilidade de ocorrer uma devolução?
b) Se se comprar dez caixas, qual a probabilidade de haver devoluções?

Exercício 8 (a)

X - nº parafusos defeituosos numa caixa de 12 unidades → $X \sim B(12, 0.01)$

(a)

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.9938 = 0.0062$

Exercício 8 (b)

Y - nº de caixas devolvidas, num conjunto de 10

$Y \sim B(10, \theta)$, onde $\theta = P(\text{caixa devolvida}) = P(X \geq 2) = 0.0062$

Logo, $Y \sim B(10, 0.0062)$

Quer-se

$P(Y > 0) = 1 - P(Y \leq 0) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0.9397 = 0.0603$

Obrigada!

Questões?

Cap 5 do livro: 1, 2, 4, 20, 34, 39, 43, 50, 58, 68.